This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 000 993 753

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

---

Als Fortsetzung des von

**A. L. Crelle**

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass**

von

**C. W. Borchardt.**

LIBRARY
STANFORD JUNIOR
UNIVERSITY

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

---

**Sechs und sechzigster Band.**

In vier Heften.

---

Berlin, 1866.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

116038

LIBRARY
LELAND STANFORD JUNIOR
UNIVERSITY

# Inhaltsverzeichniss des sechs und sechzigsten Bandes.


Ueber den Einfluss von Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Von Herrn *E. B. Christoffel* zu Zürich. . . . . Seite 1

Ein Uebertragungsprincip. Von Herrn *O. Hesse* in Heidelberg. . . . . — 15

Recherches sur les polyèdres. Par M. *Camille Jordan* à Châlon s. Saône. . — 22

Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non eulériens. Par le même. . . . . — 86

Bestimmung von $d\lg\vartheta(0,0,\ldots 0)$ durch die Classenmoduln. Von Herrn *J. Thomae* zu Laucha a. d. Unstrut. . . . . — 92

Ueber die Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung. Von Herrn *G. Roch* in Halle. . . . . — 97

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Von Herrn *L. Fuchs*. . . . . — 121

Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach *Laplace*schen Functionen höherer Ordnung. Von Herrn *F. G. Mehler* zu Danzig. . . . . — 161

Ueber Theta-Functionen vielfacher Argumente. Von Herrn *G. Roch* in Halle. . . . . — 177

Beziehungen zwischen Theta-Producten. Von Herrn *Gordan* in Giessen. . — 185

Ueber singuläre Auflösungen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Von Herrn *H. Weber* zu Heidelberg. . . . . — 193

Geometrische Betrachtungen und Lehrsätze. Von *Jacob Steiner*. (Aus dessen hinterlassenen Manuscripten mitgetheilt von Herrn *C. F. Geiser* in Zürich.) — 237

Ueber gewisse Beziehungen zwischen räumlichen Gebilden. Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn. . . . . — 267

Ueber einen Satz aus der Determinantentheorie. Von Herrn *Stern* in Göttingen. . . . . — 285

Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré *r*, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré *m*; suivi de quelques réflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques. Par M. *E. de Jonquières* à Paris. . . . . — 289

Ueber die Kettenbruchentwickelung der *Gauss*schen Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$. Von Herrn *L. W. Thomé*. . . . . Seite 322
Ueber die Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten. Von Demselben. . . . . — 337
Ueber die Erzeugung der Curven dritter Klasse und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes. Von Herrn *Siebeck* in Liegnitz. . . . . — 344
Ueber einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems. Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn. . . . . — 363
Ueber die Anziehung eines homogenen Polyeders. Von Herrn *F. G. Mehler* zu Danzig. . . . . — 375
Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber. Von Herrn *R. Hennig* zu Gnesen. . . . . — 382
Preisfrage der physikalisch-mathematischen Klasse der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1868. . . . . — 383

## Druckfehlerverzeichniss des 66. Bandes.

Pag. 200, Zeile 7, 8, 9 v. u. vor die drei dort stehenden Gleichungen ist (13.) zu setzen.

- 308, - 15 v. o. statt $\frac{m(m-1)(m-2)}{3}$ lese man $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$.
- 308, - 16 v. o. statt $\frac{1}{3}m(m-1)(m-2)$ lese man $\frac{1}{3}m(m-1)(m-2)$.

# Ueber den Einfluss von Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* zu Zürich.)

Die Aufgaben, deren Lösung von der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen abhängt, führen in der Regel Nebenbedingungen mit sich, welche aus der mit dem Problem gegebenen realen Bedeutung der einzelnen Variabeln entspringen, und demgemäss stets in einer Beschränkung der Veränderlichkeit dieser Grössen bestehen.

Man hat diesem Umstande bisher keine besondere Beachtung geschenkt, indem bei den mir bekannt gewordenen Untersuchungen über Probleme dieser Art die Schlüsse sich ausschliesslich auf die den allgemeinen Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen eigenthümlichen Formverhältnisse stützen, ohne dass die Frage erwähnt wird, ob diese Formen auch die hier unerlässliche Eigenschaft besitzen, jene nur auf Grössenverhältnisse gerichteten Nebenbedingungen ununterbrochen zu befriedigen.

Dies ist nun keineswegs unter allen Umständen der Fall; vielmehr kann es vorkommen, dass diese Nebenbedingungen zu wesentlichen Abweichungen von den Gesetzen zwingen, nach denen die in der allgemeinen Lösung dargestellten Functionen durch die Differentialgleichungen von bekannten zu unbekannten Werthen fortgesetzt werden, und dann treten Erscheinungen ein, die bisher unbemerkt bleiben mussten, weil sie durch eine von diesen Gesetzen nirgendwo abweichende Rechnung nicht aufgedeckt werden können.

## 1.

Wir beschränken uns der Deutlichkeit wegen auf den Fall, wo die Auflösung gewöhnlicher Differentialgleichungen dazu dienen soll, um die Bewegung materieller Punkte zu bestimmen. Diese Aufgabe schliesst ihrer Natur nach drei Bedingungen ein, dass nämlich 1) bei allen jene Bewegung unmittelbar bestimmenden Grössen imaginäre Aenderungen, 2) bei der Zeit und den Coordinaten unstetige Aenderungen, und 3) bei der Zeit alle Beschränkungen in der Zu- oder Abnahme ausgeschlossen bleiben.

Diese Bedingungen würden nicht besonders zu erwähnen sein, wenn sie mit den Differentialgleichungen der Bewegung niemals in Widerspruch kommen könnten. In Wirklichkeit sind aber diese letzteren nichts anderes, als Gleichungen zwischen unbekannten Grössen, von denen einzelne die Derivirten anderer sind. Sie enthalten also thatsächlich zwei von einander zu unterscheidende Bedingungen, von denen die eine darin besteht, dass die Werthe jener Grössen durch die Werthe der übrigen gegeben sind, die andere darin, dass sie überdies die Derivirten anderer sein sollen. So enthält z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{dx}{dt}\sin\alpha + x\cos\alpha\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{dx}{dt}\cos\alpha - x\sin\alpha\right)^2 = 1$$

gleichzeitig alle Bedingungen, welche durch die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{a^2}(y\sin\alpha + x\cos\alpha)^2 + \frac{1}{b^2}(y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 = 1, \quad y = \frac{dx}{dt}$$

ausgedrückt sind.

Da hiernach zwei von einander durchaus unabhängige Bestimmungen vorliegen, von denen jede das Zeichen von $y$ an die Zu- oder Abnahme von $x$ bindet, nämlich einerseits die ursprüngliche Gleichung zwischen den Grössen $x$ und $y$ selbst nebst den Stetigkeits-Bedingungen, andererseits die Gleichung $y = \frac{dx}{dt}$ nebst den Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen, so ist unmittelbar klar, dass Widersprüche zwischen sämmtlichen Bedingungen nicht immer unmöglich sind, und unter welchen Voraussetzungen sie eintreten müssen.

*Ein Widerspruch zwischen diesen sämmtlichen Bedingungen tritt stets und auch nur dann ein, wenn eine Differentialgleichung oder ein System solcher in irgend einem Augenblicke anfängt, das Zeichen der Derivirten einer Function in einer den Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen widersprechenden Weise zu bestimmen.* Von demselben Augenblicke an ist eine reelle und zugleich stetige Fortsetzung dieser Function nur möglich, wenn entweder eine zweite, sich dort stetig anschliessende, im Allgemeinen singuläre Lösung existirt, oder die Differentialgleichungen in einer entsprechenden Weise abgeändert werden. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn eine Function $x$ und die unabhängige Variable $t$ in Folge der Stetigkeitsbedingungen ihre Aenderungen im früheren Sinne fortsetzen müssen, aber zugleich $\frac{dx}{dt} = x'$ durch die Differentialgleichungen zu einem Zeichenwechsel gezwungen wird.

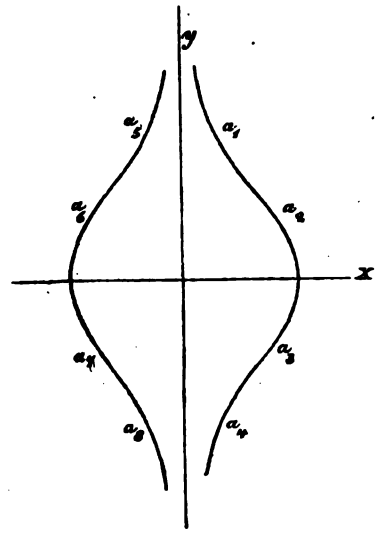
II. Wenn $x'$ ohne Unstetigkeit sein Zeichen nicht wechseln kann, aber $x$ bei stetigem $x'$ durch die Realitätsbedingungen verhindert ist, seine Aenderungen im früheren Sinne fortzusetzen.

Dieser zweite Fall tritt z. B. ein, wenn die Differentialgleichungen für $x$, als Function von $x'$ betrachtet, ein Maximum bei positivem, oder ein Minimum bei negativem $x'$ liefern, ohne dass den Bedingungen der Aufgabe durch eine besondere Lösung genügt werden kann, welche eine dem Zeichen von $x'$ entsprechende Fortsetzung von $x$ gestattet, z. B. in der Differentialgleichung $(x'-a)^2+x^2=a^2$ für $x'=a$, $x=a$. Hat $x$ von Null aus gehend diesen Werth erreicht, so kann es wegen des Zeichens von $x'$ nicht zu früheren Werthen zurückkehren, wegen des Werthes von $x'$ nicht bei dem Werthe $a$ beharren, und wegen der Differentialgleichung und der Realitätsbedingungen denselben nicht überschreiten.

*Bedeutet bei einem mechanischen Problem, welches diesen Fall zulässt, $x$ irgend eine Coordinate, $t$ die Zeit, also $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit welcher $x$ wächst, so reicht die Angabe der beschleunigenden Kräfte nebst den Anfangs-, Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen zur völligen Bestimmung der Bewegung nicht für alle Folgezeiten hin, sondern nur bis zu dem Augenblicke, wo jener Fall zum ersten Male eintritt. Von diesem Augenblicke an ist die stetige und zugleich reelle Fortsetzung von $x$ bei stetigem $\frac{dx}{dt}$ unmöglich, also, da die erstere wegen des unbeschränkten Wachsens von $t$ nothwendig ist, wird $\frac{dx}{dt}$ zu einer Unstetigkeit gezwungen, die jedoch vollkommen willkürlich ist, weil die bis zu jenem Augenblicke wirkenden Bedingungen keine Angabe über die Grösse derselben enthalten.*

Auch der erste Fall ist unter zwei verschiedenen Voraussetzungen möglich. Sind nämlich $x_0$, $t_0$ die Werthe von $x$ und $t$, für welche derselbe eintritt, so genügt man entweder von da ab den Bedingungen der Aufgabe durch eine, von der bis dahin gültigen verschiedene, aber bei $x=x_0$, $t=t_0$ sich stetig anschliessende Lösung, oder es hört, falls eine solche Lösung nicht existirt, wenigstens eine der Grössen $x$, $t$ auf, reell zu sein. In der That kann unter dieser Voraussetzung $x$, wenn $t$ den Werth $t_0$ überschreitet, weder $=x_0$ bleiben, weil dies eine von der früheren, ein veränderliches $x$ voraussetzenden, verschiedene Lösung wäre, noch kann es, ohne imaginär zu werden, $x_0$ überschreiten, weil hierbei $x'$ sein Zeichen ändern würde, während der dritte Fall,

dass es zu früheren Werthen zurückkehre, durch die Voraussetzungen des vorliegenden Falles ausgeschlossen ist.




Ein Beispiel dieser Art ist die Gleichung $x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - x^2$. Setzt man $\frac{dx}{dt} = y$, und betrachtet $x$ und $y$ als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so entspricht dieser Gleichung eine Curve von der nebenverzeichneten Gestalt, welche die $y$-Axe zweimal zur Asymptote hat.

Lässt man nun $x$ zwischen den Grenzen $-1$ und $1$ oscilliren, und verlangt, dass hierbei alle einzelnen Theile im Ausdrucke für $y$ sich mit $x$ nach der Stetigkeit ändern, wie es später zu beweisenden Sätzen zufolge bei der unbestimmten Integration vorstehender Differentialgleichung wirklich geschieht, so wird diese Curve durch den Punkt $x$, $y$ von $a_1$ aus in der Richtung $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_1, \ldots$ durchlaufen, indem $y$, so oft $x$ durch Null geht, von einem der Werthsgebiete $+\infty$ und $-\infty$ ins andere springt, um sich von da ab eine Zeit lang nach der Stetigkeit zu ändern.

Dies widerspricht jedoch auf der Seite der negativen $x$ der Bedingung, dass bei reellen Werthen aller Variabeln stets $y = \frac{dx}{dt}$ sei, indem auf dem Zweige $a_5$, $a_6$, bei abnehmendem $x$, $\frac{dx}{dt}$ positiv, auf dem Zweige $a_7$, $a_8$, bei wachsendem $x$, $\frac{dx}{dt}$ negativ sein würde. Wenn man daher aus obiger Differentialgleichung $x$ durch unbestimmte Integration ermittelt, und die willkürliche Constante der Bedingung gemäss wählt, dass der Punkt $x$, $y$ zur Zeit $t = 0$ von $a_1$ ausgehe, so kann diese Lösung reelle Werthe für $x$ bei reellem $t$ nur bis zu dem Augenblicke liefern, wo $x$ zum ersten Male $= 0$ wird.

## 2.

Die vorangehenden Grössenbestimmungen stützen sich ausdrücklich auf die Bedingung reeller Werthe aller Variabeln, und können ohne dieselben

nicht bestehen; sie begründen daher keine Schlüsse auf entsprechende Eigenschaften der durch die Differentialgleichungen bedingten analytischen Formen. Um auch für die letzteren die Folgerungen festzustellen, welche sich an die obigen Ausnahmefälle knüpfen, muss die Untersuchung bei unbeschränkten Variabeln durchgeführt werden. Der hierbei einzuschlagende Weg bestimmt sich durch den nachher zu beweisenden Satz, *dass der Uebergang von einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu seiner allgemeinen Lösung stets als durch unbestimmte Integration vollständiger Differentiale bewirkt angesehen werden kann.*

Während dieser unbestimmten Integrationen, welche man sich in der bekannten Weise als successive, die partiellen Differentiale der Reihe nach berücksichtigende zu denken hat, durchlaufen nun die unabhängigen Variabeln und die der Integration unterworfenen Functionen Werthenreihen, welche zwar unbestimmt gelassen sind, aber nichts desto weniger einer wesentlichen Einschränkung unterliegen.

In der That ist jedes Resultat der unbestimmten Integration, soweit dieser Begriff überhaupt reicht, ein Ausdruck $u$, der als solcher bei fester, übrigens willkürlicher unterer Begrenzung stetige Aenderungen nur mit der oberen Begrenzung zugleich erleidet, und den Ausdruck unter dem Integralzeichen zum Differential hat. Wenn daher der Ausdruck $u$ überhaupt vom Integrationswege, nicht bloss von seiner Begrenzung abhängt, so muss diese Abhängigkeit eine solche sein, dass eine stetige Aenderung des Integrationsweges bei fester Begrenzung entweder eine sprungweise Aenderung von $u$ zur Folge hat, oder, wo $u$ nicht unstetig ist, es ganz und gar ungeändert lässt.

In Folge dessen ist durch die unbestimmte Integration jeder Integrationsweg ausgeschlossen, an dem entlang die Werthe der unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke nicht allenthalben in der speciellen Weise auf einander folgen, wie sie sich bei der stetigen Fortsetzung der entsprechenden Functionen über complexe Werthsgebiete an einander fügen. Denn wenn derselbe eine angebbare Stelle enthielte, an welcher der durch die stetige Fortsetzung bestimmte analytische Verlauf einer von diesen Functionen unterbrochen ist, so würde man durch stetige Ortsänderung dieser Stelle dem Resultate der Integration stetige und von Null verschiedene Aenderungen ertheilen können.

Wenn daher in Folge anderweitiger Bedingungen in dem Augenblicke,

wo der Integrationsweg eine bestimmte Stelle überschreitet, bei einer von den der Integration unterworfenen Functionen der analytische Verlauf unterbrochen werden muss, so muss von diesem Augenblicke an das Resultat dieser Integration von dem der unbestimmten abweichen, da beide sich in verschiedener Weise ändern.

Wenn ein System $A$ von $n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen eben so viel gesuchten Functionen die Eigenschaft hat, dass sich aus ihm nicht sämmtliche Derivirten eliminiren lassen, so besteht seine allgemeine Lösung aus $n$ Gleichungen $B$ zwischen den gesuchten Functionen und $n$ willkürlichen Constanten, welche bekanntlich in Bezug auf die Functionen von einander unabhängig sind, und überdies, was für unseren Zweck ebenso wesentlich ist, dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die willkürlichen Constanten besitzen. Denn liessen diese sich aus $B$ eliminiren, so wäre das Eliminationsresultat entweder identisch, und dann bestände das System $B$ aus weniger als $n$ Gleichungen, oder dasselbe stellte sich dar als eine von den Gleichungen $A$ geforderte Relation, in der weder willkürliche Constanten noch Derivirten vorkommen können, und dann liessen sich aus $A$ alle Derivirten eliminiren, was der Voraussetzung zuwider ist.

Folglich ist durch die Gleichungen $B$ jede von den $n$ willkürlichen Constanten in völlig bestimmter Weise abhängig gemacht von der unabhängigen Veränderlichen und den ursprünglich gesuchten Functionen. Es giebt daher auch $n$ von einander unabhängige vollständige Differentiale, welche in Folge der Gleichungen $A$ gleich Null sein müssen, und von denen aus man durch unbestimmte Integration zu einem mit $B$ gleichbedeutenden System von Gleichungen gelangt. Folglich muss die allgemeine Lösung von $A$ wenigstens mittelbar als das Resultat unbestimmter Integrationen angesehen werden. Dasselbe gilt von der allgemeinen Lösung jedes beliebigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, da dasselbe, auf seine wirkliche Ordnung reducirt, (vergl. die Abhandlung von *Jacobi* im 64. Bande dieses Journals, Seite 297) als ein System $A$ dargestellt werden kann.

Hieraus ziehen wir nun den Schluss, *dass die allgemeine Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen bei mechanischen Problemen, weil sie dem Resultate unbestimmter Integrationen entspricht, nach Berücksichtigung der Anfangsbedingungen nur bis zu dem Augenblicke gültig ist, wo zum ersten Male einer Derivirten durch die Differentialgleichungen ein den Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen widersprechendes Vorzeichen angewiesen wird.*

Umgekehrt kann von den obigen Ausnahmefällen weder der eine, noch der andere eintreten, so lange die allgemeine Lösung bei reellen und stetigen Aenderungen der Variabeln jeder Function reelle, und wo das gefordert ist, zugleich stetige Aenderungen anweist, weil unter dieser Voraussetzung ein Widerspruch zwischen der Zu- oder Abnahme einer Function und dem Zeichen ihrer Derivirten unmöglich ist.

## 3.

Zum Schlusse will ich an einigen einfachen Beispielen nachweisen, wie in den obigen Ausnahmefällen die Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen zur Bestimmung der ferneren Bewegung verhelfen, und zu diesem Zwecke ein von mir vor längerer Zeit gefundenes Verfahren benutzen, welches, wenn auch auf eine specielle Gattung von Differentialgleichungen beschränkt, doch vorzugsweise geeignet ist, um die hier erörterten Verhältnisse zur Anschauung zu bringen. Dasselbe gewährt überdies bei einer grossen Zahl von Aufgaben der Mechanik ohne die geringste Mühe eine so vollständige Einsicht in den Verlauf der zu untersuchenden Erscheinung, wie sie durch die Rechnung nur selten, und stets nur auf Umwegen erreicht werden kann. Dasselbe besteht in Folgendem.

Ist eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1.) \quad f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

zu untersuchen, in welcher die unabhängige Variable $t$ nicht vorkommt, so betrachte man in einem System rechtwinkliger Coordinaten $x$ als die Abscisse zweier Punkte $m$ und $\mu$ zur Zeit $t$, von denen der erstere auf der Abscissenaxe beharrt, während die Ordinate $y$ des andern $= \frac{dx}{dt}$ ist. Während alsdann $m$ sich der Gleichung (1.) gemäss an der Abscissenaxe entlang fortbewegt, beschreibt der mit $m$ stets auf derselben Ordinate befindliche Hülfspunkt $\mu$ eine Curve, deren Gleichung

$$(2.) \quad f(x, y) = 0$$

ist, und welche die Geschwindigkeitscurve heissen soll.

Dies festgestellt, ist $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot y$; folglich wird die Geschwin-

digkeitscomponente von $\mu$ parallel zur $x$-Axe durch die Ordinate, parallel zur $y$-Axe durch die Subnormale der Geschwindigkeitscurve dargestellt. Die tangentiale Geschwindigkeit von $\mu$ ist hiernach gleich dem von $\mu$ bis zur $x$-Axe reichenden Stücke $N$ der Normale. Legt man die Richtungen der wachsenden $x$ und $y$ wie üblich nach rechts und oben, so bewegt sich $\mu$ wegen der Gleichung $\frac{dx}{dt} = y$ nach rechts oder links, je nachdem es sich über oder unter $m$ befindet.

Ist $\varrho$ der Krümmungshalbmesser der Geschwindigkeitscurve, $d\tau$ der Winkel, um den er sich während der Zeit $dt$ dreht, $ds$ das $d\tau$ gegenüberliegende Bogenelement, so ist $\varrho d\tau = ds$. Bezeichnet man daher die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Normale sich dreht, durch $\omega$, so folgt $\varrho\omega = \frac{ds}{dt}$, also

$$\omega = \frac{N}{\varrho}.$$

Betrachtet man $m$ als eine Masseneinheit, so wird die an $m$ wirkende beschleunigende Kraft $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$ durch die von $m$ selber ausgehende Subnormale dargestellt, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, stets auf derjenigen Seite von $m$, nach welcher sie diesen Punkt zieht.

Auf diese Weise ist die zu untersuchende Bewegung von $m$ auf die Bewegung des Hülfspunktes $\mu$ zurückgeführt, und die letztere augenfällig, solange $\mu$ sich ausserhalb der $x$-Axe befindet, weil in diesem Falle die Geschwindigkeit von $\mu$ und ihre Richtung sich aus der Gestalt der Geschwindigkeitscurve und der Lage von $\mu$ unmittelbar zu erkennen geben.

Wenn dagegen $\mu$ in die $x$-Axe einrückt, also $y = \frac{dx}{dt} = 0$ wird, so kommt $m$, welches jetzt mit $\mu$ zusammenfällt, dort für einen Augenblick zur Ruhe. Ob es in derselben verharren, oder seine Bewegung weiter fortsetzen muss, hängt davon ab, ob mit $\frac{dx}{dt}$ auch die andere Geschwindigkeitscomponente $\frac{dy}{dt} = y\frac{dy}{dx}$ von $\mu$ erlischt. Ist dies der Fall, ist z. B. der Winkel, unter welchem $\mu$ die $x$-Axe trifft, kein rechter, so geht $\mu$ und mit ihm $m$ in den Ruhezustand über Damit die Bewegung von $\mu$ nach seinem Eintritte in die $x$-Axe nicht erlösche, ist erforderlich, wenn auch nicht in allen Fällen hinreichend, dass dort $y\frac{dy}{dx}$ von Null verschieden bleibt. Was unter dieser

Voraussetzung stattfindet, hängt hauptsächlich davon ab, ob der Punkt, den die Geschwindigkeitscurve mit der $x$-Axe gemein hat, ein Rückkehrpunkt, ein Wendepunkt oder ein Punkt gewöhnlicher Biegung ist. Die verschiedenen hier möglichen Fälle lassen sich indessen stets so leicht erledigen, dass eine allgemeine Erörterung über dieselben überflüssig ist.

I. Sei die Bewegung von $m$ bestimmt durch die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{x^2}$, mit der Bedingung, dass für $t=1$, $x=1$ und $\frac{dx}{dt}=0$ sei, nebst allen aus dem Begriff der Bewegung folgenden Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen. Wir fügen noch hinzu, dass die Geschwindigkeit von $m$, ohne durch Null zu gehen, ihre Richtung nicht umkehren soll, was die Stetigkeitsbedingung für unendliche Werthe von $\frac{dx}{dt}$ vertritt.

Durch einmalige Integration findet sich die oben als Beispiel benutzte Gleichung $x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1-x^2$; also ist die Gleichung der Geschwindigkeitscurve $x^2y^2 = 1-x^2$. Dieselbe giebt für $y=0$, $x=\pm 1$, $y\frac{dy}{dx} = \mp 1$. Wenn daher der Punkt $\mu$ die $x$-Axe trifft, so geht er durch dieselbe hindurch mit der Geschwindigkeit 1. Da ferner $\mu$ sich unter der $x$-Axe nach links, über derselben nach rechts bewegt, so gelangt er, auf welchem Zweige er sich auch befinden mag, mit wachsender Geschwindigkeit und wachsender Ordinate auf die unendlich entfernten Theile dieses Zweiges. In demselben Augenblicke geht der mit $\mu$ fortwährend auf derselben Ordinate befindliche Punkt $m$ mit unendlich grosser Geschwindigkeit durch den Anfangspunkt, wodurch $\mu$ auf die benachbarten Theile des anderen Zweiges übergeführt wird. Da hiernach $\mu$ die Geschwindigkeitscurve unaufhörlich in derselben Richtung, und dieselbe Stelle jedesmal mit derselben Geschwindigkeit durchläuft, so ist seine Bewegung eine rein periodische. Folglich führt $m$ periodische Oscillationen zwischen den Abscissen $x=1$ und $x=-1$ aus. Da überdies die Geschwindigkeitscurve in Bezug auf die Coordinatenaxen symmetrisch ist, so sind auch die Viertelsschwingungen von $m$ symmetrisch. Die Dauer einer ganzen Schwingung ist demnach viermal so gross, wie die Zeit, deren $\mu$ bedarf, um einen Quadranten zu durchlaufen. Wegen $dt = \frac{dx}{y}$ ist die letztere $= \int_0^1 \frac{dx}{y}$ bei positivem $y$, also $= 1$. Die Dauer einer vollständigen Schwingung von $m$ beträgt also 4 Zeiteinheiten.

Durch Integration findet man mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen $x = \sqrt{t(2-t)}$, was nur von $t = 0$ bis $t = 2$ reell ist. An den Grenzen dieses Zeitraums wird $x = 0$, und hier tritt der Fall ein, dass, wenn $x$ seine reellen Aenderungen durch Null hindurch fortsetzt, der Ausdruck $\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}$ für $\frac{dx}{dt}$ bei stetiger Aenderung seiner einzelnen Theile das Zeichen wechselt, was die reelle und zugleich stetige Fortsetzung von $x$ und $t$ durch die Differentialgleichung selbst unmöglich macht.

II. Sei $\alpha$ eine reelle Zahl zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, und die Bewegung von $m$ bestimmt durch die Differentialgleichung $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\operatorname{cotg}\alpha^2}{x^3} + x = 0$; die übrigen Bedingungen sollen dieselben sein, wie im vorigen Beispiele.

Durch einmalige Integration erhält man $x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1-x^2)(\operatorname{cotg}\alpha^2 + x^2)$. Daraus ergiebt sich weiter durch unbestimmte Integration

$$t = \text{const.} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x^2}{\operatorname{cotg}\alpha^2 + x^2}},$$

und hieraus durch passende Bestimmung der Constanten nach einer kleinen Reduction $x^2 = \cos^2(1-t) - \operatorname{cotg}\alpha^2 \sin^2(1-t)$. Folglich hat $x$ die Periode $2\pi$. Da indessen, wie man sofort sieht, $x$ aus vorstehender Gleichung zu Anfange nur während des Zeitraums $1-\alpha < t < 1+\alpha$ reelle Werthe erlangt, so lassen sich aus der Periodicität des Ausdruckes für $x$ keine weiteren Schlüsse ziehen. An den Grenzen dieses Zeitraumes tritt derselbe Ausnahmefall wie im vorigen Beispiele ein.

Die Geschwindigkeitscurve, deren Gleichung $x^2y^2 = (1-x^2)(\operatorname{cotg}\alpha^2 + x^2)$ ist, hat eine ähnliche Gestalt, wie im vorigen Falle; wo sie die $x$-Axe schneidet, wird die Geschwindigkeit von $\mu$, abgesehen vom Zeichen, $= \frac{1}{\sin\alpha^2}$, also von Null verschieden. Folglich finden in Bezug auf die Bewegung von $\mu$ und $m$ auch die vorigen Schlüsse statt. Die Zeit, deren $\mu$ bedarf, um einen Quadranten zu durchlaufen, ergiebt sich aus dem obigen Ausdrucke für $t$ gleich $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$, da $\alpha$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Folglich führt $m$ periodische Oscillationen zwischen den Abscissen $x = 1$ und $x = -1$ aus, aber die Dauer einer ganzen Schwingung ist nicht $= 2\pi$, wie die allgemeine Lösung andeutet, sondern $= 4\alpha$.

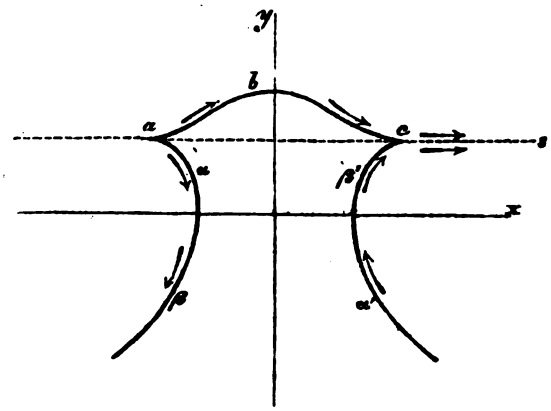
III. Sei die Bewegung des Punktes $m$ durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x\sqrt[3]{1-\frac{dx}{dt}}$$

und die hinzugehörigen Bedingungen bestimmt.

Diese Gleichung hat die singuläre Lösung $\frac{dx}{dt}=1$; durch Integration findet man dagegen $3\left(2\frac{dx}{dt}+3\right)\left(1-\frac{dx}{dt}\right)^{\frac{1}{3}} = 14-5x^2$, bei passender Wahl der Integrationsconstanten. Die letztere hat zur Folge, dass die Geschwindigkeitscurve, deren Gleichung $3(2y+3)(1-y)^{\frac{1}{3}} = 14-5x^2$ ist, nothwendig durch die Anfangslage von $\mu$ geht, d. h. $\mu$ seine Bewegung auf der Geschwindigkeitscurve beginnt. Es wird sich zeigen, dass $\mu$ nicht unter allen Umständen auf ihr verbleibt.

Was nun die Gestalt dieser Curve betrifft, so ist dieselbe zunächst symmetrisch in Bezug auf die $y$-Axe. Auf der Seite der positiven $x$ gehören zu jedem $x$ zwischen 1 und $\sqrt{1\frac{4}{5}}$ drei reelle $y$, von denen eines negativ ist, sonst nur ein einziges. Da $y\frac{dy}{dx} = x\sqrt[3]{1-y}$ für $x=1$, $y=0$ nicht verschwindet, so findet dort ein senkrechter Durchschnitt mit der $x$-Axe statt, welcher die Fortbewegung von $\mu$ nicht hindert. Für $y=1$, $x=\sqrt{1\frac{4}{5}}$ wird $\frac{dy}{dx}=0$, also hat die Curve dort eine Spitze $c$, in welcher ihre beiden dort von links her zusammentreffenden Zweige von der in der Figur punktirten Geraden $y=1$, welche der singulären Lösung entspricht, berührt werden. Endlich erlangt $y$ für $x=0$ ein Maximum.




Es sind hiernach in Betreff der anfänglichen Lage von $\mu$ drei Voraussetzungen möglich.

$\alpha$) Befand $\mu$ sich zu Anfange in $\alpha$ auf dem Zweige $\alpha\beta$, so bewegt es sich zunächst nach rechts, geht dann durch die $x$-Axe, und setzt von dort aus seine Bewegung über $\beta$ hinweg ohne Ende fort.

b) Befand $\mu$ sich zu Anfange auf dem Zweige $abc$, so bewegt es sich nach rechts bis $c$. Von dort kann es, weil die Ordinate in $c$ ihr Zeichen

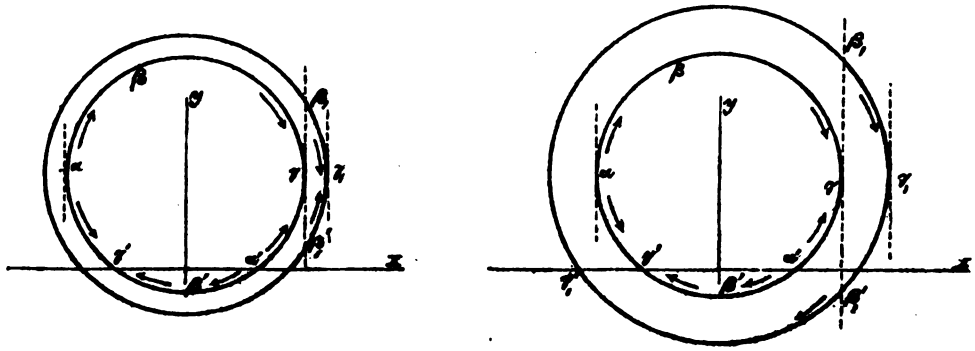
nicht wechselt, nicht nach links zurückkehren, während die Geschwindigkeitscurve sich von $c$ aus auch nicht weiter nach rechts fortsetzt. Folglich würde die stetige Fortbewegung von $m$ über die Abscisse $x = \sqrt{\frac{4}{5}}$ von $c$ hinaus ohne eine Unstetigkeit von $\frac{dx}{dt} = y$ nicht möglich sein, wenn nicht die in $c$ berührende Gerade $cs$ einen den ursprünglichen Bedingungen ebenfalls genügenden Ort für $\mu$ bildete. In $c$ angelangt, geht daher $\mu$ auf $cs$ über, und behält von da ab die Geschwindigkeit 1.

$\alpha'$) Befand endlich $\mu$ sich zu Anfange in $\alpha'$, so durchläuft es den Bogen $\alpha'\beta' c$, und geht dann auf $cs$ über.

Der Gang von $m$, oder der Verlauf von $x$ als Function von $t$, lässt sich hiernach leicht beurtheilen.

IV. Sei $h$ eine positive Constante, und die Bewegung von $m$ bestimmt durch die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{dt} - h\right)\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{dx}{dt} = 0$, die Anfangsbedingung, dass für $t = 0$, $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = y_0$ werde, und die hierzu gehörigen Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen.

Setzt man $(y_0 - h)^2 + x_0^2 = c^2$, so folgt $\left(\frac{dx}{dt} - h\right)^2 + x^2 = c^2$, und für die Gleichung der Geschwindigkeitscurve $(y - h)^2 + x^2 = c^2$. Dieselbe ist also ein Kreis $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ vom Halbmesser $c$, dessen Mittelpunkt in der Höhe $h$ über dem Coordinatenursprunge liegt. Wir wollen nun annehmen, $y_0$ und $x_0$ seien so gewählt, dass $c > h$ wird, die Durchschnittspunkte mit der $x$-Axe seien $\alpha'$ und $\gamma'$, und die beiden Punkte, in denen der Kreis von seinen Ordinaten berührt wird, $\alpha$ und $\gamma$. Dann sind in Bezug auf die anfängliche Lage von $\mu$ vier Voraussetzungen möglich.



$\alpha$) Befand $\mu$ sich anfangs zwischen $\alpha$ und $\gamma'$, so bewegt es sich mit abnehmender Geschwindigkeit nach dem Durchschnitte $\gamma'$ mit der $x$-Axe, wo es zur Ruhe kommt.

$\beta'$) Befand $\mu$ sich zu Anfange auf dem Bogen $\alpha'\beta'\gamma'$, so bewegt es sich nach links, und kommt wieder in $\gamma'$ zur Ruhe.

$\beta$) Befand $\mu$ sich zu Anfange auf einem der Bogen $\alpha\beta\gamma$ oder $\alpha'\gamma$, so bewegt es sich in beiden Fällen nach rechts, bis es den Punkt $\gamma$ erreicht, wobei $m$ die Geschwindigkeit $k$ erlangt. Von dort kann $\mu$ nicht nach links zurückkehren, weil die Ordinate $y = \frac{dx}{dt}$ ihr Zeichen nicht wechselt, und nicht weiter nach rechts gehen, da die Geschwindigkeitscurve sich in dieser Richtung nicht fortsetzt, und ausser der Gleichung des obigen Kreises keine andere Lösung existirt, welche den vorliegenden Bedingungen Genüge leistet.

Folglich ist zur stetigen und zugleich reellen Fortsetzung von $x$ und $t$ in dem Augenblicke, wo $\mu$ in $\gamma$ anlangt, eine plötzliche, übrigens willkürliche Aenderung von $\frac{dx}{dt} = y$ erforderlich.

Sei also $y_1$ der Werth, auf den $\frac{dx}{dt}$ von $k$ aus in dem Augenblicke springt, wo $x = c$ wird; dann folgt aus der ursprünglichen Differentialgleichung, wenn $(y_1 - k)^2 + c^2 = c_1^2$ gesetzt wird, $(y - k)^2 + x^2 = c_1^2$; also wird der neue Zweig der Geschwindigkeitscurve ein mit dem vorigen concentrischer Kreis, dessen Halbmesser $c_1 > c$ ist.

Je nach dem Werthe von $y_1$ springt nun der, an keine stetige Ortsänderung gebundene Hülfspunkt $\mu$, nachdem er in $\gamma$ angelangt ist, nach $\beta_1$ oder $\beta_1'$. Liegt ausser $\beta_1$ auch noch $\beta_1'$ über der $x$-Axe (Figur links), so wiederholt sich der vorige Fall, indem nun $\mu$ sowohl von $\beta_1$ wie von $\beta_1'$ aus nach dem in gleicher Höhe mit $\gamma$ liegenden Punkte $\gamma_1$ rückt, also eine neue Unstetigkeit von $\frac{dx}{dt}$ erforderlich wird, die zu einem neuen Kreise mit vergrössertem Halbmesser führt. Liegt $\beta_1'$ unter der $x$-Axe, und springt $\mu$ von $\gamma$ nach $\beta_1'$, so rückt es von dort nach $\gamma_1'$ (Figur rechts), wo es zur Ruhe kommt.

Die Bewegung von $m$ oder der Verlauf von $x$ als Function von $t$ bedarf hiernach keiner weiteren Erörterung.

Weitere geeignete Beispiele zur Anwendung des vorliegenden Ver-

fahrens, welche allerdings nicht auf die hier behandelten Ausnahmefälle führen, liefert die Lehre vom konischen Pendel, von der Drehung eines Körpers um seinen Schwerpunkt und von der Bewegung eines schweren Punktes auf einer beliebig gegebenen Curve. Alle diese Anwendungen sind jedoch so einfach, dass es nicht nöthig ist, hier darauf näher einzugehen.

Zürich, 5. Januar 1866.

# Ein Uebertragungsprincip.

(Von Herrn *O. Hesse* in Heidelberg.)

Man kann nicht jedem Punkte in der Ebene einen durch ihn bestimmten Punkt in einer geraden Linie der Art entsprechen lassen, dass auch umgekehrt jedem Punkte in der geraden Linie ein einziger Punkt in der Ebene entspricht. Die Ebene enthält eben das Quadrat von Punkten in der geraden Linie.

Hiernach scheint es unmöglich die Geometrie in der Ebene auf die Geometrie in einer geraden Linie zurückzuführen.

Die Möglichkeit leuchtet aber sofort ein, wenn man bedenkt, dass die Ebene gerade so viel verschiedene Punkte enthält, als die gerade Linie verschiedene Punktepaare.

Lässt man demnach jedem Punkte in der Ebene ein Punktepaar in der geraden Linie und umgekehrt jedem Punktepaare in der geraden Linie einen Punkt in der Ebene in unzweideutiger Weise entsprechen, so hat man ein Uebertragungsprincip, welches die Geometrie in der Ebene zurückführt auf die Geometrie in der geraden Linie und umgekehrt.

In ähnlicher Weise lässt sich auch die Raumgeometrie zurückführen auf die Geometrie in einer geraden Linie, selbst die Geometrie von mehr als drei Dimensionen. Hier würde es sich aber nicht um Punktepaare in der geraden Linie, sondern um Systeme von drei oder mehreren Punkten in der geraden Linie handeln.

Sieht man jedoch ab von den angedeuteten Erweiterungen des Uebertragungsprincipes, so kommt es darauf an den Modus festzustellen, nach welchem die Uebertragung einer ebenen Figur in eine ihr entsprechende Figur auf einer geraden Linie und umgekehrt vor sich gehen muss.

Es liegen zwei Systeme vor, das eine in der Ebene, das andere auf einer geraden Linie, der *Fundamentallinie*. Ein Punkt $xy$ in der Ebene sei durch seine rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$ bestimmt, ein Punkt $\lambda$ auf der Fundamentallinie werde bestimmt durch seinen Abstand $\lambda$ von einem beliebig gewähltem aber festen Punkte auf der Fundamentallinie. Soll nun der Punkt $\lambda$ einer von den beiden Punkten der Fundamentallinie sein, welche dem Punkte $xy$ in der Ebene entsprechen, so muss die Grösse $\lambda$ eine Function

der beiden Grössen $x$ und $y$ sein. Das heisst, die drei Grössen $\lambda$, $x$, $y$ müssen durch eine Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$ mit einander verbunden sein. Da aber jeder Punkt der Ebene einem Punktepaare in der Fundamentallinie entsprechen soll, so muss jene Gleichung eine quadratische in $\lambda$ sein.

Andererseits soll einem gegebenen Punktepaare $\lambda_0$, $\lambda_1$ in der Fundamentallinie der Voraussetzung nach ein einziger Punkt $xy$ in der Ebene entsprechen. Das will sagen, dass die beiden Gleichungen $\varphi(\lambda_0, x, y) = 0$, $\varphi(\lambda_1, x, y) = 0$ nur eine Auflösung für die Unbekannten $x$, $y$ zu lassen, dass die Gleichungen linear seien in Rücksicht auf die Unbekannten.

Hierdurch ist der Modus der Uebertragung analytisch festgestellt. Die Uebertragung wird vermittelt durch die Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$, welche in $\lambda$ quadratisch in $x$ und $y$ aber linear ist, also durch eine Gleichung von der Form:

$$(1.) \qquad A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

wenn man unter $A$, $B$, $C$ beliebig gegebene lineare Functionen von $x$ und $y$ versteht. Man sieht, dass diese Gleichung alles leistet, was das ausgesprochene Princip verlangt. Jedem Punkte in der Ebene entspricht ein Punktepaar in der Fundamentallinie und umgekehrt entspricht jedem Punktepaare in der Fundamentallinie ein Punkt in der Ebene.

Um das vorgelegte Princip fruchtbar zu machen, bedarf es solcher Fundamentalsätze, welche die einfachsten Figurenverhältnisse der beiden Systeme auf einander übertragen lehren.

Das einfachste Figurenverhältniss in der Ebene besteht darin, dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Die Coordinaten dieser Punkte seien $x_0y_0$, $x_1y_1$, $x_2y_2$, und $A_0B_0C_0$, $A_1B_1$, . . . die Ausdrücke, in welche $ABC$ übergehen, wenn man für die Coordinaten in ihnen nach einander setzt die Coordinaten der drei Punkte. Alsdann ist die analytische Bedingung, unter welcher die drei Punkte in einer geraden Linie liegen, die, dass man drei Factoren $\mu_0\mu_1\mu_2$ finden kann, welche den drei Gleichungen zugleich genügen:

$$\mu_0A_0 + \mu_1A_1 + \mu_2A_2 = 0, \quad \mu_0B_0 + \mu_1B_1 + \mu_2B_2 = 0, \quad \mu_0C_0 + \mu_1C_1 + \mu_2C_2 = 0.$$

Den drei Punkten in der Ebene entsprechen drei Punktepaare in der Fundamentallinie, deren Gleichungen sind:

$$A_0\lambda^2 + B_0\lambda + C_0 = 0, \quad A_1\lambda^2 + B_1\lambda + C_1 = 0, \quad A_2\lambda^2 + B_2\lambda + C_2 = 0.$$

Man sieht, dass diese Gleichungen nach einander mit den Factoren $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$ multiplicirt und addirt identisch 0 geben. Das ist aber gerade die Bedingung,

dass die drei Punktepaare eine Involution bilden. Daraus entspringt nun der Fundamentalsatz:

*Irgend drei Punkten in einer und derselben geraden Linie der Ebene entsprechen drei Punktepaare der Involution in der Fundamentallinie. Jeden drei Punktepaaren der Involution in der Fundamentallinie entsprechen in der Ebene drei Punkte, welche auf einer geraden Linie liegen.*

Es ist damit für das einfachste Figurenverhältniss in der Ebene der Ausdruck der entsprechenden Figur in der Fundamentallinie gefunden. Suchen wir ebenso umgekehrt das einfachste Figurenverhältniss in der Fundamentallinie auszudrücken für die Ebene.

In der Fundamentallinie liegen Punktepaare der verschiedensten Art vor. Jedem derselben entspricht ein Punkt in der Ebene. Unter diesen Punktepaaren giebt es solche, welche zusammenfallen, *Doppelpunkte*. Man kann die Fundamentallinie betrachten als zusammengesetzt aus lauter Doppelpunkten und wird die Frage erheben, welches das entsprechende Bild in der Ebene sei für alle Doppelpunkte.

Das Punktepaar (1.) auf der Fundamentallinie wird ein Doppelpunkt, wenn die Wurzeln der Gleichung (1.) einander gleich sind, das heisst unter der Bedingung:

$$(2.) \qquad B^2 - 4AC = 0.$$

Diese Bedingungsgleichung ist aber für die Ebene der analytische Ausdruck eines Kegelschnitts. Man hat demnach den Satz:

*Alle Doppelpunkte in der Fundamentallinie entsprechen in der Ebene Punkten eines und desselben Kegelschnittes und alle Punkte dieses Kegelschnittes entsprechen Doppelpunkten in der Fundamentallinie.*

Der Kegelschnitt (2.) hängt von den neun Constanten ab, welche in seine Gleichung eingehen. Er kann deshalb jeder beliebige Kegelschnitt sein. Beachtet man nun, dass dieser Kegelschnitt die Grenze bildet für diejenigen Punkte $xy$ in der Ebene, welchen reelle oder imaginäre Wurzeln $\lambda$ der quadratischen Gleichung (1.) entsprechen, das heisst, reellen oder imaginären Punktepaaren in der Fundamentallinie, so sieht man, dass es frei steht diese Grenze beliebig zu verengen oder zu erweitern.

Der Kegelschnitt (2.), die *Directrix*, spielt bei der Uebertragung der ebenen Figur in die Linearfigur und umgekehrt eine wichtige Rolle.

Geht man nämlich von irgend zwei Punktepaaren der Fundamentallinie aus, welchen zwei Punkte $a$, $b$ der Ebene entprechen werden, und

construirt auf der Fundamentallinie alle möglichen Punktepaare, von welchen jedes eine Involution bildet mit den beiden Punktepaaren, so entsprechen diesen in der Ebene alle möglichen Punkte, welche auf der geraden Linie *ab* liegen. Unter den auf der Fundamentallinie construirten Punktepaaren giebt es aber bekanntlich zwei Doppelpunkte und diese als ein einfaches Punktepaaar betrachtet sind harmonisch mit jedem der construirten Punktepaare. Die den beiden Doppelpunkten entsprechenden Punkte in der Ebene liegen nach dem letzten Satze in der Directrix. Da sie aber auch auf der geraden Linie *ab* liegen, so sind sie die Schnittpunkte der geraden Linie und der Directrix. Man kann deshalb sagen:

*Jeden drei Punkten auf einer geraden Linie in der Ebene entsprechen auf der Fundamentallinie drei Punktepaare der Involution. Construirt man dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist, mit jedem der drei Punktepaare der Involution und betrachtet jeden Punkt des construirten Paares als einen Doppelpunkt, so entspricht das Doppelpunktepaar auf der Fundamentallinie in der Ebene dem Schnittpunktepaar der geraden Linie und der Directrix.*

Auf diese Art entsprechen den Punkten auf irgend einer Tangente der Direktrix alle Punktepaare auf der Fundamentallinie, von welchen der eine Punkt der Paare unverändert bleibt, nämlich der Punkt, welcher als Doppelpunkt betrachtet dem Berührungspunkte entspricht.

So entsprechen ferner irgend zwei Punkten der Directrix zwei Doppelpunkte in der Fundamentallinie. Dem Pole der geraden Linie, welche jene beiden Punkte der Directrix verbindet, entspricht das Doppelpunktepaar auf der Fundamentallinie, wenn man jeden Doppelpunkt für einen einfachen Punkt nimmt.

So kann man endlich auch alle Sätze bezüglich eines Kegelschnittes, der Directrix hier, leicht umwandeln in Sätze der Geometrie der geraden Linie. Vereinzelte Beispiele dazu findet man in meinen Vorlesungen aus der analytischen Geometrie, Leipzig. *Teubner* 1865, pag. 76 und in diesem Journal Band 63 pag. 184.

Sehr viel complicirter wird die Uebertragung, wenn der Kegelschnitt in der Ebene nicht mehr die Directrix sein soll. Man wird sie aber um so lieber aufnehmen, als sie auf neue Gesichtspunkte führt, die im Folgenden nur flüchtig angedeutet werden sollen.

Zu diesem Zwecke drücken wir den ersten oben angegebenen Fundamentalsatz analytisch also aus:

Sollen Punkte in der Ebene auf einer geraden Linie liegen, so müssen ihre Coordinaten einer linearen Bedingungsgleichung genügen:

$$Aa+Bb+Cc = 0.$$

Derselben linearen Bedingungsgleichung müssen die Coefficienten $A, B, C$ in der Gleichung (1.) genügen, wenn die Gleichung (1.) Punktepaare auf der Fundamentallinie darstellen soll, deren entsprechende Punkte in der Ebene auf der geraden Linie liegen.

Den angegebenen Satz erweitern wir nun, wenn wir sagen:

*Sollen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, so müssen ihre Coordinaten $x$, $y$ einer homogenen Gleichung von der zweiten Ordnung der Variabeln $A$, $B$, $C$ genügen:*

$$f(A, B, C) = 0.$$

*Derselben Gleichung der zweiten Ordnung müssen die Coefficienten $A$, $B$, $C$ in der Gleichung* (1.) *genügen, wenn die Gleichung* (1.) *Punktepaare auf der Fundamentallinie darstellen soll, deren entsprechende Punkte in der Ebene auf dem Kegelschnitt liegen.*

Fünf beliebig in der Ebene gewählte Punkte bestimmen den Kegelschnitt unzweideutig, der durch sie geht, ein sechster Punkt des Kegelschnittes ist nur unvollständig durch die beliebig gewählten Punkte bestimmt. Demnach können umgekehrt auf der Fundamentallinie fünf Punktepaare beliebig gewählt werden, wenn sie in der Ebene Punkten entsprechen sollen, durch welche ein Kegelschnitt geht. Ein sechstes Punktepaar auf der Fundamentallinie, welches in der Ebene einem Punkte des genannten Kegelschnittes entsprechen soll, ist einer Beschränkung unterworfen. Der eine Punkt des Paares kann immer noch willkürlich auf der Fundamentallinie gewählt werden, der andere ist durch ihn bestimmt, aber nicht unzweideutig. Bestimmt man ihn, so liegen auf der Fundamentallinie sechs Punktepaare vor, welchen in der Ebene sechs Punkte eines Kegelschnitts entsprechen.

Diese sechs Punktepaare auf der Fundamentallinie, welchen sechs Punkte in der Ebene entsprechen, verlangen einen Namen. Sie sollen heissen *sechs Punktepaare der Involution der zweiten Ordnung.* Dieser Name ist bezeichnend. Denn wenn von den sechs Punktepaaren der Involution zweiter Ordnung drei Punktepaare eine einfache Involution bilden, so bilden die drei anderen ebenfalls eine einfache Involution.

Auf Grund der angegebenen Definition hat man nun den Fundamentalsatz:

***Irgend sechs Punktepaaren der Involution zweiter Ordnung auf der Fundamentallinie entsprechen in der Ebene sechs Punkte eines Kegelschnittes und umgekehrt entsprechen sechs Punkten eines Kegelschnittes sechs Punktepaare der Involution zweiter Ordnung auf der Fundamentallinie.***

Nach der Analogie bei der einfachen Involution ergiebt sich hier die entsprechende Aufgabe:

Wenn von sechs Punktepaaren der Involution zweiter Ordnung elf Punkte beliebig gegeben sind, den zwölften Punkt zu bestimmen.

Eine einfache analytische Betrachtung lehrt, dass die Aufgabe zwei Auflösungen zulässt, dass man den gesuchten zwölften Punkt beliebig unter zwei ganz bestimmten Punkten zu wählen hat. Es soll dieses hier geometrisch nachgewiesen werden.

Durch fünf von den sechs Punktepaaren der Involution der zweiten Ordnung ist der Kegelschnitt in der Ebene bestimmt, der durch die, den fünf Punktepaaren entsprechenden, Punkte der Ebene geht. Von dem sechsten Punktepaare soll nur der eine Punkt gegeben sein. Dieser, als Doppelpunkt betrachtet, entspricht einem bestimmten Punkte der Directrix. Allen Punktepaaren auf der Fundamentallinie, von welchen der eine unverändert der gegebene Punkt ist, entsprechen in der Ebene Punkte auf der Tangente der Directrix und dem Doppelpunkte der Berührungspunkt. Die erwähnte Tangente der Directrix schneidet aber den Kegelschnitt in zwei Punkten und jeder dieser Schnittpunkte wird einem Punktepaare auf der Fundamentallinie entsprechen, von welchem der eine Punkt unverändert der gegebene Punkt bleibt. Die beiden anderen Punkte der beiden Paare werden aber verschieden sein, und jeder derselben für den zwölften Punkt der Involution zweiter Ordnung genommen werden können.

Indem wir hiermit abbrechen, sei noch erwähnt, dass man auch jede gerade Linie in der Ebene einem Punktepaare auf der Fundamentallinie eindeutig entsprechen lassen kann. Man würde dann die Coefficienten $A, B, C$ in der Gleichung (1.) als lineare Ausdrücke der Liniencoordinaten zu nehmen haben. Das sich daraus ergebende Uebertragungsprincip wird aber schon ersetzt durch das Princip der Reciprocität.

Das entwickelte Uebertragungsprincip giebt Gelegenheit eine grosse Zahl von neuen Sätzen aus der Geometrie der geraden Linie zu entdecken. Diese Sätze nicht allein direct zu beweisen, sondern Beweismethoden zu erfinden, welche die Sätze gleichsam als selbstverständlich er-

scheinen lassen — solche Methoden giebt es — ist eine empfehlenswerthe Aufgabe.

Mit der Lösung der Aufgabe kann man die breitere Basis der Ebene verlassen und sich auf die gerade Linie beschränken, ohne die Herrschaft über die Ebene aufzugeben. Die gerade Linie wird dann gleichsam als Telegraphenbureau dienen, auf dem man alle Zustände in der Ebene erfahren und neue Combinationen in ihr anordnen kann.

Heidelberg, Nov. 1865.

# Recherches sur les polyèdres.

(Par M. *Camille Jordan* à Châlon s. Saône.)

Enoncé du problème.

Considérons un polyèdre fermé quelconque, que nous supposerons d'abord convexe. On pourra distinguer dans les plans infiniment minces qui le limitent un côté intérieur et un côté extérieur.

Soit *M* un sommet de ce polyèdre, *MN* une de ses arêtes. Un observateur placé en *M* sur la surface extérieure du polyèdre et regardant dans la direction *MN*, verra les arêtes faces et sommets divers s'enchainer les uns aux autres suivant un certain ordre que j'appellerai, pour abréger, *l'aspect* du polyèdre relativement à l'arête *MN* et au sommet *M*.

Cette définition un peu vague peut être précisée de la manière suivante.

Supposons l'observateur situé sur l'arête *MN* en un point très-voisin de *M*: supposons qu'il se mette alors à tourner dans le sens direct (c'est à dire en laissant à sa droite l'intérieur du petit contour qu'il décrit) autour du point *M*, en restant toujours sur la surface extérieure du polyèdre. Il traversera successivement une série de faces $\mu$, $\nu$, $\pi$ etc. ... auxquelles il donnera la série des numéros successifs 1, 2, 3 etc. .... Il numérotera de même les arêtes *MN*, *MP*, etc. ... dans l'ordre où il les rencontre. Quant aux sommets, l'origine *M* portera le n° 1 et les extrémités des arêtes *MN*, *MP*, ... recevront successivement les n$^{os}$ 2, 3, etc. ....

Cela fait, l'observateur se transportera sur l'arête *MN* dans les environs du point *N* et se mettra à décrire sur la surface extérieure du polyèdre et dans le sens direct un petit contour autour de *N*. Les faces qu'il traversera et qui ne sont pas encore numérotées recevront des numéros à la suite des précédents. De même pour les arêtes nouvelles, dans l'ordre où on les traverse. A mesure qu'on numérote une arête nouvelle, on numérote également son extrémité.

On se transportera ensuite au point *P* où l'on opérera de même: et l'on continuera ainsi en se transportant successivement auprès des divers sommets *S* dans l'ordre où ils sont inscrits, sur celle des arêtes déjà numérotées et passant par ce sommet dont le numéro d'ordre est le moindre. A mesure qu'on traverse une face ou une arête nouvelle, on la numérote à la

suite: on numérote aussi les sommets qui sont à l'extrémité de ces arêtes nouvelles, lorsqu'ils n'ont pas été déjà enregistrés.

En opérant de la sorte, on évite toute ambiguité et l'aspect du polyèdre pourra être ainsi défini: *La relation entre le numéro d'ordre de chaque arête, ceux de ses deux extrémités et ceux des deux faces qu'elle borde,* telle qu'elle est donnée par le tableau comparatif qu'on en dresserait.

En général on peut prendre pour première arête une quelconque de celles du polyèdre, et pour premier sommet l'une ou l'autre de ses deux extrémités; un même polyèdre sera donc susceptible de $2A$ aspects différents, $A$ étant le nombre des arêtes.

Si l'on supposait l'observateur se mouvant non plus sur la surface extérieure, mais sur la surface intérieure du polyèdre, on aurait de nouveaux aspects, qui seront évidemment les mêmes que si l'observateur se mouvait sur la surface externe, mais dans le sens rétrograde. Ces nouveaux aspects, auxquels nous donnerons en conséquence le nom *d'aspects rétrogrades,* seront en nombre $2A$ comme les précédents, auxquels nous donnerons le nom *d'aspects directs.*

Ces considérations s'étendent sans difficulté à un polyèdre quelconque: car l'ensemble des plans infiniment minces qui le limitent offrira toujours deux côtés nettement distincts. On doit observer seulement que les faces peuvent s'enchevêtrer de telle façon que celui de ces côtés qui est externe dans une région devienne interne dans une autre: dans ce cas, on pourra choisir arbitrairement ceux des aspects qu'on considérera comme directs ou comme rétrogrades. Une difficulté pourrait se présenter, qui doit être signalée. Plusieurs nappes d'un même polyèdre peuvent se toucher en un même sommet, de la même manière que les nappes d'un cône se réunissent en son sommet. Dans ce cas l'ordre de succession des faces autour de ce sommet, bien déterminé sur chaque nappe, cesse de l'être quand on compare les deux nappes entre elles. Nous laisserons de côté ces cas singuliers pour éviter toute complication.

Il peut se faire que les $4A$ aspects du polyèdre ne soient pas tous différents, de sorte qu'il se présente d'une façon identique sous divers points de vue. De là un genre nouveau de symétrie, dépendant de la théorie de l'ordre, et plus général que la symétrie ordinaire de superposition, puisque il ne s'agit ici que de la disposition relative des sommets, arêtes et faces, et nullement de leurs grandeurs. C'est cette symétrie que je me propose d'étudier.

Deux questions se présentent ici:

1°. Dans quelles circonstances plusieurs aspects directs d'un même polyèdre sont-ils semblables entre eux?

2°. Dans quelles circonstances un aspect rétrograde est-il semblable à d'autres aspects, soit rétrogrades, soit directs?

La première de ces deux questions est traitée dans un cas fort étendu dans le mémoire actuel. La seconde fera l'objet d'un nouveau travail.

## I.

## Propositions préliminaires.

Nous désignerons sous le nom de *lignes tracées sur la surface d'un polyèdre* toute ligne brisée continue formée d'une suite d'arêtes consécutives.

La *longueur* d'une semblable ligne sera le nombre des arêtes qu'elle contient.

Toute ligne aussi courte que possible, menée entre deux sommets donnés, se nommera une *ligne géodésique*. La longueur de cette ligne mesure la *distance* des deux sommets donnés.

Il est clair qu'une partie quelconque d'une ligne géodésique sera elle-même géodésique.

Soient $L$, $L_1$, $L_2$ une série de lignes divergeant d'un même sommet $S$. Nous appellerons en général *ordre de succession* de ces lignes *autour du point* $S$ l'ordre suivant lequel elles sont traversées par un observateur décrivant autour du point $S$ un contour très-petit dans le sens direct, et sur la surface extérieure du polyèdre.

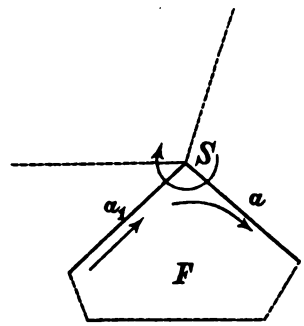
Il peut se faire que quelques unes de ces lignes aient leurs premières arêtes communes, auquel cas la définition précédente ne suffirait pas pour établir entre elles un ordre bien caractérisé. Soient $STU$, $STV$ deux semblables lignes, ayant un tronçon commun $ST$: nous conviendrons de considérer ces lignes non comme entièrement confondues mais comme juxtaposées dans leur partie commune et de telle manière qu'un observateur tournant autour du point $S$ et traversant $ST$ rencontre la ligne $STU$ avant la ligne $STV$, si la ligne $STU$ est celle dont un observateur situé près de $T$ sur $TS$ et tournant dans le sens direct autour de $T$ rencontre d'abord le prolongement.

Nous dirons que deux lignes données $ASA$, $A'SB'$, se *coupent* ou se *traversent* en un sommet $S$, si un observateur tournant autour de ce sommet, voit se succéder alternativement des tronçons de ces deux lignes.

*L'ordre de succession autour d'une face* des arêtes qui la bordent sera défini par l'ordre suivant lequel les rencontre un observateur parcourant le contour de cette face dans le sens direct, (c'est à dire en laissant cette face à sa droite).

Proposition I. *Soient S un sommet quelconque: a, $a_1$ deux arêtes, consécutives parmi celles qui y aboutissent: F la face comprise entre elles deux: l'arête $a_1$, succédant immédiatement à a autour de S, a succédera réciproquement à $a_1$ autour de F.*

Cela résulte immédiatement de l'inspection de la figure ci-jointe.




Deux polyèdres seront dits *pareils*, si en choisissant convenablement dans chacun d'eux un premier sommet et une première arête, on peut faire en sorte qu'ils présentent un aspect semblable. Si dans chacun des deux polyèdres nous numérotons les faces, arêtes et sommets ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, nous appellerons faces, arêtes et sommets *homologues* ceux qui portent le même numéro dans les deux polyèdres.

Semblablement, si A et A′ sont deux aspects semblables d'un même polyèdre, *a* un sommet, face ou arête quelconque, *a′* le sommet, face ou arête qui porte sous l'aspect A′ le même numéro que *a* porte sous l'aspect A, nous dirons que *a* a pour homologue *a′ relativement aux aspects* A et A′. Deux lignes ou régions quelconques du polyèdre seront *homologues*, si les sommets, faces et arêtes de l'une sont respectivement homologues de ceux de l'autre.

Enfin nous dirons que deux faces, arêtes, sommets, lignes ou régions quelconques d'un même polyèdre sont *pareils*, ou *de même espèce*, s'il existe deux aspects semblables relativement auxquels l'un soit l'homologue de l'autre.

Il est clair que deux lignes ou régions pareilles *R*, *R′* contiennent le même nombre de faces, arêtes et sommets.

Proposition 2. *Soient a, b deux sommets, joints par une ligne géodésique Δ: a′, b′, Δ′ leurs homologues respectifs par rapport à deux aspects semblables* A *et* A′: *Δ′ sera géodésique, et la distance de a′ à b′ sera la même que celle de a à b.*

Car *Δ′* a la même longueur que *Δ* d'après ce qui précède: et s'il existait une ligne plus courte *L′* entre *a′* et *b′*, cette ligne serait l'homologue d'une ligne *L* joignant *a* à *b* et plus courte que *Δ*, ce qui est absurde.

Proposition 3. *Soient $P$, $P'$ deux polyèdres pareils, $S$, $S'$ des faces ou sommets homologues quelconques: $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ les arêtes qui se succèdent autour de $S$; $a'_1$, $a'_2$, ... $a'_m$ leurs homologues: elles se succèdent autour de $S'$ dans le même ordre que $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ autour de $S$.*

*Si la proposition est vraie pour un sommet $S$, elle l'est pour toute face $T$ qui y aboutit:* soient en effet $a_1$, $a_2$ les deux arêtes de $T$ qui aboutissent en $S$, $a_3$, ... $a_m$ les autres arêtes du contour de $T$, toutes ces arêtes étant supposées se succéder dans l'ordre $a_1$, $a_2$, ... $a_m$. Soient $S'$, $T'$, $a'_1$, $a'_2$ les homologues respectives de $S$, $T$, $a_1$, $a_2$.

L'arête $a_2$ succède à $a_1$ autour de $T$: elle précédera donc $a_1$ autour de $S$ (proposition 1). Les arêtes homologues $a'_1$, $a'_2$ bordent $T'$ et aboutissent en $S'$: par hypothèse $a'_2$ précédera $a'_1$ autour de ce dernier point. Donc $a'_2$ succédera à $a'_1$ sur le contour de $T'$. L'arête suivante $a'_3$ sera l'homologue de $a_3$: car $a_3$ bordant $T$ et ayant un sommet commun avec $a_2$, son homologue $x$ devra border $T'$ et avoir une extrémité commune avec $a'_2$, homologue de $a_2$: ce ne peut donc être que l'une des deux arêtes de $T'$ contigues à $a'_2$, $a'_1$ ou $a'_3$: mais $a'_1$ est l'homologue de $a_1$: ce sera donc nécessairement $a'_3$. De même $a_4$ aura pour homologue $a_4$ etc.

On voit de même que *si la proposition est vraie pour une face $T$, elle l'est pour tout sommet $S$ situé sur elle.*

Si donc notre proposition est vraie pour un sommet donné, elle est toujours vraie: car on pourra l'établir de proche en proche 1° pour les faces qui passent à ce sommet, 2° pour les sommets situés sur ces faces, 3° pour les faces qui passent à ces sommets, etc....

Or soient $S$ et $a_1$ d'une part, $S'$ et $a'_1$ de l'autre, les sommets et arêtes par rapport auxquels les deux polyèdres jouissent d'un aspect semblable. La proposition sera aisée à démontrer pour $S$ et $S'$. Soient en effet $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ les arêtes successives qui aboutissent en $S$, $a'_1$, $a'_2$, ... $a'_m$ leurs homologues qui aboutissent en $S'$. Les arêtes $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ portent respectivement les numéros 1, 2, ... $m$: leurs homologues $a'_1$, $a'_2$, ... $a'_m$ portant respectivement ces mêmes numéros, qui sont croissants, seront rencontrées successivement dans l'ordre où elles sont écrites par un observateur tournant autour de $S'$.

Corollaire I. *Soient $L$, $L_1$, $L_2$, ... une suite de lignes partant de $S$: leurs homologues $L'$, $L'_1$, $L'_2$, ... se succéderont dans le même ordre autour de $S'$.*

Car l'ordre de succession des lignes $L$, $L_1$, $L_2$, ... autour de $S$ et

des lignes $L'$, $L'_1$, $L'_2$, ... autour de $S'$ est défini par celui de leurs premières arêtes, lequel est le même de part et d'autre.

Cette démonstration serait insuffisante, si quelques unes des lignes considérées $L_1$ et $L_2$ par exemple avaient un tronçon commun $ST$ à partir de $S$: mais dans ce cas, soient $aT$ la dernière arête du tronçon commun, $Tb_1$ et $Tb_2$ les arêtes qui lui succèdent le long de chacune des lignes $L_1$, $L_2$, ...: $L_1$ précédant $L_2$ autour de $S$, les trois arêtes $Ta$, $Tb_1$, $Tb_2$ se succéderont autour de $T$ dans l'ordre où elles sont écrites.

Les lignes $L'_1$, $L'_2$ auront un tronçon commun $S'T'$: et $Ta$, $Tb_1$, $Tb_2$ auront pour homologues respectives trois arêtes $T'a'$, $T'b'_1$, $T'b'_2$, qui se succéderont autour de $T'$ dans l'ordre où elles sont écrites: donc par définition $L'_1$ précédera $L'_2$ autour de $S'$.

Corollaire II. *Si deux lignes $\Lambda$, $\Lambda_1$ se coupent en un sommet S, leurs homologues $\Lambda'$, $\Lambda_1$ se couperont en $S'$, homologue de S, et réciproquement.*

Cela résulte évidemment de la définition de l'intersection de deux lignes, et du Corollaire I.

Remarque. Il est clair que les résultats précédents ne cesseraient pas de s'appliquer si $P'$, au lieu d'être un polyèdre différent de $P$, n'était autre que le polyèdre $P$, mais vu sous un autre aspect. Il se pourrait même que le sommet $S'$ se confondît avec $S$, un sommet pouvant fort bien, comme nous le verrons, être homologue à lui-même sous plusieurs aspects différents.

Proposition 4. *Soient* A, A' *deux aspects semblables d'un même polyèdre, a un sommet quelconque, ab une arête issue de ce point: c une arête, face ou sommet quelconque: enfin soient a', a'b', c' les homologues respectifs de a, ab, c relativement à* A *et* A'. *L'aspect* $A_1$ *relatif à a et ab sera semblable à l'aspect* $A'_1$ *relatif à a' et a'b': et c' sera l'homologue de c relativement à* $A_1$ *et* $A'_1$.

En effet, l'aspect A étant connu, l'enchaînement des faces du polyèdre sera complètement déterminé. On en déduira donc sans ambiguïté et l'aspect $A_1$ relatif à $a$ et $ab$, et le numéro que portera $c$ sous ce dernier aspect. De l'aspect A' on déduira semblablement et l'aspect $A'_1$ et le numéro que portera $c'$ sous ce dernier aspect. L'aspect A' étant semblable à A et $a'$, $a'b'$, $c'$ respectivement homologues de $a$, $ab$, $c$, les données à partir desquelles doit se faire la déduction sont exactement les mêmes dans les deux cas: par suite les aspects $A_1$ et $A'_1$ sont semblables et $c$, $c'$ y porteront respectivement le même numéro.

Proposition 5. ***Deux lignes ou régions quelconques $R'$, $R''$ pareilles à une troisième $R$, sont pareilles entre elles.***

Soient en effet A et A' les deux aspects relativement auxquels $R'$ est l'homologue de $R$: $ab$ une arête quelconque de $R$: $a'b'$ l'arête homologue contenue dans $R'$ ($a'$ étant l'homologue de $a$): les aspects relatifs à $a$, $ab$ et à $a'$, $a'b'$ sont semblables, et $R'$ sera l'homologue de $R$ relativement à ces deux aspects (Proposition 4).

Soient de même $A_1$ et $A_1''$ les deux aspects relativement auxquels $R''$ est l'homologue de $R$; $a''b''$ l'arête homologue à $ab$: les deux aspects relatifs à $a$, $ab$ et à $a''$, $a''b''$ seront semblables, et $R''$ y sera l'homologue de $R$.

Les deux aspects $a'$, $a'b'$ et $a''$, $a''b''$ étant ainsi semblables à un troisième, le seront entre eux, et $R''$ y sera l'homologue de $R'$.

Proposition 6. ***Soient $L$ une ligne quelconque tracée à la surface d'un polyèdre: $L_1$, $L_2$, ... toutes les lignes pareilles. Le système des lignes $L$, $L_1$, $L_2$, ... sera son propre homologue relativement à tous les aspects semblables du polyèdre.***

En effet, comparons ensemble deux aspects semblables quelconques A et A'. L'homologue de $L_1$ par exemple, étant pareille à $L_1$, le sera à $L$ (Proposition précédente). Elle fera donc partie de la suite $L$, $L_1$, $L_2$, ....

Proposition 7. ***Le nombre des aspects différents d'un polyèdre de $A$ arêtes est un diviseur de $2A$.***

Car nous avons vu plus haut que le nombre des aspects possibles, semblables ou non, est $2A$: et nous allons démontrer que si $\mu$ de ces aspects sont semblables entre eux, tous les aspects possibles, en nombre $2A$, se partageront en groupes contenant chacun $\mu$ aspects semblables entre eux.

Supposons en effet que l'aspect du polyèdre relatif au sommet $a$ et à l'arête $ab$ soit le même que l'aspect relatif au sommet $a'$ et à l'arête $a'b'$. Soient $c$ un autre sommet, $cd$ une autre arête qui en soit issue: $c'$ et $c'd'$ les homologues de $c$, $cd$ relativement aux deux aspects $a$, $ab$ et $a'$, $a'b'$. Les deux aspects $c$, $cd$ et $c'$, $c'd'$ seront semblables et $a$, $ab$ y auront respectivement pour homologues $a'$ et $a'b'$ (proposition 4).

D'ailleurs il est impossible que $c'$ se confonde avec $c$ en même temps que $c'd'$ avec $cd$. Car si cette double coïncidence avait lieu, les deux aspects $c$, $cd$, et $c'$, $c'd'$ se réduisant à un seul, $a$, et $ab$ coïncideraient avec leurs homologues $a'$, $a'b'$, et les aspects $a$, $ab$ et $a'$, $a'b'$ au lieu d'être comme nous le supposons, deux aspects distincts semblables entre eux, se réduiraient à un seul.

Ainsi autant il y aura d'aspects distincts semblables à un aspect donné *a, ab,* autant il y en a de semblables à un aspect quelconque *c, cd:* les aspects se partageront donc en $\frac{2A}{\mu}$ groupes contenant chacun $\mu$ aspects semblables. C. Q. F. D.

Proposition 8. ***Un polyèdre P étant donné, on peut en déterminer un autre $\pi$ polaire du proposé, c'est à dire dont les arêtes correspondent respectivement à celles de P, de telle sorte qu'aux arêtes qui bordent une même face de P correspondent des arêtes qui aboutissent à un même sommet de $\pi$ et réciproquement.***

Cette proposition fort connue, que nous nous bornerons à rappeler sans démonstration, manifeste une analogie remarquable entre les rôles que jouent dans la théorie des polyèdres, d'une part les sommets et d'autre part les faces. Pour faire ressortir cette analogie dans le langage, nous les désignerons souvent sous le nom collectif ***d'éléments*** par opposition aux arêtes, auxquelles nous refuserons cette dénomination.

Proposition 9. ***Soient S un sommet quelconque d'un polyèdre P; $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ les arêtes qui y aboutissent, écrites dans l'ordre où elles se succèdent autour de S. Les arêtes correspondantes $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ d'un polyèdre $\pi$ polaire de P se succéderont autour de la face $\sigma$ polaire de S dans l'ordre où elles sont écrites, ou dans un ordre précisément inverse.***

En effet, les deux arêtes successives $a_1$, $a_2$ bordant une même face $F$, les deux arêtes correspondantes $\alpha_1$, $\alpha_2$ auront une extrémité commune $\varphi$ au sommet correspondant à $F$. De même $a_2$ et $a_3$ bordant une même face $F_1$, leurs polaires $\alpha_2$ et $\alpha_3$ auront un sommet commun $\varphi_1$ etc. ...; ainsi l'arête $\alpha_2$ est contigue à $\alpha_1$ et à $\alpha_3$; $\alpha_3$ l'est à $\alpha_2$ et à $\alpha_4$ etc. ...

Cela posé, imaginons qu'un observateur tourne autour de $\sigma$ dans le sens direct à partir de $\alpha_1$. Il passera de là sur l'une des deux arêtes contigués $\alpha_2$ ou $\alpha_m$. Si c'est sur $\alpha_2$, à $\alpha_2$ succédera l'autre arête $\alpha_3$ contigue à $\alpha_1$: à $\alpha_3$ succédera l'arête contigue $\alpha_4$ etc. .... Si au contraire à $\alpha_1$ succède $\alpha_m$, à $\alpha_m$ succédera l'arête contigue $\alpha_{m-1}$ etc. ....

Proposition 10. Réciproquement, ***soient $\sigma$ une face quelconque d'un polyèdre $\pi$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ les arêtes qui la bordent, écrites dans l'ordre où elles se succèdent autour de $\sigma$. Les arêtes correspondantes $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ d'un polyèdre P, polaire de $\pi$, se succéderont autour du sommet S, polaire de $\sigma$, dans l'ordre où elles sont écrites, ou dans un ordre précisément inverse.***

Cette proposition, semblable à la précédente, résulte immédiatement de que les relations de polarité sont réciproques. La démonstration précédente applique mot pour mot.

Proposition 11. *Soient S un sommet quelconque d'un polyèdre P, $a_1$, ... $a_m$ les arêtes qui y aboutissent: on peut toujours déterminer un polyèdre laire de P, et tel que les arêtes $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ respectivement polaires de $a_2$, ... $a_m$ se succèdent autour de la face $\sigma$, polaire de S, dans le même re que $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ autour de S.*

En effet, soit $\pi$ un polyèdre polaire donné: si l'ordre de succession s arêtes $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ n'est pas le même que celui des arêtes $a_1$, , ... $a_m$ il sera inverse (Proposition 12). Soit dans ce cas $\pi'$ un nouveau lyèdre symétrique de $\pi$ par rapport à un point ou à un plan quelconque. s faces, arêtes et sommets correspondent respectivement aux faces, arêtes sommets de $\pi$ et par suite aux sommets, arêtes et faces de $P$. On peut nc le prendre également pour polaire de $P$. D'ailleurs on sait que les êtes $\alpha'_1$, $\alpha'_2$, ... $\alpha'_m$ symétriques de $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ se succèdent autour de symétrique de $\sigma$ dans un ordre précisément inverse de celui où $\alpha_1$, , ... $\alpha_m$ se succèdent autour de $\sigma$: elles se succèdent donc dans le même dre que $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ autour de $S$.

Nous appellerons *polyèdre polaire direct* de $P$ tout polyèdre déterminé manière à satisfaire à la condition ci-dessus.

Proposition 12. *Soient P un polyèdre quelconque: $\pi$ un polyèdre laire direct de P: S un sommet ou face de P, $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ les arêtes i aboutissent à ce sommet ou bordent cette face: $\sigma$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ les laires respectives de S, $a_1$, $a_2$, ... $a_m$. Les arêtes $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ se céderont autour de $\sigma$ dans le même ordre que $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ autour de S.*

Si la proposition est vraie pour un sommet $S$, elle l'est pour toute ce $T$ qui y aboutit: soient en effet $a_1$, $a_2$ les deux arêtes de $T$ qui abou- sent en $S$, $a_3$, ... $a_m$ les autres arêtes du contour de $T$, toutes ces arêtes ant supposées se succéder dans l'ordre $a_1$, $a_2$, ... $a_m$.

Soient $\sigma$, $\tau$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ les polaires respectives de $S$, $T$, $a_1$, , ... $a_m$.

L'arête $a_2$ succédant immédiatement à $a_1$ autour de $T$ précédera $a_1$ autour S (Proposition 1). Leurs polaires $\alpha_1$, $\alpha_2$ bordent $\sigma$ et aboutissent en $\tau$: et r hypothèse $\alpha_2$ précède $\alpha_1$ autour de $\sigma$: donc elle succédera à $\alpha_1$ autour r. Donc les arêtes $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ se succéderont dans le même ordre

que leurs polaires $a_1$, $a_2$, ... $a_m$; car si elles se succédaient dans un ordre inverse, l'arête $a_1$ précédant l'arête $a_2$, l'arête $\alpha_1$ devrait suivre l'arête $\alpha_2$ au lieu de la précéder.

On voit de même que si la proposition est vraie pour une face $T$, elle est vraie pour tout sommet $U$ situé sur cette face.

Or la proposition est vérifiée, par construction pour l'un des sommets de $P$: donc elle est vraie 1° pour les faces aboutissant à ce sommet, 2° pour les sommets situés sur ces faces etc. .... Donc elle est vraie en général.

Proposition 13. *Deux polyèdres $\pi$, $\pi'$, respectivement polaires directs de deux polyèdres pareils $P$, $P'$, sont pareils entre eux, et les éléments ou arêtes polaires d'éléments homologues de $P$ et de $P'$ sont eux-mêmes homologues.*

Appelons provisoirement éléments ou arêtes correspondants dans les polyèdres $\pi$ et $\pi'$ ceux qui sont polaires d'éléments ou arêtes homologues dans $P$ et $P'$, et désignons-les par une même lettre affectée d'un accent pour celui de ces éléments ou arêtes qui appartient à $\pi$.

1°. Deux faces correspondantes $\sigma$, $\sigma'$, sont bordées d'arêtes correspondantes qui se succèdent dans le même ordre. De même, à deux sommets correspondants aboutissent des arêtes correspondantes, disposées dans le même ordre.

Car soient $\sigma$ et $\sigma'$ les éléments considérés: $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ les arêtes qui se succèdent autour de $\sigma$: leurs polaires $a_1$, $a_2$, ... $a_m$ se succèdent dans le même ordre autour de $S$ polaire de $\sigma$ (Proposition 13); les homologues de ces dernières lignes, $a'_1$, $a'_2$, ... $a'_m$ se succèdent dans le même ordre autour de $S'$ homologue de $S$ (Proposition 3): enfin $\alpha'_1$, $\alpha'_2$, ... $\alpha'_m$ se succèdent encore dans le même ordre autour de $\sigma'$ polaire de $S'$ (Proposition 13).

2°. Ce point établi, soient $\sigma$ un sommet quelconque de $\pi$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ les arêtes qui y aboutissent: prenons l'aspect de $\pi$ par rapport à $\sigma$ et $\alpha_1$ et comparons-le à l'aspect de $\pi'$ relatif à $\sigma'$ et $\alpha'_1$.

Dans l'aspect $\sigma$, $\alpha_1$, les arêtes $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ portent respectivement les numéros 1, 2, ... $m$: les faces $\beta_1$, $\beta_2$, ... $\beta_m$ successivement comprises entre $\alpha_1$ et $\alpha_2$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$ etc. ... auront également les numéros 1, 2, ... $m$: enfin le sommet $\sigma$ a pour numéro 1, et les sommets $\gamma_1$, $\gamma_2$, ... $\gamma_m$ extrémités de $\alpha_1$, $\alpha$ , ... $\alpha_m$ auront les numéros 2, 3, ... $m+1$. Dans l'aspect $\sigma'$, $\alpha'_1$ les arêtes $\alpha'_1$, $\alpha'_2$, ... $\alpha'_m$ correspondantes à $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ et qui se succèdent dans le même ordre, auront de même les numéros 1, 2, ... $m$. Les faces successivement comprises entre $\alpha'_1$ et $\alpha'_2$, $\alpha'_2$ et $\alpha'_3$ ... etc. auront de même les numéros 1, 2, ... $m$; ces faces sont respectivement les correspon-

dantes de $\beta_1, \ldots \beta_m$; car la face $\beta_1$, par exemple, étant bordée par $\alpha_1$ et $\alpha_2$, sa correspondante devra être bordée par $\alpha'_1$ et $\alpha'_2$, ce qui la détermine. De même $\sigma'$ correspondant à $\sigma$ aura le numéro 1, et les numéros 2, 3, ... $m+1$ seront affectés aux autres extrémités des arêtes $\alpha'_1, \ldots \alpha'_m$, qui ne sont autres que les points $\gamma'_1, \ldots \gamma'_m$ correspondants à $\gamma_1, \ldots \gamma_m$; car l'arête $\alpha_1$, par exemple, aboutissant à chacun des sommets $\sigma$ et $\gamma_1$, sa correspondante $\alpha'_1$ doit aboutir à chacun des points correspondants $\sigma'$ et $\gamma'_1$.

Ainsi jusqu'à présent chaque sommet, arête ou face de $\pi$ porte le même numéro relativement à l'aspect $\sigma$, $\alpha_1$ que son correspondant dans $\pi'$ relativement à l'aspect $\sigma'$, $\alpha'_1$. Nous allons démontrer que cette propriété continuera à subsister lorsqu'on se transportera successivement aux divers sommets de ces polyèdres pour compléter le numérotage, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut.

En effet, supposons que la chose soit vraie, jusqu'au moment où l'observateur se transporte à un sommet donné $\tau$: nous allons voir qu'elle sera encore vraie pour les faces, arêtes et sommets qu'il enregistre en tournant autour de ce point.

Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$ la suite des arêtes qui aboutissent en $\tau$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ les faces qu'elles comprennent entre elles. Les arêtes correspondantes $\delta'_1, \ldots \delta'_m$ se succèdent autour de $\tau'$ dans le même ordre que $\delta_1, \ldots \delta_m$ autour de $\tau$: et les faces qu'elles comprennent entre elles $\varepsilon'_1, \ldots \varepsilon'_m$ sont respectivement les correspondantes de $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m$. Imaginons maintenant un second observateur tournant autour de $\tau'$ et marchant du même pas que l'autre, de manière à ce qu'ils franchissent simultanément les arêtes correspondantes. A mesure que l'un des observateurs traversera une face ou une arête, il l'enregistrera si ce n'est déjà fait: et l'autre observateur traversera en même temps la face ou arête correspondante qu'il enregistrera, si ce n'est déjà fait: d'ailleurs si une face ou arête est déjà enregistrée, sa correspondante le sera par hypothèse, et réciproquement: les deux observateurs auront donc à enregistrer en même temps et par suite compteront toujours d'accord. De même lorsque l'un d'eux enregistre un sommet, l'autre enregistre le sommet correspondant.

Il est donc démontré, 1° que les arêtes ou éléments correspondants des deux polyèdres portent les mêmes numéros relativement aux deux aspects considérés, 2° que les arêtes correspondantes aboutissent à des sommets correspondants, et bordent des faces correspondantes. Donc les deux aspects

considérés sont semblables par définition et les éléments et arêtes correspondants sont homologues.

Corollaire. *Si un polyèdre P présente k aspects semblables entre eux*, il peut être considéré comme pareil à lui-même sous $k$ points de vue différents: *le polyèdre polaire direct $\pi$ sera donc pareil à lui-même sous k points de vue différents: et si un même élément de P est son propre homologue relativement à l de ces aspects, l'élément correspondant de $\pi$ sera également son propre homologue relativement à l aspects.*

Quelques nouvelles définitions sont encore nécessaires ici:

Soit $ab$ une arête d'un polyèdre: si les deux aspects $a$, $ab$ et $b$, $ba$ que l'on peut prendre par rapport à cette arête sont semblables, nous dirons que le polyèdre présente une *symétrie de retournement* autour de cette arête.

Si l'aspect d'un polyèdre est le même par rapport à diverses arêtes partant d'un même sommet $S$, nous dirons que le polyèdre présente une *symétrie par rotation* autour de ce sommet. Le nombre de ces arêtes $SA$, $SB$, déterminera l'ordre de la rotation.

La considération du polyèdre polaire permet d'étendre la définition précédente aux faces: ainsi il y aura *symétrie par rotation autour d'une face* si l'aspect du polyèdre est le même relativement à plusieurs des arêtes qui la bordent. (On choisira pour les comparer entre eux celui des deux aspects relatifs à chaque arête dans lequel la face considérée porte le numéro 1); auquel cas le polyèdre polaire sera symétrique par rotation autour du sommet correspondant.

Proposition 14. *Si un élément E d'un polyèdre est son propre homologue relativement à m aspects distincts mais semblables entre eux, il existe autour de cet élément une symétrie de rotation d'ordre m.*

La démonstration de cette proposition résulte immédiatement des considérations précédentes:

En effet, supposons d'abord que l'élément $E$ soit un sommet: soit $EF$ une arête qui y passe: le point $E$ étant son propre homologue par rapport aux $m$ aspects $A$, $A'$, ... la ligne $EF$ aura pour homologues respectives une suite d'arêtes $EF$, $EF'$, toutes issues de $E$. Les aspects relatifs à ces diverses arêtes sont tous semblables entre eux. D'ailleurs ces arêtes, en nombre $m$, sont toutes distinctes les unes des autres (Voir la démonstration de la proposition 7).

Supposons maintenant que l'élément $E$ soit une face. Considérons le

polyèdre polaire: soit $\varepsilon$ celui de ses sommets qui correspond à $E$: il sera son propre homologue relativement à $m$ aspects distincts (Proposition 13, Corollaire) Il présentera donc une symétrie par rotation d'ordre $m$. Revenant maintenant à l'élément correspondant $E$, nous voyons qu'il jouit de la même symétrie.

Corollaire. *Soit $E$ un élément déterminé du polyèdre, $m$ l'ordre de la rotation possible autour de cet élément* (ordre qui peut se réduire à l'unité) *$n$ le nombre des éléments pareils à $E$. Le nombre $\mu$ des aspects semblables entre eux sera $mn$.*

Car supposons que $E$ soit un sommet (le cas où $E$ serait une face se ramène à celui-là en considérant le polyèdre polaire): soient $EF$ une arête quelconque issue de ce point, $EF$, $EF'$ ... etc. les $m$ arêtes pareilles à $EF$ issues de ce point. Si $E_1$ est un sommet quelconque pareil à $E$, on aura $m$ arêtes $E_1F_1$, $E_1F_1'$ ... etc. issues de ce point, et respectivement pareilles aux précédentes. Le nombre total des aspects

$$\begin{array}{llll} E, & EF, & E, & EF' \ldots, \\ E_1, & E_1F_1, & E_1, & E_1F_1' \ldots, \\ E_{n-1}, & E_{n-1}F_{n-1}, & E_{n-1}, & E_{n-1}F_{n-1}' \ldots, \end{array}$$

pareils à $E$, $EF$ est donc précisément $mn$.

Si l'on considère un autre élément $E'$, on aura une rotation d'ordre $m'$, un nombre $n'$ d'éléments pareils, et $\mu = mn = m'n'$.

Proposition 15. *Soit abcdea un contour fermé tracé sur la surface d'un polyèdre, de manière à ne se traverser lui-même nulle part: et qui divise cette surface en deux régions séparées $R$, $R_1$, situées, l'une $R$ à la droite, l'autre $R_1$ à la gauche d'un observateur tournant autour du contour dans le sens abcdea.*

*Soient respectivement a'b'c'd'e' les homologues de abcde, relativement à deux aspects semblables quelconques $A$ et $A'$: le contour fermé a'b'c'd'e'a' qui ne se traverse lui-même nulle part* (Proposition 3, Corollaire II) *divise le polyèdre en deux nouvelles régions, situées, l'une $R'$ à la droite, et l'autre $R_1'$ à la gauche d'un observateur qui suivrait le contour dans le sens a'b'c'd'e'a'.*

*La région de droite $R'$ sera l'homologue de la région de droite $R$: de même $R_1'$ sera l'homologue de $R_1$.*

En effet, soit $f$ celle des faces de $R$ qui borde l'arête $ab$. Comparons ensemble les deux aspects semblables $a$, $ab$ et $a'$, $a'b'$. La face $f$ est la première que rencontre l'observateur tournant dans le sens direct autour de

$a$ à partir de $ab$. Elle porte donc le numéro 1 dans l'aspect $a$, $ab$. La face $f'$, située dans $R'$ et bordée par l'arête $a'b'$ porterait de même le numéro 1 dans l'aspect $a'$, $a'b'$: elle serait donc l'homologue de $f$ relativement aux deux aspects $a$, $ab$ et $a'$, $a'b'$: l'homologue de $f$ relativement aux deux aspects $A$ et $A'$ devant d'ailleurs rester son homologue relativement aux aspects $a$, $ab$ et $a'$, $a'b'$ ne sera autre que $f'$.

Soient maintenant $mn$ une arête quelconque de $f$ non située sur le contour (s'il y en a), $g$ la face de $R$ contigue à $f$ suivant $mn$. L'arête $m'n'$, homologue de $mn$, borde $f'$, homologue de $f$, et ne peut être située sur le contour $a'b'c'd'e'a'$; car $mn$, dont elle est l'homologue, serait alors située sur $abcdea$. La face $g$ contigue à $f'$ suivant $m'n'$ sera évidemment l'homologue de $g$.

Soient de même $h$ une face de $R$ contigue à $g$, $pq$ l'arête commune; $h'$ et $p'q'$ les homologues de $h$ et de $pq$: $h'$ sera contigue à $g'$ suivant $p'q'$ et fera partie de $R'$. En continuant de proche en proche, de chaque face à sa contigue, on arrivera à démontrer que toute face de $R$ a son homologue en $R'$. On verra de même que toute face de $R_1$ a son homologue en $R'_1$.

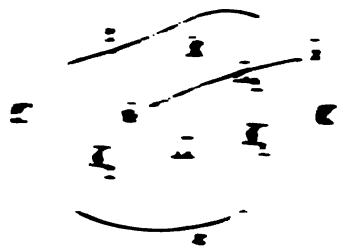
D'ailleurs les deux régions $R'$, $R'_1$ n'ont entre elles aucune communication, en dehors du contour $a'b'c'd'e'a'$. Car si deux faces $F'$, $F'_1$ appartenant respectivement à ces deux régions étaient contigues suivant une arête $r's'$ non située sur le contour $a'b'c'd'e'a'$, les faces $F$, $F_1$ dont elles sont homologues seraient contigues suivant l'arête $rs$, dont $r's'$ est l'homologue, et qui n'est pas située sur le contour $abcdea$. Les deux régions $R$, $R_1$ auraient donc, contrairement à notre supposition, une communication en dehors du contour $abcdea$.

## II.

## Polyèdres eulériens.

Nous considérerons spécialement dans ce qui va suivre les polyèdres tels que tout contour fermé tracé sur leur surface et ne se traversant pas lui-même divise cette surface en deux régions séparées. Cette catégorie de polyèdres, auxquels nous donnerons le nom de *polyèdres simples* ou de *polyèdres eulériens* enferme comme cas particulier les polyèdres convexes.

*Toute calotte polyédrique $K_1$, détachée d'un polyèdre eulérien par un contour fermé [illegible] sera divisée en deux parties séparées par toute ligne $L$ tracée [illegible] sur la surface de manière à ne pas se traverser elle-même [illegible] sur [illegible].*



Car la région $K_1$, située à droite de $L$, est limitée par le contour fermé $Lcba$, qui par hypothèse la sépare complètement du reste du polyèdre, et par suite de la région de gauche $K_2$.

Nous donnerons le nom de *calottes polyédriques simples* aux calottes qui jouissent de la propriété ci-dessus.

*Les deux calottes partielles $K_1$, $K_2$ obtenues en partageant une calotte [illegible] par une ligne transversale $L$ sont elles-mêmes des calottes simples.*

Par [illegible] une ligne transversale tracée sur la surface de $K_1$, $d$ [illegible] supposons pour fixer les idées que $d$ soit situé sur $L$ [illegible] La région $d$ située à droite de $L$ est limitée par la portion $bc$ [illegible] qui la sépare complètement par hypothèse [illegible] $K$ et par suite de la région $K_1$ située à gauche de $db$.

[illegible] *Soit $K$ une calotte polyédrique simple: $S$ le nombre de [illegible] $A$ [illegible] $a$ [illegible] $S$ [illegible] on aura la relation* [illegible]

[illegible] une ligne $A$ dont les [illegible] différents du contour de $K$, les [illegible] différents et non situés sur le [illegible] ligne. En effet, soient [illegible] par lesquelles elle [illegible] n'est pas situé sur le contour, [illegible] de la face en [illegible] de sommets $b_1$, $b_2$, ... [illegible] un sommet $b_p$ situé [illegible] un observateur [illegible] de $b$ pourra rencontrer [illegible] sur le contour: mais il finira par [illegible] sera d'ailleurs dif- [illegible] La face proposée $g$ n'ayant que [illegible] comme nous le supposons.

Cela étant, la ligne $a_q \ldots a_2 a_1 a b b_1 \ldots b_p$ réunit évidemment les conditions exigées pour la ligne $\Delta$.

Supposons maintenant qu'on déchire la calotte suivant la ligne $\Delta$: elle se trouvera divisée en deux calottes simples partielles $K_1$ et $K_2$: et il est aisé de voir que si le théorème est vrai pour chacune de ces calottes partielles, il le sera pour $K$.

En effet, soient respectivement $S_1$, $F_1$, $A_1$, $S_2$, $F_2$, $A_2$ les nombres des sommets, faces et arêtes de $K_1$ et de $K_2$; on a par hypothèse les relations

$$S_1+F_1=A_1+1, \qquad S_2+F_2=A_2+1,$$

d'où

$$S_1+S_2+F_1+F_2=A_1+A_2+2.$$

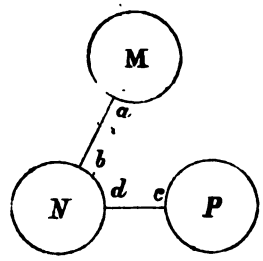
Or chaque face de $K$ se retrouve sur l'une des calottes partielles, et sur une seule: donc $F_1+F_2=F$. Chaque arête de $K$ se retrouve sur l'une des deux calottes: elle se retrouve même sur toutes les deux si cette arête fait partie de $\Delta$: on aura donc, en désignant par $\delta$ le nombre des arêtes de $\Delta$, $A_1+A_2=A+\delta$. Chaque sommet de $K$ se retrouve sur l'une des calottes: il se retrouve même sur toutes deux si ce sommet est situé sur $\Delta$; et comme le nombre des sommets de $\Delta$ est évidemment $\delta+1$, on aura $S_1+S_2=S+\delta+1$. Substituant ces valeurs dans la relation précédente, il vient

$$S+F=A+1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il reste à démontrer le théorème pour chacune des calottes partielles $K_1$, $K_2$; pour cela chacune d'elles pourra être décomposée en deux autres, que l'on décomposera à leur tour en deux autres etc. Continuant ainsi on arrivera à réduire la question au cas d'une calotte ne contenant plus qu'une seule face. Mais alors le théorème devient évident, car si la face a $n$ arêtes, elle aura $n$ sommets et l'équation à démontrer se réduit à l'identité $n+1=n+1$.

Observation. Il importe de bien se rendre compte de toute la généralité que comporte le théorème que nous venons de démontrer: ainsi il peut s'étendre au cas où l'on aurait, au lieu d'une seule calotte polyédrique $K$, plusieurs calottes successives se touchant par un simple sommet ou reliées les unes aux autres par des lignes droites ou polygonales, à la condition que deux quelconques des calottes partielles ne soient liées entre elles que d'une seule manière, de telle sorte qu'en coupant en un point quelconque la ligne qui les joint on détruise toute continuité.




Ainsi, par exemple le théorème s'appliquera au système $K$ formé de trois calottes $M$, $N$, $P$ reliées par les arêtes $ab$ et $dc$. En effet détachons du système la calotte $M$. Le théorème sera vrai pour le système s'il est vrai pour chacun des deux systèmes partiels ainsi obtenus. Car soient $S$, $F$, $A$, $S_1$, $F_1$, $A_1$, $S_2$, $F_2$, $A_2$ les nombres d'arêtes, faces et sommets que contiennent respectivement le système total, la calotte $M$ et le système partiel restant $K_2$. Si le théorème s'applique aux systèmes partiels, on aura $S_1+F_1=A_1+1$, $S_2+F_2=A_2+1$ d'où $S_1+S_2+F_1+F_2=A_1+A_2+2$. D'ailleurs chaque arête ou élément de $K$ fait partie d'un seul des systèmes partiels, sauf le sommet $a$ qu'on retrouve dans tous deux: on aura donc $S_1+S_2=S+1$, $F_1+F_2=F$, $A_1+A_2=A$, d'où $S+F=A+1$.

Le théorème est vrai pour $M$: reste à le démontrer pour $K_2$; détachons-en l'arête $ab$. Le théorème sera vrai pour $K_2$ s'il est vrai pour $ab$ et pour le système restant $K_3$: mais il est évident pour $ab$, arête unique, qui a deux sommets. Reste à le démontrer pour $K_3$: nous détacherons de ce dernier système la calotte $N$ etc.

Les indications qui précèdent montrent que le théorème subsisterait encore lors même que les calottes $M$, $N$, $P$ seraient réduites à de simples points, auquel cas le système se réduirait à de simples lignes; mais toujours à la condition expresse qu'en coupant une de ces lignes, on détruise toute continuité.

Théorème d'Euler. *Soient $P$ un polyèdre eulérien, $S$ le nombre de ses sommets, $F$ celui de ses faces, $A$ celui de ses arêtes; on aura la relation* $S+F=A+2$.

En effet, détachons par la pensée une des faces du polyèdre, $\varphi$. Il reste une calotte simple $K_1$ dans laquelle le nombre total des sommets et faces dépasse d'une unité celui des arêtes: mais elle contient tous les sommets et toutes les arêtes du polyèdre, et toutes les faces, sauf une $\varphi$: C. Q. F. D.

Remarque. Ce théorème est caractéristique des polyèdres eulériens: car il serait aisé de démontrer que si l'on peut tracer sur un polyèdre $\lambda$ contours différents, ne se coupant pas mutuellement, et ne divisant pas la surface du polyèdre en parties séparées, on aura, au lieu de la relation ci-dessus, la suivante:

$$S+F = A+2-2\lambda.$$

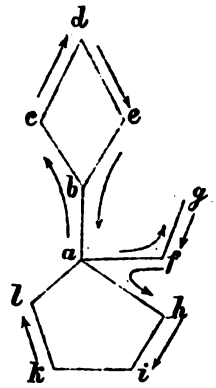
Remarque 2ème. Il importe enfin de remarquer que la démonstration que nous avons donnée des deux théorèmes précédents ne suppose nullement que les faces du polyèdre soient planes, ou ses arêtes rectilignes. Elle subsisterait dans son intégrité lors même que chaque face serait remplacée par un réseau de facettes supposées invariablement liées entre elles, de manière à former un seul tout, et chaque arête par un fuseau, formé d'un réseau de facettes également liées entre elles d'une façon invariable.

## III.

## Premier théorème fondamental.

Théorème. *Soit R une calotte polyédrique simple, limitée par un contour fermé C qui ne se traverse pas lui-même: si R est sa propre homologue relativement à k aspects semblables A, $A_1$, ... $A_{k-1}$ du polyèdre auquel elle appartient, il existera dans cette région un élément doué d'une symétrie de rotation dont l'ordre sera au moins égal à k. Toutefois, si $k=2$, cet élément pourra être remplacé par une arête, douée de la symétrie par retournement. Dans tous les cas, tous les autres éléments et arêtes de R pourront être groupés en systèmes de k arêtes ou éléments pareils.*

Avant d'aborder la démonstration générale de ce théorème, quelques observations et lemmes sont indispensables:




Le contour *C*, par hypothèse, ne se traverse pas lui-même: mais nous n'excluons pas le cas où deux parties différentes de ce contour se touchent en quelque point, ou même se confondent dans une partie de leur étendue, comme cela se voit dans la figure ci-jointe, où sont réunies les diverses circonstances qui peuvent se présenter. On voit qu'un observateur, qui voudrait faire le tour complet de ce contour, sans jamais le traverser, serait obligé de suivre le trajet indiqué par les flèches, et dont plusieurs parties sont coïncidentes, de telle sorte qu'il repasserait deux fois par chacun des points *b* et *f*, et trois fois par le point *a*.

Lemme 1er. Mais *il existe dans tous les cas sur le contour C des points où l'observateur ne passera qu'une fois en faisant son tour.*

En effet, soit *I'* une portion du contour, choisie aussi courte que

possible parmi celles dont l'origine et l'extrémité sont en un même sommet: soit $s$ ce sommet: deux cas pourront se présenter.

1^er^ cas. La première arête de $\Gamma$, $sa$, diffère de sa dernière arête $bs$. Dans ce cas le contour $\Gamma$ n'a ni point ni arête communs avec le reste $c_1$ du contour $c$. Car si cela était, une transversale $mn$ menée entre $sa$ et $sb$ dans le voisinage du point $s$ ne diviserait pas la région $R$ en deux régions séparées, puisque, partant du point $s$, on pourrait passer de l'autre côté de la ligne $mn$ en suivant le contour $c_1$, puis le contour $\Gamma$ qui se relie avec lui. $R$ étant, par hypothèse, une calotte simple, cela ne peut être.

Supposons maintenant qu'un observateur partant de $S$ fasse le tour de $c$. Il parcourra d'abord le contour $\Gamma$, repassera en $s$, puis parcourra $c_1$ et reviendra enfin s'arrêter au point de départ $s$. Le sommet $a$ n'étant pas sur le contour de $c_1$, l'observateur n'y passerait plusieurs fois que pendant qu'il parcourt le contour partiel $\Gamma$. Mais s'il y passait plusieurs fois, soit $\Gamma'$ la portion de $\Gamma$ comprise entre deux passages consécutifs en $a$. $\Gamma'$ serait $< \Gamma$, ce qui ne peut être, par supposition. Donc l'observateur ne passe en $a$ qu'une seule fois.

2^ème^ cas. Supposons en second lieu que l'arête finale de $\Gamma$ se confonde avec son arête initiale $sa$: $\Gamma$ se composera de cette seule arête: car s'il en était autrement, soit $\Gamma''$ le reste du contour de $\Gamma$. L'observateur, en suivant le contour, reviendrait au même point $a$ après avoir décrit un contour partiel $\Gamma'' < \Gamma$, ce qui ne peut être, par supposition. $\Gamma$ se réduit donc à l'arête $sa$. Soit $c_1$ le reste du contour: $a$ n'en fait pas partie: car si cela était, en coupant l'arête $sa$ dans le voisinage du point $s$, on ne séparerait pas $R$ en deux parties distinctes, puisque l'arête coupée $sa$ se rattacherait encore à $c_1$ par son extrémité $a$. Cela posé, un observateur faisant le tour de $c$ à partir de $s$ suivra l'arête $sa$, rebroussera chemin immédiatement de l'autre côté de cette arête, puis suivra $c_1$ et reviendra enfin au point de départ $s$ après n'avoir passé qu'une fois en $a$. C. Q. F. D.

Lemme II. *Le contour $C$ sera son propre homologue relativement à tous les aspects $A$, $A_1$, ... $A_{k-1}$.*

Cette proposition est évidente.

Lemme III. *Soit $s$ un sommet du contour, où l'observateur ne passe qu'une fois dans son tour: soient $s$, $s_1$, ... $s_{k-1}$ ses homologues relativement aux aspects $A$, $A$ , ... $A_{k-1}$: l'observateur ne passera qu'une fois en chacun de ces points, qui seront essentiellement distincts les uns des autres.*

En effet, comparons ensemble les deux aspects $A$ et $A_1$. Soit $s_1$ l'homologue de $s$. Si l'observateur y passait plusieurs fois, soit $\Gamma_1$ la portion de $c$ comprise entre deux passages consécutifs: $c$ étant son propre homologue, $\Gamma_1$ serait l'homologue d'un autre tronçon $\Gamma$ ayant ses extrémités en $s$, dont $s_1$ est l'homologue: l'observateur repasserait donc en $s$ après avoir décrit ce tronçon, ce qui est contre l'hypothèse.

Il reste à prouver que les sommets $s_1, s_2, \ldots s_{k-1}$ sont tous différents. Supposons pour fixer les idées que $s_1$ se confonde avec $s_2$. Ce point serait ainsi son propre homologue relativement aux deux aspects $A_1$, $A_2$. Parmi les arêtes de $c$, deux seulement aboutissent en $s_1$, celle par laquelle l'observateur arrive à ce point, et celle par laquelle il le quitte: encore ces deux arêtes pourront-elles coïncider.

S'il n'aboutit en $s_1$ qu'une arête du contour, $s_1t_1$, son homologue relativement aux deux aspects $A$, $A_1$ devant aboutir à $s_1$ qui est son propre homologue, et faire partie de $c$, sera cette arête elle-même. S'il passe au contraire deux arêtes du contour en $s_1$, $r_1s_1$ et $s_1t_1$, chacune de ces arêtes sera sa propre homologue. En effet, supposons pour fixer les idées qu'un observateur suivant le contour de manière à laisser $R$ à sa droite, le décrive dans le sens $r_1s_1t_1$: soit $x$ l'arête homologue de $s_1t_1$; les deux aspects $s_1$, $s_1t_1$ et $s_1$, $x$ doivent être semblables et $R$ y être homologue à lui-même. La face située immédiatement à droite de $s_1t_1$ et qui porte le numéro 1 dans l'aspect $s_1$, $s_1t_1$ fait partie de $R$: son homologue, située immédiatement à la droite de $x$ fait donc partie de $R$. D'ailleurs l'arête $x$ part de $s_1$ qui est son propre homologue, et fait partie du contour $c$. Ce ne peut être $s_1r_1$; car la face située immédiatement à droite de $s_1r_1$ ne fait pas partie de $R$. C'est donc $s_1t_1$.

Mais le point $s_1$ et l'arête $s_1t_1$ ne peuvent être à la fois leurs propres homologues pour deux aspects distincts $A_1$, $A_2$ (Proposition 7, démonstration): Il est donc prouvé que $s_1$ ne peut être son propre homologue sous plusieurs aspects différents de la suite $A, A_1, A_2, \ldots$.

Lemme IV. *Il existe nécessairement dans $R$ ou une arête, ou un élément qui soit son propre homologue relativement à plusieurs des aspects $A, A_1, \ldots A_{k-1}$.*

En effet, si cela n'avait pas lieu, en groupant ensemble les arêtes homologues d'une part, et les éléments homologues d'autre part, chaque groupe d'arêtes en contiendrait $k$. De même chaque groupe de faces ou de sommets en contiendrait $k$. Chacun des trois nombres $S$, $F$, $A$ serait ainsi un multiple

de $k$, et la relation

$$S+F = A+1$$

deviendrait manifestement absurde.

Nous pouvons aborder maintenant la démonstration du théorème proposé: nous étudierons successivement les trois cas qui peuvent se présenter, suivant qu'il existe un sommet, une face, ou une arête homologues à eux-mêmes sous plusieurs des aspects $A$, $A_1$, ... $A_{k-1}$.

1ère hypothèse. Supposons donc en premier lieu qu'il existe un sommet qui soit son propre homologue pour plusieurs aspects différents. Si plusieurs sommets jouissent de cette propriété, nous en considérerons spécialement un $T$, choisi parmi ceux dont la distance au plus voisin des sommets $s$, $s_1$, ... $s_{k-1}$, comptée sur la région $R$, est un *minimum* $\delta$.

(Nous appellerons ici *distance de deux sommets comptée sur la région R* le nombre minimum d'arêtes *toutes comprises dans cette région* que l'on est obligé de parcourir pour passer de l'un à l'autre de ces sommets. Nous nommerons de même *ligne géodésique sur la région R* la ligne la plus courte que l'on puisse mener d'un point à un autre de $R$, *en n'empruntant aucune arête étrangère à cette région.*)

Soient $\Delta$ une ligne géodésique tracée sur la région $R$ entre $T$ et le sommet $s$, le plus voisin de $T$ parmi ceux de la série $s$, $s_1$, ... $s_{k-1}$; $\Delta$, $\Delta_1$, ... $\Delta_{k-1}$ les homologues de $\Delta$ relativement à tous les aspects $A$, $A_1$, ... $A_{k-1}$. Chacune de ces lignes, auxquelles nous réserverons exclusivement dans le cours de cette démonstration l'appellation de *lignes pareilles à* $\Delta$, aboutira à l'un des sommets $s$, $s_1$, ... $s_{k-1}$. Parmi ces lignes, un certain nombre $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ auront leur autre extrémité en $T$; mais au point où nous en sommes, il est encore permis de supposer que la série $\Delta$, $\Delta_1$, ... $\Delta_{k-1}$ contienne des lignes partant d'autres points $T_1$ etc. pareils à $T$.

*La longueur de chacune de ces lignes représente la plus courte distance de son extrémité à celui des sommets* $s$, $s_1$, ... $s_{k-1}$ *qui en est le plus voisin.* Supposons en effet qu'il existât sur la région $R$ entre $T_1$ et $s_2$, par exemple, une ligne $L_1$ plus courte que $\Delta_1$ qui aboutit en $T_1$. Comparons ensemble les aspects $A$, $A_1$ relativement auxquels $\Delta_1$ est l'homologue de $\Delta$; $L_1$ sera l'homologue d'une ligne de même longueur, située sur la région $R$ et ayant l'une de ses extrémités en $T$, dont $T_1$ est l'homologue, et l'autre à celui des sommets $s$, $s_1$, ... $s_{k-1}$ dont $s_2$ est l'homologue. On pourrait donc, con-

trairement à ce que nous avons supposé, joindre $T$ à l'un des sommets $s, s_1, \ldots s_{k-1}$ par une ligne située sur $R$ et plus courte que $\Delta$.

***Deux quelconques des lignes $\Delta$ ne peuvent avoir aucun point commun autre que leur extrémité.***

Supposons en effet que les deux lignes $Ts$ et $T_1s_1$ se rencontrent en un point $u$. La distance du point $u$ à chacun des deux sommets $s$ et $s_1$, d'où ces lignes sont issues, est la même, $d$: car si l'on avait par exemple $us < us_1$ on aurait $T_1u + us < T_1s_1 < \delta$ et a fortiori la distance de $T_1$ à $s < \delta$, ce qui ne peut être, ainsi que nous venons de le voir. On aura donc $us = us_1$. Comparons maintenant les deux aspects $A$, $A_1$ relativement auxquels $\Delta_1$ est l'homologue de $\Delta$. Le point $u$ considéré sous le premier aspect, étant situé sur $\Delta$ à la distance $d$ de $s$, son homologue sera situé sur $\Delta_1$ et à la distance $d$ de $s_1$: (Proposition 4) il se confondra donc avec $u$, résultat inadmissible; car le point $u$ est plus voisin de $s$ que $T$: et nous avons supposé qu'aucun point plus voisin de $s$ que $T$ ne peut être son propre homologue.

Cela posé, soit $p$ le nombre des lignes $\Delta, \Delta', \ldots \Delta^{p-1}$ qui aboutissent en $T$; ces lignes étant supposées écrites dans l'ordre où on les rencontre en tournant dans le sens direct autour du point $T$. Elles partagent la surface en $p$ fuseaux distincts, arrêtés chacun au contour.

Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels l'une de ces lignes $\Delta^\mu$ est l'homologue de $\Delta$; $\Delta', \ldots \Delta^{p-1}$ auront respectivement pour homologues $\Delta^{\mu+1}, \ldots \Delta^{\mu-1}$. En effet soient $x', \ldots x^{p-1}$ les homologues cherchées. Soient d'ailleurs $s$, $st$ et $s'$, $s't'$ les sommets et arêtes par rapport auxquels sont pris les aspects semblables $A$ et $A'$, relativement auxquels $\Delta'$ est l'homologue de $\Delta$. Désignons par $\sigma$ et $\sigma\tau$ les homologues respectives de $s'$, $s't'$ par rapport aux aspects semblables, $A$ et $A^\mu$. Les deux aspects $s'$, $s't'$ et $\sigma'$, $\sigma'\tau'$ sont semblables, et $T$, $R$ et $\Delta'$ ont relativement à ces deux aspects les mêmes homologues $T$, $R$ et $x'$ que relativement aux aspects $A$ et $A^\mu$ (Proposition 4). Mais l'aspect $s'$, $s't'$ est semblable à $A$, et $T$, $R$, $\Delta'$ ont pour homologues relativement à ces deux aspects $T$, $R$ et $\Delta$. L'aspect $\sigma'$, $\sigma'\tau'$ est donc semblable à $A$ et si on les compare entre eux $T$, $R$ et $\Delta$ y auront respectivement pour homologues $T$, $R$ et $x'$. Donc l'aspect $\sigma'$, $\sigma'\tau'$ fait partie de la suite $A, A', \ldots A^{p-1}$ des aspects semblables à $A$ et relativement auxquels $T$ et $R$ sont leurs propres homologues; et $x'$ fera partie de la suite des lignes $\Delta, \Delta', \ldots \Delta^{p-1}$ homologues de $\Delta$ relativement à tous ces aspects. On démontrerait la même chose pour $x'', \ldots x^{p-1}$.

Les lignes $\Lambda^\mu$, $x'$, ... $x^{p-1}$ sont donc les mêmes à l'ordre près que les lignes $\Lambda$, $\Lambda'$, ... $\Lambda^{p-1}$ dont elles sont les homologues: d'ailleurs leur ordre de succession autour de $T$ doit être le même: donc $\Lambda'$, qui succède la première à $\Lambda$, aura pour homologue $\Lambda^{\mu+1}$, qui succède la première à $\Lambda^\mu$ etc. ....

Soient F celui des fuseaux qui est limité à gauche en partant de $T$ par la ligne $\Lambda$, à droite par la ligne $\Lambda'$, $F^\mu$ celui qui est limité à gauche par $\Lambda^\mu$, à droite par $\Lambda^{\mu+1}$. $F^\mu$ sera évidemment l'homologue de F relativement aux deux aspects $A$ et $A^\mu$. L'indice $\mu$ étant quelconque on voit par là que *tous les fuseaux* F, F', ... $F^{p-1}$ *sont pareils entre eux. Chacun d'eux contiendra donc le même nombre de faces, arêtes et sommets.*

*Il ne peut exister en dehors de la série* $\Lambda$, $\Lambda'$, ... $\Lambda^{p-1}$ *aucune ligne pareille à* $\Lambda$.

Supposons en effet qu'il en existât une $\Lambda_1$. Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $\Lambda_1$ est homologue de $\Lambda$; $\Lambda'$, $\Lambda''$, ... $\Lambda^{p-1}$ auraient pour homologues respectives un système de lignes $\Lambda_1$, $\Lambda_1'$, ... $\Lambda_1^{p-1}$ pareilles à $\Lambda_1$ et aboutissant toutes au point $T_1$ homologue de $T$ et extrémité de $\Lambda_1$.

D'après la première partie de la discussion qui précède, les lignes $\Lambda_1$, $\Lambda_1'$, ... $\Lambda_1^{p-1}$, pareilles aux lignes $\Lambda$, $\Lambda'$, ... $\Lambda^{p-1}$, ne pourraient avoir aucun point commun avec ces dernières. Elles seraient donc toutes contenues dans un seul fuseau, celui où est située leur extrémité commune $T_1$. D'autre part, d'après la seconde partie de la discussion, elles devraient partager la surface de $R$ en $p$ nouvelles régions, fusiformes comme les précédentes, et contenant chacune le même nombre d'éléments et d'arêtes: résultat absurde: car les lignes $\Lambda_1$, $\Lambda_1'$, ... $\Lambda_1^{p-1}$ étant toutes contenues dans l'intérieur d'un même fuseau, la partie de ce fuseau extérieure à ces lignes, et les $p-1$ autres fuseaux formeraient une seule région, contenant évidemment à elle seule plus d'éléments et d'arêtes que toutes les autres réunies.

*On aura donc* $p = k$: *et le point* $T$ *restera son propre homologue relativement à tous les aspects* $A$, $A_1$, ... $A_{k-1}$: *les autres éléments et les arêtes pourront être groupés* $k$ *à* $k$, *en réunissant ensemble les éléments pareils respectivement contenus dans chacun des* $k$ *fuseaux* F, F', ... $F^{p-1}$. Le théorème énoncé au début de cette section se trouve ainsi démontré.

Observation. Il peut arriver que toutes les parties du contour se joignant deux à deux, il ne reste plus à proprement parler une région du

polyèdre limitée par un contour continu, mais un simple système de lignes: dans ce cas il n'existe plus de fuseaux, et la démonstration qui précède perd de sa netteté. Le théorème subsiste pourtant même dans ce cas limite, comme on peut s'en assurer par les considérations suivantes:

Soient $Tb$, $Tb'$, ... $Tb^{p-1}$ les dernières arêtes des lignes $A$, $A'$, ... $A^{p-1}$ qui aboutissent en $T$: ces arêtes, ainsi que les lignes géodésiques correspondantes, étant inscrites dans l'ordre où on les rencontre en tournant dans le sens direct autour de $T$. Soient $Tc$, $Td$, ... $Tc'$ les autres arêtes émanées de $T$, s'il y en a.

Si nous comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $A^\mu$ est l'homologue de $A$, on verra comme dans la démonstration précédente que $A^{\mu+1}$ sera l'homologue de $A'$, $A^{\mu+2}$ l'homologue de $A''$ etc. Les arêtes $Tb$, $Tb'$, ... etc. de chacune de ces lignes qui aboutissent au point $T$ auront donc respectivement pour homologues $Tb^\mu$, $Tb^{\mu+1}$ etc.

Soient $Tc$, $Td$ etc. celles des arêtes émanées de $T$ et différentes des précédentes que l'on rencontre entre $Tb$ et $Tb'$ lorsqu'on tourne dans le sens direct autour de $T$. Elles devront avoir pour homologues des arêtes $Tc^\mu$, $Td^\mu$ également émanées de $T$ et que l'on devra rencontrer entre $Tb^\mu$ et $Tb^{\mu+1}$ (Proposition 3). Ces arêtes $Tc^\mu$, $Td^\mu$ seront donc essentiellement distinctes de $Tc$, $Td$ etc. ....

Enfin toutes celles des arêtes du système qui n'aboutissent pas en $T$ devront se rattacher, soit directement, soit par l'intermédiaire d'autres arêtes, à l'une des arêtes $Tb$, $Tc$, $Td$ ... $Tb^\mu$ etc. Elles ne se rattacheront d'ailleurs qu'à l'une d'elles: car si elles se rattachaient à deux d'entre elles, on pourrait couper l'une de ces deux arêtes sans rompre la continuité du système, lequel ne serait plus assimilable à une calotte polyédrique simple, ainsi que nous le supposons.

Cela posé, considérons deux arêtes quelconques pareilles $Tb$, $Tb^\mu$ parmi celles qui aboutissent au point $T$, et comparons les deux aspects $A$, $A^\mu$ relativement auxquels $Tb$ a pour homologue $Tb^\mu$. L'ensemble des arêtes qui se rattachent à $Tb$ aura évidemment pour homologue l'ensemble des arêtes qui se rattachent à $Tb^\mu$. Il y aura donc autant d'arêtes se rattachant à l'une qu'à l'autre de ces deux arêtes. Chaque arête aboutissant en $T$ ayant $p$ homologues toutes distinctes, le nombre des arêtes qui s'y rattachent sera donc au plus le $p^{\text{ième}}$ du nombre total.

*Il ne peut exister dans le contour aucun sommet pareil à T.* En effet

soit $T_1$ un semblable sommet. En comparant les aspects relativement auxquels $T_1$ est l'homologue de $T$, chaque arête émanée de $T$ et celles qui s'y enchaînent auraient pour homologues une de celles émanées de $T_1$ et celles qui s'y rattachent. Il faudrait donc que l'ensemble des arêtes qui se rattachent à une arête quelconque émanée de $T_1$ fût tout au plus le $p^{\text{ième}}$ du nombre total des arêtes. Mais parmi ces arêtes, l'une d'elles se rattache directement ou indirectement à l'une des arêtes émanées de $T$, puis par celle-là à toutes les autres arêtes émanées du même point, et par suite à toutes les arêtes du contour, moins une fraction tout au plus de la $p^{\text{ième}}$ partie. La contradiction est manifeste.

*On a donc ici encore $p = k$: et le point $T$ restera son propre homologue relativement à tous les aspects $A$, $A_1$, ... $A_{k-1}$. Les autres sommets et arêtes pourront être groupés $k$ à $k$ en réunissant les éléments et les arêtes pareilles.* Car à chaque arête se rattachant à $Tb$ par exemple, correspondront $k$ arêtes pareilles, évidemment distinctes et se rattachant respectivement à $Tb$, ... $Tb^{\mu}$, ... $Tb^{p-1}$. Le théorème est donc démontré.

$2^{\text{ème}}$ hypothèse. Supposons, en second lieu, qu'il n'existe aucun sommet qui soit son propre homologue relativement à plusieurs aspects $A$, $A_1$, ... $A_{k-1}$ mais qu'il existe une face $T$ jouissant de cette propriété.

Parmi les sommets de $T$, soit $t$ l'un de ceux dont la distance au plus voisin $s$ des sommets $s$, $s_1$, ... $s_{k-1}$ est *minimum*. (Si cette distance était nulle, les raisonnements qui vont suivre pourraient être abrégés, mais subsisteraient dans leur essence.)

Si nous comparons successivement entre eux les $p$ aspects $A$, $A'$, ... $A^{p-1}$ de la suite $A$, $A_1$, ... $A_{k-1}$ relativement auxquels $T$ est supposée sa propre homologue, $s$ aura $p$ homologues distincts $s$, $s'$, ... $s^{p-1}$ et $t$ aura $p$ homologues $t$, $t'$, ... $t^{p-1}$ tous évidemment situés sur $T$ qui est sa propre homologue.

Soit $tab \ldots t'a'b' \ldots t^{p-1}a^{p-1}b^{p-1} \ldots$ le contour de $T$ décrit dans le sens direct. Comparons entre eux les deux aspects $A$ et $A^{\mu}$ relativement auxquels $R$, $T$, $t$ ont respectivement pour homologues $R$, $T$, $t^{\mu}$: $a$, $b$, ... $t'$, $a'$ etc. auront respectivement pour homologues $a^{\mu}$, $b^{\mu}$, ... $t^{\mu+1}$, $a^{\mu+1}$, ... etc.

En effet, soit $t^{\mu}x$ l'homologue de $ta$. Les deux aspects $t^{\mu}$, $t^{\mu}x$ et $t$, $ta$ doivent être semblables: et de plus $T$ homologue à elle même sous les deux aspects $A$ et $A^{\mu}$ devra l'être encore sous ces deux nouveaux aspects. Mais $T$ étant immédiatement à droite de $ta$ porte le numéro 1 sous l'aspect $t$, $ta$:

donc elle porte le numéro 1 sous l'aspect $t^\mu$, $t^\mu x$; donc $t^\mu x$ laisse $T$ immédiatement à sa droite: donc $t^\mu x = t^\mu a^\mu$, et $a$ a pour homologue $a^\mu$; de même $b$ a pour homologue $b^\mu$. Enfin $t'$ pareil à $t$ a pour homologue un point $y$ pareil aux précédents, et situé sur $T$, et par suite faisant partie de la suite $t, t', \ldots t^\mu, t^{\mu+1} \ldots$. Ce point $y$ ne peut être que $t^{\mu+1}$: car si c'était un point plus éloigné de $t^\mu$, $t^{\mu+1}$ compris entre $t^\mu$ et $y$ serait l'homologue d'un point $s$, pareil aux précédents et compris entre $t$ et $t'$, dont $t^\mu$ et $y$ sont les homologues: or par hypothèse on ne rencontre aucun semblable point entre $t$ et $t'$.

Cela posé, traçons une ligne géodésique $\Lambda$ entre $s$ et $t$: soient $\Lambda$, $\Lambda'$, $\ldots$ $\Lambda^{p-1}$ les lignes respectivement homologues de $\Lambda$ relativement aux aspects $A$, $A'$, $\ldots$ $A^{p-1}$ et qui joignent respectivement $s'$ à $t'$, $s''$ à $t''$... etc.

Deux de ces lignes ne peuvent avoir aucun point commun: car si $\Lambda'$ et $\Lambda''$ par exemple se rencontraient en un point $u$, la distance de ce point à $s'$ comptée sur $\Lambda'$, ou à $s''$ comptée sur $\Lambda''$, serait ou différente, ou la même: dans le premier cas, soit pour fixer les idées $us' > us''$: $t'u + us''$, et a fortiori la distance de $t'$ à $s''$, serait plus courte que la ligne $t's'$, ou que la ligne égale $ts$: résultat inadmissible. Au contraire, si $us'$ était égal à $us''$, le point $u$ serait son propre homologue relativement aux deux aspects $A'$ et $A''$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Les $p$ lignes $\Lambda$, $\Lambda'$, $\ldots$ $\Lambda^{p-1}$ ne se traversant pas mutuellement partagent la région $R$ (abstraction faite de la face $T$) en $p$ fuseaux évidemment pareils entre eux: car si l'on compare les aspects $A$, $A^\mu$, $t$, $a$, $b$, $\ldots$ $t'$, $a'$, $b'$, $t''$, $\ldots$ ayant respectivement pour homologues $t^\mu$, $a^\mu$, $b^\mu$, $\ldots$ $t^{\mu+1}$, $a^{\mu+1}$, $b^{\mu+1}$, $\ldots$ $t^{\mu+2}$, $\Lambda$, $\Lambda'$, $\ldots$ $\Lambda''$ auront évidemment pour homologues les lignes pareilles $\Lambda^\mu$, $\Lambda^{\mu+1}$, $\ldots$ qui partent respectivement de $t^\mu$, $t^{\mu+1}$, $\ldots$ etc. Le fuseau F compris entre $\Lambda$ et $\Lambda_1$ aura évidemment pour homologue le fuseau $F^\mu$ compris entre $\Lambda^\mu$ et $\Lambda^{\mu+1}$.

La démonstration s'achève sans changement comme dans la première hypothèse (pag. 44).

3ème hypothèse. Supposons enfin qu'il n'existe aucun élément qui soit son propre homologue: mais une arête $T$ jouissant de cette propriété.

La démonstration qui précède s'appliquera identiquement: seulement $T$ n'ayant que deux sommets ne peut être sa propre homologue que sous deux aspects différents: on aura donc nécessairement ici $p = k = 2$.

Corollaire. *Si un polyèdre eulérien présente un élément unique de*

*son espèce, autour duquel il offre une symétrie par rotation d'ordre $k$, tous les éléments seront $k$ fois répétés, à l'exception de deux d'entre eux, qui seront chacun unique de son espèce. Les arêtes se répartissent également en groupes de $k$ arêtes pareilles.*

*Par exception, dans le cas où $k=2$, il peut n'y avoir qu'un élément unique, l'autre étant remplacé par une arête, unique de son espèce, autour de laquelle le polyèdre sera symétrique par retournement.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent:

En effet, supposons d'abord que l'élément unique soit une face $F$; elle est sa propre homologue sous $k$ aspects. La région formée par le reste du polyèdre sera sa propre homologue sous les mêmes aspects et par suite contiendra un élément à rotation d'ordre $k$, qui pourra être remplacé par une arête à retournement, si $k=2$: les autres éléments et arêtes étant $k$ fois répétés.

Si l'élément unique est un sommet, considérons un polyèdre polaire direct du proposé: l'élément unique y sera une face: il contient donc un autre élément ou arête unique de son espèce: et l'élément ou arête du polyèdre proposé dont celui-ci est le polaire sera également unique de son espèce.

## IV.

## Second théorème fondamental.

Théorème II. *Soient $S$ un sommet quelconque d'un polyèdre; $S'$, $S''$ ceux des sommets pareils à $S$ dont la distance $\delta$ à $S$ est minimum; $S'$ un sommet convenablement choisi dans cette suite; $\Lambda$ une ligne géodésique joignant $S$ à $S'$: $\Lambda$, $\Lambda_1$, etc. la suite des lignes pareilles à $\Lambda$.*

1°. *On pourra choisir le sommet $S'$ et tracer la ligne $\Lambda$ de telle sorte que les lignes $\Lambda$, $\Lambda_1$, etc. ne se traversent mutuellement en aucun point.*

2°. *De plus, chacune des lignes de la série $\Lambda$, $\Lambda_1$ sera en général composée de trois tronçons.* 1°. *Deux tronçons extrêmes de même longueur, dans chacun desquels elle se confond entièrement avec une autre ligne de la série.* 2°. *Un tronçon médian, dont aucun point, sauf celui du milieu, ne pourra appartenir à une autre ligne de la série.* (Il peut d'ailleurs se faire que les tronçons extrêmes ayant une longueur nulle, le tronçon médian reste seul: ou qu'au contraire le tronçon médian disparaisse, les tronçons extrêmes allant chacun de son côté jusqu'au milieu de la ligne.)

Pour démontrer ce théorème, nous supposerons que le sommet $S'$ ait été arbitrairement choisi dans la suite $S', S'' \ldots$; que l'on ait pris pour $\Delta$ une ligne géodésique quelconque joignant $S$ à $S'$; il pourra se faire alors qu'il y ait des points où les lignes $\Delta, \Delta_1, \ldots$ se traversent mutuellement: mais nous verrons qu'en corrigeant notre choix convenablement, nous pourrons, non seulement faire disparaître ces points d'intersection, mais satisfaire en même temps aux conditions secondaires énoncées dans le théorème.

Lemme I. *Soient $S, S_1, \ldots$ les divers sommets du polyèdre qui sont pareils à $S$. La distance mutuelle de deux quelconques d'entre eux est au moins égale à $\delta$.*

Supposons en effet que la distance de $S_1$ à $S_2$ soit $< \delta$. Comparons entre eux les deux aspects $A$ et $A_1$ relativement auxquels $S_1$ est l'homologue de $S$. Les sommets $S, S_1, S_2$ étant pareils entre eux, $S_2$ serait l'homologue d'un certain sommet $S_3$ également pareil à $S$, et qui serait situé à une distance de $S$ égale à la distance de $S_2$ à $S_1$ (Propos. 2). On aurait ainsi un sommet pareil à $S$ et situé à une distance de $S$ moindre que $\delta$: ce que nous avons supposé impossible.

Lemme II. *Deux quelconques des lignes $\Delta, \Delta_1, \ldots$ ne peuvent se rencontrer en un autre point qu'en leur milieu, si elles n'ont au moins une extrémité commune.*

Soient en effet $\Delta$ une de ces lignes, joignant ensemble les sommets $S$ et $S'$: $\Delta_1$ une autre de ces lignes, joignant ensemble d'autres sommets $S''$ et $S'''$ distincts des premiers: soit $T$ leur point d'intersection. Supposons que ce point ne soit pas précisément au milieu de chacune d'elles: que l'on ait par exemple $S''T < TS'''$ d'où, comme $S''T + TS''' = \delta$, $S''T < \frac{1}{2}\delta$. La longueur de $\Delta = ST + TS'$ étant égale à $\delta$, l'une au moins des longueurs $ST$, $TS'$ ne serait pas supérieure à $\frac{1}{2}\delta$. Soit pour fixer les idées $TS' \leqq \frac{1}{2}\delta$. On aurait $S''T + TS' < \delta$, et a fortiori la plus courte distance de $S''$ à $S' < \delta$: résultat impossible (Lemme I).

Le point $T$ sera donc nécessairement au milieu de chacune des lignes $\Delta, \Delta_1$. On aura ainsi $TS = TS' = TS'' = TS''' = \frac{1}{2}\delta$. Il résulte de là que les distances de chacun des quatre sommets $S$, $S'$, $S''$, $S'''$ à chacun des autres sont au plus égales à $\delta$. D'ailleurs elles ne peuvent être moindres (Lemme I). *Elles sont donc précisément égales à $\delta$: et les lignes $STS''$, $STS'''$* etc. *sont géodésiques.*

Lemme III. *Si deux quelconques de ces lignes $\Delta$ et $\Delta_1$, ayant une*

***extrémité commune S et leurs autres extrémités différentes S' et S'', se rencontrent en un point T, la distance comprise entre l'extrémité commune S et le point T sera la même sur chacune de ces lignes, et au plus égale à*** $\frac{1}{2}\delta$.

En effet, si la distance $ST$ comptée sur la ligne $A$ par exemple était plus grande que la même distance comptée sur la ligne $A_1$, $A$ ne serait pas une ligne géodésique, comme nous le supposons.

D'autre part, si chacune de ces deux distances était supérieure à $\frac{1}{2}\delta$, comme on a:

$$ST+TS'=\delta, \qquad ST+TS''=\delta,$$

on aurait

$$TS'+TS'' = 2\delta-2ST<\delta$$

d'où a fortiori la distance de $S'$ à $S''<\delta$: résultat impossible (Lemme I).

Si l'on prend l'aspect du polyèdre par rapport au sommet $S$ et à la première arête de la ligne $A$, puis l'aspect du polyèdre par rapport au sommet $S'$ et à la dernière arête de $A$, ces deux aspects seront habituellement différents, et s'ils sont identiques, la ligne $A$ ne sera pas habituellement sa propre homologue. Ce fait établit entre les deux extrémités de la ligne $A$ une différence que nous mettrons en lumière en disant que la ligne $A$ est ***issue*** de $S$ et ***aboutit*** à $S'$. Dans le cas particulier où les deux aspects seraient les mêmes, et où $A$ serait sa propre homologue, $A$ pourrait être considérée comme formée de deux lignes homologues coïncidentes, l'une issue de $S$ et aboutissant à $S'$, l'autre issue de $S'$ et aboutissant à $S$.

Soient maintenant $A_1$ une ligne pareille à $A$, $A$ et $A_1$ deux aspects relativement auxquels ces lignes soient homologues, $S_1$ et $S'_1$ les homologues respectifs de $S$ et de $S'$: nous dirons que $A_1$ est issue de $S_1$ et aboutit à $S'_1$.

Lemme IV. ***Si deux lignes*** $A$, $A_1$ ***de la série*** $A$, $A_1$, ... $A_{k-1}$ ***sont homologues relativement à deux aspects semblables*** $B$, $B_1$ ***les sommets*** $S$, $S_1$ ***d'où ces deux lignes sont issues sont homologues.***

En effet, soient $Sa$, $a'S'$, $S_1a_1$, $a_1S_1$ les premières et dernières arêtes de $A$ et de $A_1$. Si $A$ et $S$ pouvaient avoir pour homologues $A_1$ et $S_1$ relativement aux aspects $B$, $B_1$, $Sa$ y aurait évidemment pour homologue $S_1a_1$: les aspects $S$, $Sa$ et $S_1$, $S_1a_1$ seraient donc semblables, et $A$ y aurait pour homologue $A_1$. Mais si nous comparons entre eux les deux aspects $A$, $A_1$, $A$, $S'$, $S'a'$ y ont respectivement pour homologues $A_1$, $S_1$, $S_1a_1$: donc les deux aspects $S'$, $S'a'$ et $S_1$, $S_1a_1$ sont semblables, et $A$ y a pour homologue $A_1$. Il résulte de là que les aspects $S$, $Sa$ et $S'$, $S'a'$ seraient semblables et

que $A$ y serait sa propre homologue: nous supposons que cela n'a pas lieu puisque nous distinguons le sommet d'où $A$ est issue de celui où elle aboutit.

On déduit immédiatement de cette démonstration le corollaire suivant:

Corollaire. *Si $S$ a pour homologue $S_1$ relativement aux deux aspects $B$ et $B_1$, la ligne $A$, issue de $S$, aura pour homologue une ligne pareille, issue de $S_1$.*

Lemme V. *Deux lignes issues d'un même sommet ou y aboutissant toutes deux ne peuvent se rencontrer, sauf à leur autre extrémité.*

La démonstration est la même, que les deux lignes considérées soient issues d'un même sommet ou qu'elles y aboutissent: nous supposerons pour fixer les idées qu'elles en sont issues.

Soient $A$, $A_1$, ... $A_{k-1}$ la série des lignes pareilles à $A$ issues de $S$. Parmi les points de rencontre de ces lignes, soit $T$ l'un de ceux dont la distance $d$ à $S$ est *minimum:* désignons par $A$, ... $A_{k'-1}$ celles des lignes de la série $A$, ... $A_{k-1}$ qui passent par ce point.

*On peut admettre que $d$ est égal ou inférieur à $\frac{1}{2}\delta$:* car si l'on avait $d > \frac{1}{2}\delta$, les lignes $A$, $A_1$, ... $A_{k'-1}$ auraient leur autre extrémité commune (Lemme III) et située sur chacune d'elles à une distance de $T$ inférieure à $\frac{1}{2}\delta$. D'ailleurs ces lignes étant issues de $S$, aboutissent toutes à $S'$. On se trouverait donc encore ramené à prouver que plusieurs lignes issues d'un même sommet, ou y aboutissant ne peuvent se rencontrer à une distance de ce sommet non plus grande que $\frac{1}{2}\delta$.

Comparons entre eux les divers aspects $A$, $A_1$, ... $A_{k'-1}$ relativement auxquels les lignes $A$, ... $A_{k'-1}$ sont respectivement homologues de $A$. Le point $S$ d'où ces homologues sont issues sera son propre homologue sous tous ces aspects. Il en sera de même du point $T$ situé sur chacune de ces homologues à la distance $d$ du point $S$.

Les lignes $A$, ... $A_{k'-1}$ étant les seules parmi celles qui sont pareilles à $A$ qui soient issues du point $S$, et qui en même temps passent au point $T$ le système de ces lignes sera évidemment son propre homologue: et si l'on désigne par $\tau$, $\tau_1$, ... $\tau_{k'-1}$ les tronçons de chacune de ces lignes compris entre $S$ et $T$, le système des lignes $\tau$, $\tau_1$, ... $\tau_{k'-1}$ sera son propre homologue relativement à tous les aspects $A$, $A_1$, ... $A_{k'-1}$.

Les lignes $\tau$, $\tau_1$, ... $\tau_{k'-1}$ ont leurs extrémités communes et ne se rencontrent en aucun autre point: car ce point de rencontre serait plus rapproché de $S$ que $T$, contrairement à notre supposition. Ces lignes, en nombre $k'$, diviseront donc la surface du polyèdre en $k'$ fuseaux.

Si nous supposons les lignes $\tau$, $\tau_1$, ... $\tau_{k'-1}$ écrites dans l'ordre où on les rencontre en tournant dans le sens direct autour de $S$, lorsque nous comparerons les deux aspects relativement auxquels l'une quelconque de ces lignes $\tau_\mu$ est l'homologue de $\tau$, la suivante $\tau_{\mu+1}$ sera évidemment l'homologue de $\tau_1$: et le fuseau $F^\mu$ compris entre $\tau_\mu$ et $\tau_{\mu+1}$ sera l'homologue du fuseau F compris entre $\tau$ et $\tau_1$. *Les fuseaux sont donc tous pareils entre eux, et contiennent chacun le même nombre d'arêtes, faces et sommets.*

Cela posé, *les points T et S seraient alors chacun unique de son espèce.*

Soit en effet $T'$ un autre sommet pareil à $T$. Comparons ensemble les aspects relativement auxquels $T'$ est homologue de $T$; $\tau$, $\tau_1$, ... $\tau_{k'-1}$ auront pour homologues des lignes $\tau'$, ... $\tau'_{k-1}$ également de longueur $d$, issues d'un sommet $S'$ homologue de $S$, aboutissant à $T'$, et divisant la surface du polyèdre en $k'$ régions ayant la forme d'un fuseau comme les précédentes, et contenant chacune le même nombre de faces, d'arêtes et de sommets.

Ce résultat est absurde. En effet les lignes $\tau'$ ... $\tau'_{k-1}$ ne doivent rencontrer nulle part les lignes $\tau$ ... $\tau_{k-1}$. Car si $\tau$ et $\tau'$, par exemple, se coupaient en un point $u$, la distance de $S'$ à $S$ serait au plus égale à

$$uS+uS' = d-Tu+d-T'u = 2d-TuT'.$$

Mais $TuT'$ est au moins égal à la distance $TT'$, et $2d$ est au plus égal à $\delta$. La distance de $S$ à $S'$ serait donc inférieure à $\delta$, contrairement à notre hypothèse *).

Toutes les lignes $\tau'$ ... $\tau'_{k-1}$ seront donc contenues dans le même fuseau que $T'$. La partie du fuseau extérieure à ces lignes, et les $k'-1$ autres fuseaux formeront ainsi une seule région, contenant évidemment à elle seule plus d'éléments et d'arêtes que toutes les autres réunies.

Le point $T$ serait donc seul de son espèce. Dès lors il n'existerait qu'un seul élément autre que $T$ qui fût son propre homologue relativement à plusieurs aspects différents: et cet élément serait unique de son espèce (1$^{er}$ Théorème fondamental, Corollaire). $S$ étant son propre homologue relativement aux aspects $A$, $A_1$, ... $A_{k'-1}$, sera cet élément.

Mais du moment qu'il est question des lignes menées du point $S$ aux autres sommets pareils, nous admettons implicitement qu'il existe d'autres

*) Cette démonstration serait en défaut si $S'$ se confondait avec $S$: mais dans ce cas encore $\tau$ et $\tau'$ ne peuvent se couper: car ce sont des tronçons de lignes $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ issues de $S$, lesquelles par hypothèse n'ont aucun point d'intersection plus rapproché de $S$ que ne l'est $T$.

sommets pareils. Le point $S$ n'est donc pas unique de son espèce, et partant le lemme est démontré.

Corollaire. *Trois quelconques des lignes* $\Lambda \ldots \Lambda_{k-1}$ *ne peuvent avoir aucun point commun, si ce n'est en leur milieu.*

En effet si les trois lignes $\Lambda$, $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ avaient un point commun en dehors de leur milieu, elles devraient avoir une extrémité commune $S$ (Lemme II) et sur les trois, il y en aurait deux au moins issues de $S$ ou y aboutissant, ce qui est impossible (Lemme V).

Procédons maintenant à la démonstration du théorème, de la façon que nous avons indiquée plus haut.

Supposons que la ligne géodésique $\Lambda$ ait quelques-uns de ses points communs avec d'autres lignes homologues $\Lambda_1, \Lambda_2 \ldots$ ayant toutes une extrémité commune avec $\Lambda$. Soit parmi ces points $u$ l'un de ceux qui sont le plus rapprochés du milieu de $\Lambda$. Nous pourrons supposer que $u$ est situé ou au milieu de $\Lambda$ ou dans la première moitié de cette ligne: car si une ligne $\Lambda_1$ coupe $\Lambda$ au delà de son milieu, les lignes $\Lambda$ et $\Lambda_1$ ont leur autre extrémité commune: et l'on peut choisir arbitrairement celle des deux extrémités de $\Lambda$ que l'on considère comme son origine.

Soit donc $d \leqq \frac{1}{2}\delta$ la distance du point $u$ au sommet $S$ d'où est issue la ligne $\Lambda$. Nous considérerons dans la ligne $\Lambda$ trois tronçons distincts $\lambda$, $\lambda'$, $\mu$. Le premier $\lambda$, de longueur $d$, compris entre l'origine $S$ et $u$: le second $\lambda'$, de même longueur, et pris à partir du bout $S'$ de la ligne: enfin le troisième tronçon $\mu$ occupant la partie médiane de $\Lambda$, et dont la longueur $\delta - 2d$ s'évanouira si $d = \frac{1}{2}\delta$.

On pourra décomposer de la même manière chacune des lignes pareilles à $\Lambda$, et notamment $\Lambda_1$ qui coupe $\Lambda$ en $u$. La ligne $\Lambda$ étant issue de $S$, $\Lambda_1$ devra y aboutir (Lemme IV): d'ailleurs la distance de $u$ à $S$ comptée sur $\Lambda$ ou sur $\Lambda_1$ doit être la même $d$. La partie de $\Lambda_1$ interceptée entre $S$ et $u$ représentera donc exactement le dernier tronçon $\lambda_1'$ de cette ligne, correspondant à $\lambda'$.

Cela posé, considérons la ligne $L$ formée par la réunion des trois tronçons $\lambda'$, $\mu$, $\lambda_1'$: elle joint entre eux les sommets $S$ et $S'$, et sa longueur est $\delta$: *elle est donc géodésique. Enfin elle se confond avec une de ses homologues dans tout le tronçon* $\lambda'$; *avec une autre dans tout le tronçon* $\lambda_1'$. En effet, comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $\Lambda_1$ est l'homologue de $\Lambda$. Son dernier tronçon $\lambda_1'$ sera l'homologue du dernier

tronçon de $A$, $\lambda'$; la ligne $L$ qui contient le tronçon $\lambda'$ aura donc pour homologue une ligne $L_1$ qui contiendra dans son entier le tronçon $\lambda'_1$. Mais d'autre part comme elle contient $\lambda'_1$ elle sera l'homologue d'une autre ligne $L_2$ qui contiendra $\lambda'$.

*Sauf les coïncidences que nous venons de signaler, la ligne L n'aura aucun point commun avec celles de ses homologues qui ont avec elle une extrémité commune S.* En effet, ce point commun ne peut exister sur les tronçons extrêmes, où $L$ est déjà confondue avec une de ses homologues: car on aurait trois lignes se rencontrant ailleurs qu'en leur milieu, ce qui ne peut être (Lemme IV, Corollaire). Ce point commun ne pourrait donc exister que sur le tronçon médian $\mu$. La distance de ce point à $S$ devant d'ailleurs être la même, qu'elle soit comptée sur $L$ ou sur la ligne $L_1$, également géodésique, qui la rencontre, ce point devrait également se trouver sur le tronçon médian de $L_1$. Or la ligne $L$ a le même tronçon médian et les mêmes extrémités que $A$: $L_1$, homologue de $L$, aura donc même tronçon médian qu'une certaine ligne $A_1$, ayant les mêmes extrémités que $L_1$, et homologue à $A$. Mais $A$ et $A_1$ ayant une extrémité commune $S$, leurs tronçons médians ne peuvent se rencontrer: car leur point d'intersection serait, contrairement à notre hypothèse, plus voisin que $u$ du milieu de $A$.

Il résulte de là (Lemme II) que *la ligne L ne peut être rencontrée, et a fortiori coupée par les lignes pareilles* $L_1$, $L_2$, ... *qu'en son milieu T.*

*Chacune des lignes* $L_1$, $L_2$, ... *pareilles à L se confondra de même avec une des lignes pareilles dans chacun de ses tronçons extrêmes, et ne pourra être rencontrée d'ailleurs que par celles qui n'ont aucune extrémité commune avec elle, et seulement en son milieu.*

Comparons en effet les deux aspects relativement auxquels $L_1$ est homologue de $L$. Les lignes pareilles à $L$ et coïncidant avec elle dans ses tronçons extrêmes auront pour homologues des lignes pareilles à $L$ et par suite à $L_1$ et coïncidant avec $L_1$ dans ses tronçons extrêmes. D'autre part, si $L_1$ était rencontrée en un point $v_1$ par une autre ligne pareille $L_2$ ayant avec elle une extrémité commune, cette ligne $L_2$ serait l'homologue d'une autre ligne, pareille à $L$, avec qui elle aurait une extrémité commune, et qui la rencontrerait au point $v$ dont $v_1$ est l'homologue.

Le théorème serait déjà démontré si $\delta$ était un nombre impair: car ces lignes $L$, $L_1$ etc. n'ayant pas de sommet médian ne pourraient se couper nulle part. Mais si $\delta$ est pair, la démonstration doit être complétée ainsi qu'il suit:

Soient $L$, $L_1$, $L_2$ ... les lignes géodésiques supposées se rencontrer en un point $T$: ce point est le milieu de chacune d'elles (Lemme II); si nous considérons séparément les deux moitiés de chacune d'elles, nous aurons donc une série de lignes de longueur $\frac{1}{2}\delta$ rayonnant en étoile autour du point $T$ et ayant leurs extrémités en des sommets pareils $S$, $S_1$, $S_2$, .... D'après ce que nous venons de démontrer, il n'arrivera à chaque sommet qu'un seul rayon de l'étoile, ou, si le point $u$ se confond avec $T$, deux rayons coïncidents.

Supposons qu'un observateur se place sur la partie $R$ de la ligne $L$ comprise entre $S$ et $T$, dans le voisinage de ce dernier point: puis qu'il se mette à tourner autour du point $T$, dans le sens direct par exemple: il rencontrera successivement les divers rayons de l'étoile.

Le rayon $R$ sur lequel l'observateur était placé a son extrémité en $S$: le suivant $R_1$ aura son extrémité en un autre sommet $S_1$. Les deux rayons $R$ et $R_1$, réunis bout à bout, forment une ligne géodésique $L$, de longueur $\delta$, joignant ensemble les deux sommets pareils $S$ et $S_1$: elle jouira en outre de la propriété cherchée, *de n'être traversée par aucune de ses homologues.*

En effet, le réseau formé par les lignes $L$, $L_1$ etc. est constamment son propre homologue pour tous les aspects semblables du polyèdre (Propos. 6). Et nous avons vu que les lignes qui le composent ne se traversent mutuellement nulle part, excepté en leurs milieux, tels que $T$. La ligne $L$ fait partie de ce réseau: les lignes $L_1$, $L_2$, ... pareilles à $L$ en font donc également partie: d'ailleurs aucune des lignes du réseau ne traverse $L$ au point $T$. Donc $L$ ne sera traversée en aucun point par les lignes pareilles $L_1$, $L_2$, ....

De même *les lignes $L$, $L_1$, ... pareilles à $L$ ne se traverseront mutuellement nulle part:* Comparons en effet les deux aspects relativement auxquels $L_1$ est l'homologue de $L$. Si $L_1$ était traversée par une ligne pareille $L_2$, $L$ le serait par une ligne pareille $L_3$ dont $L_2$ serait l'homologue.

Le théorème est donc complètement démontré.

## V.

## Etude d'un cas particulier.

On peut déduire aisément des théorèmes qui précèdent la solution complète de la question proposée: elle fait l'objet des sections suivantes:

Considérons un polyèdre présentant une symétrie quelconque. Soit $E$ l'un des éléments autour desquels la symétrie par rotation est d'ordre *maximum* et par suite, dont l'espèce est la moins nombreuse. On peut supposer provisoirement que cet élément est un sommet $S$: car si c'était une face, on pourrait ramener ce cas au précédent par la considération du polyèdre polaire.

Le cas où l'élément $S$ est unique de son espèce est complètement résolu par le corollaire du théorème I$^{er}$: nous admettrons donc dès l'abord qu'il existe d'autres éléments pareils à celui-là.

Soient $S'$ un sommet convenablement choisi parmi ceux qui sont pareils à $S$ et dont la distance à $S$ est un *minimum* $\delta$; $\Lambda$ une ligne géodésique tracée entre $S$ et $S'$ de la manière que nous avons indiquée pour que les lignes pareilles $\Lambda$, $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, ... ne se traversent mutuellement nulle part. Nous avons vu (Théorème III, Lemme IV) que deux de ces lignes issues d'un même sommet ne peuvent se rencontrer avant leur extrémité: mais elles pourraient aboutir toutes deux à un même sommet: ce cas, qui troublerait la marche générale de nos démonstrations, mérite d'être examiné à part et tout d'abord.

Supposons donc *que parmi les lignes pareilles à $\Lambda$ issues d'un même sommet $S$, il en existe plusieurs aboutissant à un même sommet $S'$.*

Soient $\Lambda$, $\Lambda'$, ... $\Lambda^{k-1}$ ces lignes, écrites dans l'ordre où on les rencontre en tournant en sens direct autour de $S$. Ces lignes ne se coupant mutuellement nulle part, *diviseront la surface du polyèdre en $k$ fuseaux distincts, contenant chacun le même nombre d'arêtes, faces et sommets.*

En effet, considérons par exemple deux fuseaux F et F$^{\mu}$, compris, le premier entre $\Lambda$ et $\Lambda'$, le second entre $\Lambda^{\mu}$ et $\Lambda^{\mu+1}$. Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $\Lambda^{\mu}$ est l'homologue de $\Lambda$: $S$, origine commune de ces deux lignes, est son propre homologue (Section précédente, Lemme IV): et $\Lambda^{\mu+1}$ sera l'homologue de $\Lambda'$.

En effet, chacune des lignes $\Lambda$, ... $\Lambda^{\mu}$ etc. issues de $S$ et aboutissant à $S'$ a pour homologue une ligne pareille issue de $S$ et aboutissant à $S'$. Le système de ces lignes est donc à l'ordre près le même que celui de leurs homologues. D'ailleurs l'ordre de succession autour de $S$ doit être le même (Proposition 10): donc $\Lambda'$ qui succède à $\Lambda$ aura pour homologue $\Lambda^{\mu+1}$ qui succède à $\Lambda^{\mu}$ etc.

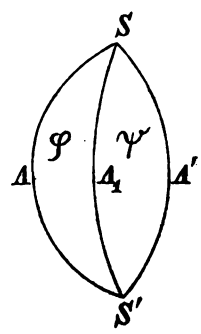
Le fuseau F reste à la droite d'un observateur qui part de $S$ et décrit

le contour $AA'$: $F^\mu$ reste à la droite d'un observateur qui part de $S$ et décrit le contour homologue $A^\mu A^{\mu+1}$: $F^\mu$ est donc l'homologue de F (Proposition 15). Donc F et $F^\mu$ contiendront le même nombre de faces, arêtes et sommets.

*Les deux sommets S et S' seront seuls de leur espèce.* Soient en effet $S_1$ un autre sommet pareil, $A_1$ une ligne pareille à $A$ et issue de ce sommet. Comparons ensemble les deux aspects $A$, $A_1$ relativement auxquels $S_1$ et $A_1$ sont les homologues de $S$ et $A$; $A$, $A'$, ... $A^{k-1}$, pareilles à $A$, issues du même point $S$ et aboutissant au même point $S'$ auront pour homologues des lignes $A_1$, $A_1'$, ... $A_1^{k-1}$ pareilles à $A$ et par suite à $A_1$ issues de $S_1$ et aboutissant toutes à un sommet pareil $S_1'$. Ces lignes devraient partager la surface du polyèdre en $k$ régions fusiformes, contenant chacune le même nombre d'arêtes, faces et sommets; résultat absurde: car ces lignes ne pouvant traverser nulle part les précédentes $A$, $A'$, ... $A^{k-1}$ seront toutes contenues dans le fuseau qui contient $S_1$; la partie de ce fuseau extérieure à ces lignes, et les $k-1$ autres fuseaux constitueront donc une seule région contenant évidemment à elle seule plus d'éléments et d'arêtes que toutes les autres réunies.

Le sommet $S'$ étant le seul qui soit de même espèce que $S$, toutes les lignes pareilles à $A$ et issues de $S$, qui doivent nécessairement aboutir à un sommet pareil à $S$, aboutiront à $S'$: elles seront donc toutes contenues dans la suite $A$, $A'$, ... $A^{k-1}$. Réciproquement il devra y avoir $k$ lignes $A_1 \ldots A_1^{k-1}$ pareilles à $A$ issues du point $S'$ et aboutissant toutes à un sommet pareil à $S'$, sommet qui ne peut être que $S$. Les $k$ fuseaux F, F', ... $F^{k-1}$ étant tous pareils, contiendront chacun une de ces lignes.

La ligne $A_1$ contenue dans le fuseau F le partage en deux régions distinctes: celle de gauche $\varphi$ est limitée à gauche en s'éloignant de $S$ par la ligne $A$ issue de $S$, et à droite par $A_1$ issue de $S'$: celle de droite $\psi$ est limitée à gauche par $A_1$ issue de $S'$, et à droite par $A'$ issue de $S$. Chacun des autres fuseaux $F^\mu$ est partagé de même en région gauche $\varphi^\mu$ et région droite $\psi^\mu$.




*L'ensemble des régions gauches $\varphi$, $\varphi'$, ... $\varphi^{k-1}$ est constamment son propre homologue pour tous les aspects semblables du polyèdre. De même pour l'ensemble des régions droites $\psi$ ... $\psi^\mu$ ... $\psi^{k-1}$.*

En effet comparons ensemble deux aspects semblables quelconques, et supposons d'abord que l'homologue de $A$ relativement à ces deux aspects soit une ligne issue de $S$, telle que $A^\mu$. La région gauche de $F$ est constamment à la droite d'un observateur qui décrit le contour $AA_1$ à partir de $S$: la région gauche de $F^\mu$ est également à la droite d'un observateur décrivant le contour homologue $A^\mu A_1^\mu$ à partir du même point $S$, qui est son propre homologue; la région gauche de $F$ a donc pour homologue la région gauche de $F^\mu$.

Comparons maintenant deux aspects $A$, $A_1^\mu$ relativement auxquels $A$ ait pour homologue $A_1^\mu$. Le point $S'$, d'où $A_1^\mu$ est issue, sera homologue de $S$. Les lignes $A \dots A^{k-1}$, $A_1 \dots A_1^{k-1}$ forment un système qui est son propre homologue (Propos. 6). Or ces lignes se succèdent autour de $S$ dans l'ordre suivant: $A$, $A_1$, $A'$, $A_1'$, $\dots$ $A^\mu$, $A_1^\mu$ etc. et leurs homologues respectives se succèdent dans le même ordre autour de $S'$ (Propos. 3). Or ces lignes se succèdent autour de $S'$ dans l'ordre $A_1^\mu$, $A^\mu$, $\dots$ $A_1'$, $A'$, $A_1$, $A$ inverse du précédent. Donc $A_1^\mu$ étant l'homologue de $A$, $A^\mu$ est l'homologue de $A_1$. Cela posé, un observateur partant de $S$ et décrivant le contour $AA_1$ laisse à sa droite la région gauche de $F$: son homologue sera donc la région gauche de $F^\mu$, laquelle reste à la droite d'un observateur décrivant le contour homologue $A_1^\mu A^\mu$ à partir de $S'$.

Ainsi l'homologue d'une région gauche est toujours une autre région gauche: de même pour les régions droites.

Comparons spécialement entre eux les deux aspects relativement auxquel $A$ a pour homologue $A_1$. La région $\varphi$ comprise entre ces deux lignes est, d'après ce qui précède, sa propre homologue sous ces deux aspects: elle présente donc *un élément avec symétrie de rotation binaire, ou une arête avec symétrie de retournement* (Théorème 1$^{er}$). La même observation s'applique à chacune des autres régions, gauches ou droites.

Nous avons supposé implicitement que les lignes $A$, $A'$, $\dots$ $A^{k-1}$ sont distinctes, dans tout ou partie de leur étendue, des lignes $A_1$, $A_1'$, $\dots$ $A_1^{k-1}$. Si au contraire $A_1$ se confond avec $A$ et par suite $A_1^\mu$ avec $A^\mu$, les régions $\varphi \dots \varphi^\mu$ respectivement comprises entre $A$ et $A_1$, entre $A^\mu$ et $A_1^\mu$, se réduiraient chacune à une simple ligne. Mais cette ligne étant sa propre homologue relativement à deux aspects différents, présenterait encore en son milieu un élément à rotation binaire, ou une arête à retournement (1$^{er}$ théorème fondamental).

En récapitulant ce qui précède, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Les polyèdres ici considérés possèdent deux sommets S et S', pareils entre eux, et seuls de leur espèce. Ils présentent autour de chacun de ces sommets une symétrie par rotation dont l'ordre k peut être quelconque.*

*Les k lignes géodésiques pareilles* $A$, $A'$, ... $A^{k-1}$, *issues de S et aboutissant à S', et leurs homologues* $A_1$, $A_1$, ... $A_1^{k-1}$, *issues de S' et aboutissant à S, divisent la surface du polyèdre en 2k régions; k de ces régions sont situées à la droite des lignes* $A$, $A'$, ... $A^{k-1}$ *lorsqu'on se meut sur ces lignes de S en S': ces régions sont pareilles entre elles: les régions situées à gauche de ces lignes sont également pareilles entre elles. Chaque région contient un élément autour duquel existe une symétrie de rotation binaire, ou une arête avec symétrie par retournement. Les autres éléments ou arêtes seront deux fois répétés dans une même région, soit 2k fois dans le polyèdre entier.*

*Ces résultats subsistent lors même que les lignes* $A_1$, $A_1$, ... $A_1^{k-1}$ *se confondraient respectivement avec celles de la série* $A$, $A'$, ... $A^{k-1}$ *auquel cas, l'un des deux systèmes de régions se réduirait à une simple ligne.*

Si l'élément le moins répété n'était plus un sommet, mais une face, on aurait de nouveaux polyèdres, polaires des précédents: ils contiendraient évidemment comme ceux-ci:

1°. *Deux éléments extrêmes E et E' doués d'une symétrie de rotation dont l'ordre k peut être quelconque.*

2°. *Deux autres systèmes d'éléments ou d'arêtes remarquables: chaque système renfermant k éléments doués de symétrie de rotation binaire, ou k arêtes douées de la symétrie de retournement:*

*Tous les autres éléments et arêtes étant 2k fois répétés.*

On peut donner à ce genre de symétrie le nom de *symétrie par rotation et renversement.*

## VI.

## Solution générale du problème.

Supposons maintenant: 1° *que l'élément le moins répété soit un sommet S: 2° qu'il ne soit pas unique de son espèce: 3° que les lignes pareilles à* $A$ *et issues d'un même sommet* $S_1$ *aboutissent toutes à des sommets différents.*

C'est là le cas général qui nous reste à traiter. Nous le diviserons en trois autres, en faisant successivement les hypothèses suivantes :

1°. Il n'existe *aucune symétrie par rotation* autour du sommet $S$.

2°. Il existe autour de ce sommet *une symétrie par rotation binaire.*

3°. Il existe autour de ce sommet *une symétrie par rotation au moins ternaire.*

### 1er Cas.

Le polyèdre ne présentant aucune symétrie par rotation autour des sommets $S$, $S'$, ... pareils à $S$, il ne passe par chacun de ces sommets que deux des lignes $A$, $A_1$ etc. l'une issue de ce point, l'autre y aboutissant; car si deux de ces lignes, $A$ et $A_1$ par exemple, étaient issues du même sommet $S_1$, en comparant les deux aspects relativement auxquels $A_1$ est l'homologue de $A$, le point $S$, origine commune de ces deux lignes, serait son propre homologue. Il y aurait donc symétrie par rotation autour de ce point.

Soient $A$ la ligne géodésique issue de $S$ et aboutissant à $S'$: $A'$ la ligne pareille issue de $S'$ et aboutissant à $S''$: $A''$ la ligne pareille issue de $S''$ et aboutissant à $S'''$ etc. On arrivera enfin à une ligne $A^{k-1}$ aboutissant à l'un des sommets précédents $S$, $S'$, ... $S^{k-1}$. Ce sommet ne peut être que $S$: car si c'était $S^{\mu}$, par exemple, on aurait deux lignes pareilles $A^{\mu-1}$, $A^{k-1}$ aboutissant à $S^{\mu}$, ce qui ne peut être, comme nous venons de le voir.

Cela posé, le contour formé par les lignes $A'$, $A_1'$, ... $A^{k-1}$ sera son propre homologue pour $k$ aspects du polyèdre. Car si nous comparons ensemble deux aspects relativement auxquels $A$ ait pour homologue une ligne quelconque de la série, $A^{\mu}$, l'extrémité $S'$ de $A$ aura pour homologue l'extrémité $S^{\mu+1}$ de $A^{\mu}$; $A'$ issue de $S'$ aura pour homologue une ligne pareille issue de $S^{\mu+1}$, et qui ne peut être que $A^{\mu+1}$ etc.

Il existera donc (Théorème Ier) dans chacune des deux régions circonscrites par ce contour un élément autour duquel aura lieu une rotation d'ordre $k$: si $k=2$ ces éléments pourront être remplacés par des arêtes, offrant la symétrie de retournement.

S'il existait un élément présentant une symétrie par rotation, cet élément serait, contrairement à notre supposition, moins répété que l'élément $S$ autour duquel aucune rotation n'est possible.

*Il existera donc nécessairement des arêtes offrant la symétrie de retournement.*

Soit $ab$ l'une de ces arêtes: deux cas pourront se présenter:

1°. L'arête $ab$ est seule de son espèce.

2°. Il existe d'autres arêtes $a'b'$ etc. de même espèce que $ab$.

1$^{er}$ Sous-Cas. *Si l'arête ab est seule de son espèce, il y aura nécessairement une autre arête au moins autour de laquelle existera la symétrie par retournement.*

Supposons en effet qu'il n'en existe aucune, et comparons entre eux les deux aspects semblables du polyèdre pris par rapport à $a$, $ab$ et par rapport à $b$, $ba$. L'arête initiale $ab$ serait sa propre homologue: aucun élément ne serait son propre homologue: car il présenterait une symétrie par rotation: aucune autre arête ne serait sa propre homologue: car elle présenterait la symétrie par retournement. Si donc on groupait chaque arête et chaque élément avec son homologue, on voit que le nombre des arêtes serait impair et celui des éléments pair: résultat en contradiction évidente avec la formule d'*Euler:*

$$F+S = A+2.$$

Il existe donc au moins une arête $cd$ qui sera sa propre homologue relativement aux deux aspects $a$, $ab$ et $b$, $ba$. Soient $c$ celle de ses deux extrémités la moins éloignée de $a$, $\mathcal{A}$ une ligne géodésique issue de $a$ et aboutissant à $c$: $\mathcal{A}'$ l'homologue de cette ligne issue du point $b$ homologue de $a$ et aboutissant à $d$ homologue de $c$. Les deux lignes $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ n'ont aucun point commun: car si elles en avaient un $t$, il serait à égale distance de $a$ et de $b$, auquel cas il serait son propre homologue, ce qui ne peut être, ou à des distances inégales: s'il était, par exemple, plus proche de $a$ que de $b$, on aurait $at+td<bt+td<bd<ac$, et a fortiori la distance de $a$ à $d<ac$, ce qui est contraire à notre supposition.

Cela posé, les deux lignes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, jointes à $ab$ et à $cd$, forment un contour fermé $acdb$ qui découpe la surface du polyèdre en deux régions $R$ et $R'$, dont la première est située à droite de $\mathcal{A}$ et à gauche de $\mathcal{A}'$, la seconde à gauche de $\mathcal{A}$ et à droite de $\mathcal{A}'$, lorsqu'on suit ces deux lignes en s'éloignant de leurs origines respectives $a$ et $b$. Après le retournement $\mathcal{A}$ étant l'homologue de $\mathcal{A}'$ et réciproquement, les deux régions sont réciproquement homologues. Donc *tout élément et toute arête de l'une des régions a dans l'autre son homologue dont il sera essentiellement distinct. Les deux arêtes ab, cd sont donc les seules qui soient leurs propres homologues.*

2$^{ème}$ Sous-Cas. *Supposons qu'il existe d'autres arêtes a'b', etc. de même espèce que ab.*

[illegible] aucune extrémité commune. En [illegible] arêtes pareilles, l'aspect $a$, $ac$ serait le même [illegible] par rotation autour du sommet $a$, [illegible].

[illegible] des extrémités de toutes ces arêtes, soient $a$, $a'$ deux de [illegible] une ligne géodésique issue de $a$ [illegible] lignes pareilles à $\Lambda$.

[illegible] *ne se traversent nulle part*. En [illegible] se coupaient en leur milieu, ce point [illegible] des deux lignes serait son propre [illegible] auxquels $\Lambda_1$ est l'homologue [illegible] par rotation que nous avons [illegible] 3°. Deux lignes $\Lambda$, $\Lambda_1$ ayant leurs extrémités $a$ et [illegible] différentes, ne peuvent se couper: [illegible] ne pouvant être simultanément au milieu de [illegible] des quatre distances $ta$, $ta'$, $ta_1$, $ta'_1$ serait [illegible] $ta_1 - ta_1 = \delta$ l'une au moins des [illegible] serait au plus égale à $\frac{1}{2}\delta$. On aurait [illegible] la distance de $a$ à $a_1 < \delta$; résultat contraire [illegible] 3°. Si deux lignes $\Lambda$, $\Lambda_1$ ayant chacune une de leurs [illegible] se rencontrent en un point $t$, la distance [illegible] sera la même, soit qu'on la compte sur $\Lambda$, [illegible] En effet, supposons la distance comptée [illegible] l'autre extrémité de $\Lambda$. Si $\Lambda_1$ a [illegible] ce point à $a'$ est tout au plus égale à [illegible] $at - ta = \delta$. De même, si $\Lambda_1$ se terminait [illegible] serait moindre que $\delta$; résultat contraire [illegible] 4°. De plus la distance $d$ est inférieure à $\frac{1}{2}\delta$ si les [illegible] extrémités $a'$, $a''$ situées sur des arêtes [illegible] $at = ic > \frac{1}{2}\delta$ on aurait contrairement à notre [illegible] $= 2\delta^2 - 2at < \delta$. 5°. Deux lignes $\Lambda$, $\Lambda_1$ [illegible] aboutissant toutes deux ne peuvent se couper: [illegible] étant situé à la même distance de l'origine de [illegible] lignes, serait son propre homologue, lorsqu'on comparerait ensemble [illegible] auxquels elles sont homologues. 6°. Trois [illegible] en un même point: car ces trois lignes au-

raient leur extrémité sur une même arête, et il y en aurait au moins deux issues de cette arête, ou y aboutissant.

Ces préliminaires posés, supposons que $A$ rencontre les lignes pareilles en certains points: soit $u$ celui de ces points qui sera le plus rapproché du milieu de $A$: nous pouvons le supposer dans la première moitié de $A$: car on peut choisir arbitrairement celle des deux extrémités de cette ligne que l'on prend pour origine. Soit donc $d < \frac{1}{2}\delta$ la distance de $u$ au sommet $a$. Nous considérerons dans la ligne $A$ trois tronçons distincts: le premier $\lambda$ de longueur $d$ compris entre $a$ et $u$: le dernier $\lambda'$ de longueur égale au premier, et pris à partir de l'autre extrémité $a'$: enfin un tronçon médian $\mu$. Nous pourrons décomposer de même chacune des lignes pareilles à $A$, et notamment la ligne $A_1$ qui la rencontre en $u$. Cette ligne doit aboutir à l'arête $ab$ (2° et 4°), d'ailleurs la distance de $u$ à $ab$, comptée sur $A$ ou sur $A_1$, doit être la même $d$ (3°). La partie de $A_1$ interceptée entre $u$ et $ab$ représentera donc exactement le dernier tronçon $\lambda_1'$ de cette ligne.

Considérons maintenant la ligne géodésique $L$ formée par la réunion des trois tronçons $\lambda'$, $\mu'$, $\lambda_1'$. Si l'on compare entre eux les aspects du polyèdre relativement auxquels $A$, $A_1$ etc. sont successivement homologues de $A$, le système des lignes $A$, $A_1$ etc. sera constamment son propre homologue. La ligne $L$ étant exclusivement formée de tronçons empruntés à ce système, il en sera donc de même de ses homologues. Une de ces homologues $L_1$ se confondra avec $L$ dans tout le tronçon $\lambda'$: une autre $L_2$ dans tout le tronçon $\lambda_1'$. En effet, si nous comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $A_1$ est homologue de $A$, le dernier tronçon $\lambda_1'$ de $A_1$ sera l'homologue du dernier tronçon $\lambda'$ de $A$. La ligne $L$ qui contient le tronçon $\lambda'$ aura donc pour homologue une ligne $L_2$ qui contiendra dans son entier le tronçon $\lambda_1'$. D'autre part, comme elle contient $\lambda_1$, elle sera l'homologue d'une ligne $L_1$ qui contiendra $\lambda'$.

Sauf ces coïncidences, la ligne $L$ n'aura aucun point commun avec ses homologues $L_1$, $L_2$ etc. En effet son tronçon médian est le même que celui de $A$, qui n'était rencontré, ainsi que nous l'avons supposé, par aucune des lignes du système $A$, $A_1$ etc., système qui contient toutes les lignes $L$, $L_1$ etc. D'autre part, dans les autres tronçons, elle est déjà confondue avec une de ses homologues, et si elle en rencontrait une autre, on aurait trois lignes se rencontrant en un même point, ce qui est impossible (6°).

En comparant successivement ensemble les aspects relativement aux-

quels $L$ a pour homologues $L$, $L_1$, $L_2$, ... on voit que toutes ces lignes se confondent deux à deux dans leurs tronçons extrêmes, et se séparent entièrement dans leur tronçon médian.

Ce premier point acquis, soient $L$ une des lignes précédentes: $a$ son origine, $a'$ le sommet pareil à $a$ auquel elle aboutit. Soit $L'$ la ligne pareille à $L$, issue de $a'$ et aboutissant en un autre sommet $a''$: soit de même $L''$ la ligne pareille à $L$ issue de $a''$: elle aboutira à un sommet $a'''$ etc. .... La suite des sommets pareils à $a$ étant limitée, on arrivera enfin à une ligne $L^{k-1}$ aboutissant à l'un des sommets précédents. *Le premier sommet sur lequel on retombera sera a:* car si la ligne $L^{k-1}$ aboutissait à un autre sommet $a^{\mu}$, on aurait deux lignes pareilles $L^{\mu-1}$ et $L^{k-1}$ aboutissant à ce point, qui présenterait par suite une symétrie de rotation, contrairement à nos hypothèses.

Les lignes $L$, $L'$, ... $L^{k-1}$ forment un contour fermé, qui est son propre homologue relativement à $k$ aspects: il existera donc dans chacune des deux régions limitées par ce contour, un élément doué de symétrie de rotation d'ordre $k$, ou si $k=2$, une arête avec retournement (Théorème 1$^{er}$).

Le cas d'une symétrie par rotation étant exclu de nos hypothèses, nous aurons forcément $k=2$.

Donc *si la ligne L issue de a, aboutit à a', réciproquement son homologue L' issue de a', aboutira au point de départ a.*

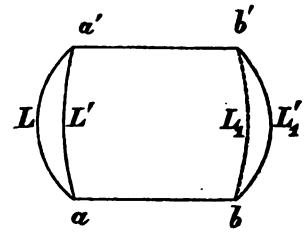
Cela posé soit $a'b'$ l'arête pareille à $ab$ dont le sommet $a'$ fait partie: le sommet $b'$ étant pareil à $a$, on pourra déterminer à partir de ce point deux lignes $L_1$, $L_1'$ formant un système pareil au système $L$, $L'$: et de même que $L$ et $L'$ ont leurs extrémités en un sommet $a'$ situé sur une arête pareille à $ab$, $L_1$, $L_1'$ auront leurs extrémités en un point $b''$ situé sur une arête $b''a''$ également pareille à $ab$.

A partir du sommet restant $a''$ pareil aux précédents, on pourra déterminer deux lignes $L_2$ et $L_2'$ formant un système pareil au système $L$, $L'$ et se terminant en un point $a'''$ d'une arête pareille aux précédentes. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'on arrive à un système de deux lignes $L_{k-1}$, $L_{k-1}'$ dont l'extrémité, au lieu de se trouver sur une arête nouvelle, vienne tomber sur l'une des arêtes qui nous ont déjà servi. *Cette extrémité tombera nécessairement en b:* car supposons qu'elle tombe en un autre sommet, tel que $a$. On aurait deux lignes pareilles $L$ et $L_{k-1}'$ toutes deux issues de ce point, qui présenterait par suite une symétrie de rotation, contrairement à nos hypothèses.

Considérons plus particulièrement le système formé par l'arête $ab$, la

ligne $L$, l'arête $a'b'$, la ligne $L_1$ issue de $b'$, l'arête $b''a''$, la ligne $L_2$ issue de $a''$ etc., enfin la ligne $L_{k-1}$, aboutissant en $b$. Ce système forme un contour fermé qui reste son propre homologue sous $k$ aspects distincts. Car si l'on compare entre eux les aspects relativement auxquels $L_\mu$, par exemple, est l'homologue de $L$, l'arête à laquelle aboutit $L_\mu$ sera l'homologue de $a'b'$ à laquelle aboutit $L$, $L_{\mu+1}$ issue de l'autre bout de cette dernière arête sera l'homologue de $L_1$ issue de $b'$ etc.

On pourra donc appliquer encore ici le théorème I$^{er}$ et comme il n'existe, par hypothèse, aucune symétrie par rotation, on aura nécessairement $k = 2$.




Ainsi *les deux lignes* $L_1$, $L_1'$ *partant du point* $b'$ *arriveront en* $b$*: de telle sorte que les deux arêtes pareilles* $ab$, $a'b'$ *se trouveront réunies par quatre lignes* $L$, $L'$, $L_1$, $L_1'$. Ces quatre lignes ne se traversent mutuellement nulle part. D'ailleurs, si nous supposons, ce qui est permis, que l'ordre de succession des lignes $ab$, $L$, $L'$ autour de $a$ soit $ab$, $L$, $L'$, l'ordre de succession de leurs homologues autour de $b'$ sera $b'a'$, $L_1$, $L_1'$: les six lignes $ab$, $a'b'$, $L$, $L'$, $L_1$, $L_1'$ diviseront donc la surface du polyèdre en quatre régions.

1°. Une calotte polyédrique $R$ comprise entre les arêtes $ab$, $a'b'$ et les lignes $L$ et $L_1$.

2°. Une autre calotte $R'$ comprise entre $ab$, $a'b'$, $L'$ et $L_1'$.

3°. Un fuseau F compris entre $L$ et $L'$.

4°. Un autre fuseau F' compris entre $L_1$ et $L_1'$.

(Les deux lignes $L$ et $L'$ pourraient se confondre dans une partie de leur étendue, ou même en totalité: il en serait de même de leurs homologues $L_1$ et $L_1'$. Dans ce cas les deux fuseaux se réduiraient à de simples lignes. Mais les calottes $R$ et $R'$ ne peuvent disparaître: car les deux lignes $L$ et $L'$, par exemple, ayant leurs extrémités différentes, ne peuvent se confondre dans leurs tronçons extrêmes: elles ne peuvent donc se rencontrer en aucun point.)

Si maintenant nous comparons entre eux les deux aspects relativement auxquels $b$ est homologue de $a$ et réciproquement, $L$ issue de $a$ aura pour homologue $L_1'$ issue de $b$. De même $L'$, $a'$, $b'$, $L_1'$, $L_1$ auront respectivement pour homologues $L_1$, $b'$, $a'$, $L$, $L'$: $R$ et $R'$ seront donc réciproquement homologues, ainsi que F et F'.

Chacune des deux régions $R$ et $R'$ contiendra donc le même nombre

de faces que sa conjuguée: de même pour les deux fuseaux F et F'. *Chacune de ces quatre régions contient donc tout au plus la moitié des faces du polyèdre.*

*Il n'existe aucune arête nouvelle pareille à ab.* En effet, s'il en existait une $\alpha\beta$ considérons les deux aspects relativement auxquels $\alpha\beta$ est homologue de $ab$: $a'b'$ aurait pour homologue une arête $\alpha'\beta'$ qui serait reliée à $\alpha\beta$ par quatre lignes $\Lambda$, $\Lambda'$, $\Lambda_1$, $\Lambda_1'$ respectivement homologues de $L$, $L'$, $L_1$, $L_1'$.

L'arête $\alpha'\beta'$ ne peut se confondre avec aucune des deux précédentes $ab$, $a'b'$. En effet, supposons que $\alpha'\beta'$ se confonde avec $ab$, et que, par exemple, $\alpha'$ se confonde avec $a$: on aurait deux lignes pareilles, $L$ et $\Lambda'$ issues de ce point et aboutissant l'une à $a'$, l'autre à $a$. Il y aurait donc symétrie par rotation autour de ce point.

Les lignes $\Lambda$, $\Lambda'$, $\Lambda_1$, $\Lambda_1'$ ayant leurs extrémités sur des arêtes autres que celles où sont les extrémités de $L$, $L'$, $L_1$, $L_1'$, et ne pouvant couper nulle part ces dernières lignes, seraient contenues en entier dans celle des régions $R$, $R'$, F, F' qui contient l'arête $\alpha\beta$. Soit pour fixer les idées $R$ cette région. D'autre part $\Lambda$, $\Lambda'$, $\Lambda_1$, $\Lambda_1'$ devraient partager le polyèdre en quatre nouvelles régions, pareilles aux précédentes, et par suite contenant chacune au maximum la moitié des faces du polyèdre: résultat absurde: car les trois autres régions $R'$, F, F' jointes à la portion de $R$ extérieure aux lignes $\Lambda$, $\Lambda'$, $\Lambda_1$, $\Lambda_1'$ ne forment en tout qu'une de ces nouvelles régions, laquelle renferme évidemment plus de la moitié du polyèdre.

*Les arêtes pareilles ab, a'b' étant ainsi au nombre de deux, et chacune d'elles douée de la symétrie de retournement, le polyèdre sera pareil à lui-même sous quatre aspects différents.*

Toute symétrie par rotation étant exclue, la région $R$ qui est sa propre homologue par rapport à deux aspects du polyèdre contiendra nécessairement une arête douée de la symétrie de retournement: la région pareille $R'$ contiendra une arête pareille: à chaque autre arête et à chaque élément de $R$ correspondra une autre arête ou un autre élément pareil dans la même région, et deux autres pareils dans la région $R'$.

Les régions pareilles F et F' dont chacune est sa propre homologue par rapport à deux aspects du polyèdre, offriront de même un système de deux arêtes pareilles avec symétrie de retournement, les autres arêtes et les éléments étant deux fois répétés dans chaque région, soit quatre fois en tout.

Il résulte de cette discussion que les polyèdres considérés dans ce paragraphe se réduisent à deux types distincts.

1^er^ type. *Polyèdres semblables à eux-mêmes sous deux aspects différents. Ils ont à chaque extrémité une arête unique de son espèce, avec symétrie par retournement. Les autres arêtes et les éléments sont deux fois répétés. Deux lignes géodésiques pareilles $A$ et $A'$ y joignant ensemble les arêtes uniques, les partagent en deux moitiés pareilles.*

2^ème^ type. *Polyèdres semblables à eux-mêmes sous* quatre *aspects différents.* Trois *systèmes différents de* deux *arêtes pareilles entre elles avec symétrie de retournement. Les autres arêtes, et les éléments sont* quatre *fois répétés. Quatre lignes géodésiques pareilles $L$, $L'$, $L_1$, $L'_1$ joignant ensemble les extrémités des deux arêtes d'un même système partagent le polyèdre en* quatre *régions pareilles deux à deux, et dont chacune contient l'une des arêtes à retournement.*

Le premier de ces deux genres de symétrie pourrait s'appeler *symétrie par retournement:* le second *symétrie par retournement et renversement.*

## II^ème^ Cas.

*Supposons maintenant que les sommets les moins répétés présentent une symétrie par rotation binaire.*

Soit $A$ une ligne géodésique menée d'un sommet $S$ à l'un des sommets pareils les plus voisins $S'$ et choisie de manière à ne pas traverser ses homologues. Deux lignes pareilles à $A$ sont issues du point $S'$: et l'on doit supposer que l'une au moins de ces deux lignes n'aboutit pas en $S$, l'hypothèse contraire ayant déjà été discutée (Section V). Supposons que l'observateur se place sur $A$ dans le voisinage de $S'$ et tourne autour de ce dernier point, dans le sens direct, par exemple. Soit $A'$ la première ligne pareille à $A$ et n'aboutissant pas à $S$ qu'il rencontre sur son passage: soit $S''$ l'extrémité de cette ligne. Soit de même $A''$ celle des lignes pareilles à $A$, issues de $S''$, et n'aboutissant pas à $S'$, qu'on rencontre la première en tournant autour de $S''$ dans le sens direct et à partir de $A'$; $A''$ aboutira à un sommet tel que $S'''$ autour duquel on répétera la même manoeuvre. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à une ligne $A^{k-1}$ aboutissant à l'un des sommets $S$, $S'$, $S''$ précédemment déterminés.

Ce sommet ne pourra être que $S$. Supposons en effet que ce soit $S''$ et comparons les aspects relativement auxquels $A''$ est l'homologue de $A$; $S''$

origine de $A^\mu$ sera l'homologue de $S$, origine de $A$. De même $S^{\mu+1}$, où aboutit $A^\mu$ sera l'homologue do $S'$. $A'$ aura pour homologue $A^{\mu+1}$. En effet $A'$ étant issue de $S'$ et n'aboutissant pas en $S$, doit avoir pour homologue une ligne pareille issue de $S^{\mu+1}$ et n'aboutissant pas en $S^\mu$. S'il n'existe qu'une seule ligne jouissant de ces propriétés ce sera $A^{\mu+1}$. S'il en existe deux $A^{\mu+1}$ et $x'$, elles seront respectivement les homologues de $A'$, et d'une autre ligne pareille $x$ issue de $S'$ et n'aboutissant pas en $S$. Or par construction, un observateur tournant dans le sens direct autour de $S'$ à partir de $A$ rencontre $A'$ avant $x$. Donc un observateur tournant dans le sens direct autour de $S^{\mu+1}$ à partir de $A^\mu$ rencontrera l'homologue de $A'$ avant celle de $x$: (Propos. 3) mais par construction, il rencontre $A^{\mu+1}$ avant $x'$: donc $A^{\mu+1}$ est l'homologue de $A'$. $S^{\mu+2}$ où aboutit $A^{\mu+1}$ sera l'homologue de $S''$, où aboutit $A''$ etc. $S^\mu$, $S^{\mu+1}$... etc. seront donc respectivement les homologues de $S$, $S'$ etc. $S^k = S^\mu$ sera donc l'homologue de $S^{k-\mu}$. Mais il est l'homologue de $S$, comme nous venons de le voir; $S^{k-\mu}$ se confondra donc avec $S$, et par suite $S^k$ ne serait plus le premier sommet de la suite $S$, $S'$, ... $S^k$ qui se confondra avec l'un des précédents.

Le contour formé par les lignes successives $A$, $A'$ ... $A^{k-1}$ étant son propre homologue relativement à $k$ aspects, nous pourrons appliquer le théorème I$^{er}$. D'ailleurs, par construction $A'$ n'aboutit pas en $S$: $k$ est donc au moins égal à 3: il y a donc un élément présentant une symétrie de rotation au moins ternaire, contrairement à notre supposition.

***L'hypothèse qui nous a servi de point de départ est donc à rejeter entièrement, comme se contredisant elle-même.***

## III$^{ème}$ Cas.

***Supposons enfin que le sommet $S$ présente une symétrie de rotation dont l'ordre $m$ soit au moins égal à 3.***

Soient $S'$ un sommet pareil à $S$, situé à la distance minimum $\delta$ de $S$: $A$ une ligne géodésique menée de $S$ à $S'$ dans les conditions indiquées au théorème II.

Lemme. ***A chaque sommet pareil à $S$ se rencontrent $2m$ lignes pareilles à $A$, dont $m$ sont issues de ce point, et $m$ y aboutissent. Un observateur placé près de ce point, et tournant autour dans un sens déterminé, le sens direct par exemple, devra traverser alternativement une des lignes qui en sont issues et une des lignes qui y aboutissent.***

En effet, soient $S_1$ un de ces sommets, $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_m$ les lignes qui en sont issues, écrites dans leur ordre de succession: $\Lambda_1$ une des lignes qui aboutissent à $S_1$, et que nous supposerons comprise, par exemple, entre $\Lambda_1$ et $\Lambda_2$. Il existe une ligne pareille $\Lambda'_\mu$ comprise entre deux lignes quelconques consécutives de la série précédente $\Lambda_\mu$ et $\Lambda_{\mu+1}$.

Comparons en effet les deux aspects relativement auxquels $\Lambda_\mu$ est l'homologue de $\Lambda_1$. $S_1$ origine de ces deux lignes est son propre homologue. Le système des lignes qui en sont issues est son propre homologue, et comme ces lignes doivent se succéder dans le même ordre que leurs homologues (Propos. 10) $\Lambda_2$ aura pour homologue $\Lambda_{\mu+1}$. L'homologue de $\Lambda'_1$, $\Lambda'_\mu$ aboutit en $S_1$, et comme les trois lignes $\Lambda_1$, $\Lambda'_1$, $\Lambda_2$ se succèdent dans l'ordre où elles sont écrites, leurs homologues se succéderont dans l'ordre $\Lambda_\mu$, $\Lambda'_\mu$, $\Lambda_{\mu+1}$. C. Q. F. D.

Remarque. Il pourrait arriver que $\Lambda'_1$ se confondît avec $\Lambda_1$: dans ce cas limite, $\Lambda'_\mu$ se confondrait évidemment avec $\Lambda_\mu$.

Cela posé, traçons sur la surface du polyèdre toutes les lignes pareilles à $\Lambda$ qui sont issues de $S$ ou y aboutissent: puis toutes les lignes pareilles à $\Lambda$ qui ont une extrémité commune avec les précédentes: puis les lignes qui ont une extrémité commune avec ces dernières etc. Nous aurons tracé ainsi sur le polyèdre un réseau dont tous les sommets seront pareils à $S$.

Les lignes de ce réseau ne se traversant mutuellement nulle part, diviseront la surface du polyèdre, en un certain nombre de régions distinctes qui n'empiéteront pas les unes sur les autres. On verra que *ces régions sont de deux espèces seulement.*

Soient en effet $\Lambda$ une quelconque des lignes du réseau, $\Sigma$ le sommet d'où elle est issue, $\Sigma'$ celui où elle aboutit. Supposons qu'un observateur placé sur $\Lambda$ dans le voisinage de $\Sigma'$ se mette à tourner dans le sens direct autour de ce point: soit $\Lambda'$ la première ligne pareille à $\Lambda$ qu'il rencontre: elle sera issue de $\Sigma'$ et aboutira en un sommet tel que $\Sigma''$. Si l'observateur se place maintenant en $\Lambda'$, près de $\Sigma''$, et tourne autour de ce dernier point, toujours dans le sens direct, jusqu'à ce qu'il rencontre une nouvelle ligne $\Lambda''$, cette ligne sera issue de ce point, et aboutira à un nouveau sommet $\Sigma'''$. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à un sommet $\Sigma^k$ coïncidant avec l'un des précédents. Le premier sommet sur lequel on retombera sera précisément $\Sigma$. Car supposons que l'on ait $\Sigma^k = \Sigma^\mu$: comparons entre eux les deux aspects relativement auxquels $\Lambda^\mu$ est homologue de $\Lambda$. Le point $\Sigma^\mu$

d'où elle est issue est homologue de $\Sigma$. Le point $\Sigma^{\mu+1}$ où elle aboutit, homologue de $\Sigma'$. Les lignes pareilles à $A$ et ayant leur extrémité en $\Sigma'$ ont pour homologues les lignes pareilles ayant leur extrémité en $\Sigma^{\mu+1}$, et celle de ces lignes, $A'$, qui succède à $A$ autour de $\Sigma'$, aura pour homologue $A^{\mu+1}$, qui succède à $A^{\mu}$ autour de $\Sigma^{\mu+1}$ (Propos. 3). Le point $\Sigma''$ où aboutit $A'$, aura donc pour homologue $\Sigma^{\mu+2}$ où aboutit $A^{\mu+1}$. Continuant ainsi, on voit que $\Sigma^{k-\mu}$ aura pour homologue $\Sigma^{k}$. D'ailleurs $\Sigma$ a pour homologue $\Sigma^{\mu}$. Si donc $\Sigma^{\mu}$ et $\Sigma^{k}$ se confondent, $\Sigma$ et $\Sigma^{k-\mu}$ se seront auparavant confondus.

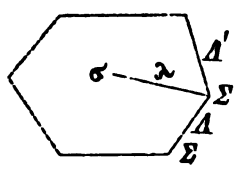
La ligne $A$ bordera ainsi sur la gauche une région fermée $R$ circonscrite par les $k$ lignes $A, A', \ldots A^{k-1}$.

*Si l'on se place sur l'arête $A^{k-1}$ auprès du point $\Sigma$, et qu'on tourne autour de ce point dans le sens direct, la ligne $A$ sera la première qu'on rencontrera.*

En effet comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $A'$ est l'homologue de $A$: $\Sigma', A' \ldots A^{k-2}, \Sigma^{k-1}$ auront respectivement pour homologues $\Sigma'', A'', \ldots A^{k-1}, \Sigma$. Enfin $A^{k-1}$ aura pour homologue une ligne issue de $\Sigma$ homologue de $\Sigma^{k-1}$ et aboutissant à $\Sigma'$ homologue de $\Sigma$. Si cette ligne ne se confondait pas avec $A$, on aurait ainsi deux lignes pareilles issues de $\Sigma$ et aboutissant à un même sommet $\Sigma'$, hypothèse déjà discutée (§. V).

Remarque. Le contour $A, A', \ldots A^{k-1}$ étant ainsi son propre homologue pour les $k$ aspects relativement auxquels $A, A', \ldots A^{k-1}$ sont respectivement homologues à $A$, il en sera de même de la région $R$ située à gauche de ce contour. Cette remarque nous servira plus tard.

*Aucun sommet pareil à $\Sigma$ ne sera contenu dans la région $R$.* En effet, il ne peut être situé sur le contour $A, A', \ldots A^{k-1}$, car il se trouverait à une distance moindre que $\delta$ de quelques-uns des sommets $\Sigma, \Sigma', \ldots \Sigma^{k-1}$. Supposons donc qu'il soit en $\sigma$ dans l'intérieur de la région: soit $\lambda$ une ligne pareille à $A$ issue de ce point: comparons entre eux les aspects relativement auxquels $\lambda$ est l'homologue de $A$. Le contour $A, A', \ldots A^{k-1}$ aurait pour homologue un contour pareil $\lambda, \lambda', \ldots \lambda^{k-1}$ bordant une région $r$, pareille à $R$, et contenant par suite le même nombre de faces que $R$. Mais d'autre part le contour $\lambda, \lambda', \ldots \lambda^{k-1}$ est entièrement contenu dans l'intérieur de la région $R$. En effet, le point $\sigma$ étant situé dans l'intérieur de $R$, la ligne $\lambda$ qui en est issue, et qui ne peut pas traverser les lignes pareilles $A, \ldots A^{k-1}$ y sera contenue nécessairement. D'ailleurs elle ne peut aboutir à aucun des points du contour autres que $\Sigma, \Sigma', \ldots \Sigma^{k-1}$; car



son extrémité serait un sommet pareil à $\Sigma$, $\Sigma'$, ... $\Sigma^{k-1}$ et situé à une distance moindre que $\delta$ de quelques-uns de ces sommets. Elle ne peut non plus aboutir à aucun des sommets $\Sigma$, $\Sigma'$, ... $\Sigma^{k-1}$; car si elle aboutissait à $\Sigma'$, par exemple, elle serait rencontrée avant $A'$ par un observateur tournant autour de $\Sigma'$ à partir de $A$ (voir la figure ci-jointe) ce qui ne peut être. Son extrémité $\sigma'$ sera donc dans l'intérieur de la région. On démontrera de même successivement que les lignes $\lambda'$, ... $\lambda^{k-1}$ sont entièrement contenues dans la région $R$, et leurs extrémités $\sigma''$, ... $\sigma^{k-1}$, $\sigma$ situées dans l'intérieur de cette région et non sur le contour. La région $r$ ne forme donc qu'une partie de $R$: il est donc impossible qu'elle contienne le même nombre de faces.

*Il n'existe pas à l'intérieur de la région R de lignes pareilles à A qui puissent subdiviser cette région en plusieurs régions partielles.*

En effet, soit $A_1$ une de ces lignes: elle devrait être entièrement intérieure au contour $A$, $A'$, ... $A^{k-1}$ qui ne peut être traversé par aucune ligne pareille à $A$. Nous venons de voir d'ailleurs qu'elle ne peut aboutir à aucun des sommets $\Sigma$, $\Sigma'$, ... $\Sigma^{k-1}$ et qu'il n'existe pas dans $R$ d'autres sommets pareils à ceux-là où elle puisse aboutir.

Supposons maintenant que l'observateur placé sur $A$ près du point $\Sigma'$ se mette à tourner autour de ce point, non plus dans le sens direct, mais dans le sens rétrograde jusqu'à ce qu'il rencontre une ligne $\lambda'$ pareille à $A$ et nécessairement issue de $\Sigma'$ (Lemme précédent): qu'il se transporte alors vers l'extrémité $\sigma''$ de cette ligne, autour de laquelle il tournera encore dans le sens rétrograde etc. En continuant cette série d'opérations on obtiendra une suite de lignes $\lambda'$, $\lambda''$ ... distinctes les unes des autres, jusqu'à l'une d'elles $\lambda^{k'-1}$ qui aboutisse à l'un des sommets $\Sigma$, $\Sigma'$, $\sigma''$, ... déjà rencontrés.

En appliquant des raisonnements de tout point analogues la ceux de tout à l'heure, on verra successivement:

1°. *Que la ligne $\lambda^{k'-1}$ aboutira nécessairement à $\Sigma$.*

2°. *Que la ligne A bordera ainsi sur sa droite une région fermée r limitée par les k' lignes $A$, $\lambda'$, ... $\lambda^{k'-1}$ et qui sera sa propre homologue relativement à k' aspects.*

3°. *Que cette région ne contiendra aucun autre sommet pareil à $\Sigma$,* et par suite, *qu'il n'existe pas dans son intérieur de lignes pareilles à A, qui puissent la subdiviser en régions plus petites.*

Soit maintenant $A_1$ une ligne quelconque du réseau. Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $A_1$ est l'homologue de $A$: $\Sigma$,

extrémité de $A$, aura pour homologue $\Sigma_1'$, extrémité de $A_1$: $A'$, qui est la première ligne pareille à $A$ qu'on rencontre en tournant dans le sens direct autour de $\Sigma'$ à partir de $A$, aura pour homologue une ligne $A_1$, qui sera la première ligne pareille à $A$ qu'on rencontre en tournant dans le sens direct autour de $\Sigma_1'$ à partir de $A_1$ etc. De même $A''$ aura pour homologue une ligne $A_1''$ jouissant des mêmes propriétés. Enfin $A^{k-1}$, qui aboutit à $\Sigma$, aura pour homologue une ligne $A_1^{k-1}$ aboutissant à $\Sigma_1$. La région $R$ aura ainsi pour homologue une région pareille $R_1$, située à la gauche de $A_1$. De même la région $r_1$, située à la droite de $A_1$, sera l'homologue de la région $r$. Quelle que soit la ligne $A_1$ que l'on considère, on n'obtiendra donc jamais que deux types de régions: les unes pareilles à $R$, les autres pareilles à $r$.

Le nombre des régions aboutissant à chaque sommet $\Sigma$ du réseau est évidemment égal à $2m$, nombre total des lignes pareilles à $A$ qui en sont issues, ou qui y aboutissent.

Enfin *le polyèdre ne possède, en dehors des sommets du réseau, aucun autre sommet pareil à* $\Sigma$. En effet s'il existait un semblable sommet, il serait situé, ou dans une des régions pareilles à $R$, ou dans une des régions pareilles à $r$. Dans tous les cas il existerait, soit dans $R$, soit dans $r$, un sommet de même espèce, ce que nous avons démontré impossible.

Nous remarquerons encore que *parmi les deux nombres* $k$, $k'$, qui expriment combien de lignes pareilles à $A$ bordent respectivement $R$ et $r$, *l'un au moins est supérieur à deux.*

Supposons en effet $k = k' = 2$: la condition $k = 2$ exprime que la ligne $A'$ issue de $\Sigma'$ aboutit en $\Sigma$. De même, si $k' = 2$, $\lambda'$, issue de $\Sigma'$, aboutira en $\Sigma$. D'ailleurs les lignes $A'$ et $\lambda'$ sont essentiellement distinctes, puisque nous admettons qu'il y a au moins trois lignes pareilles à $A$ issues de $\Sigma'$, et que $A'$ est la première qu'on rencontre en tournant dans le sens direct autour de $\Sigma'$ à partir de $A$, tandis que $\lambda'$ est la première qu'on rencontre en tournant dans le sens rétrograde. On aurait donc deux lignes pareilles issues d'un même sommet et aboutissant à un même sommet, cas déjà examiné (§. V) et que nous pouvons rejeter ici.

Ces préliminaires posés, nous distinguerons deux sous-cas.

1°. *Chacune des régions* $R$, $r$ *est bordée par trois lignes au moins: soit* $k \geqq 2$, $k' > 2$.

2°. *L'une de ces régions, r par exemple, est bordée par deux lignes seulement: soit* $k > 2$, $k' = 2$.

1^er^. Sous-Cas. Imaginons que chacune des lignes $A$, $A'$, $\lambda'$ etc. soit considérée comme formant un tout rigide, une sorte d'arête polygonale: et que chacune des régions comprises entre elles soit également considérée comme un tout indivisible, une face plus ou moins ondulée. Nous pouvons envisager au lieu du polyèdre primitif, le polyèdre plus simple dont $A$, $A'$ ... $\lambda'$... seraient les arêtes, et $R$, $R'$ ... $r$ ... les faces.

Par chaque sommet de ce polyèdre passent $m$ faces de $k$ côtés et $m$ faces de $k'$ côtés, les deux nombres $k$ et $k'$ étant indéterminés: nous allons chercher à résoudre ce problème plus général:

*Trouver tous les polyèdres tels qu'à chacun de leurs sommets passent le même nombre de faces triangulaires, le même nombre de faces quadrangulaires, etc. le même nombre de faces de n côtés, etc.*

Soit $S$ le nombre des sommets du polyèdre cherché, et soient respectivement $T$, $Q$, $P$, $H$ ... $(n)$ le nombre des faces triangulaires, quadrangulaires, pentagones, hexagones, ... *n-gones* qui passent par chacun d'eux.

Le nombre des arêtes qui passent par chaque sommet est égal au nombre des faces qu'elles séparent: soit à $T+Q+P+H+\cdots$ Chacune d'elles passe par deux sommets: leur nombre total sera donc $S\frac{T+Q+P+H+\cdots}{2}$.

Le nombre $F$ des faces est facile à évaluer: chaque triangle passant par trois sommets, on aura $S\frac{T}{3}$ faces triangulaires: etc. Le nombre total des faces sera donc $S\left\{\frac{T}{3}+\frac{Q}{4}+\frac{P}{5}+\cdots\right\}$.

On aura alors en vertu du théorème d'*Euler:*

$$S+S\left\{\frac{T}{3}+\frac{Q}{4}+\cdots+\frac{(n)}{n}\right\}=S\frac{T+Q+\cdots+(n)}{2}+2,$$

d'où

$$(1.)\qquad S\left\{1-\frac{T}{6}-\frac{2Q}{8}-\frac{n-2}{2n}(n)\cdots\right\}=2,$$

équation à laquelle on doit joindre la condition de rigueur

$$(2.)\qquad T+Q+P+\cdots+(n)+\cdots>2$$

exprimant qu'il passe au moins trois faces à chaque sommet.

Le problème se trouve ainsi ramené à déterminer les systèmes de valeurs de $T$, $Q$, $P$, $(n)$ etc. satisfaisant à la condition (2.) qui donnent pour $S$ une valeur entière et positive. La solution complète serait très-facile à obtenir, mais elle est étrangère à notre sujet, et nous ne nous y arrêterons pas, en nous bornant à ce qui nous est nécessaire ici.

Dans le cas actuel le nombre des faces qui passent à chaque sommet est égal à $2m$, soit, comme $m > 2$, à *six* au moins. Dans l'hypothèse la plus favorable, où il n'y aurait que six faces, toutes triangulaires, l'équation (1.) donnerait pour $S$ une valeur infinie: dans tous les autres cas une valeur négative.

*Le cas que nous discutons en ce moment ne correspond donc à aucun polyèdre proprement dit, mais seulement à des surfaces polyédriques indéfinies composées d'une infinité de facettes.* Nous remettrons à une autre occasion l'exposé des propriétés de ces surfaces, qui ne présente aucune difficulté, en partant des principes que nous venons d'exposer dans ce mémoire.

2ème Sous-Cas. Imaginons chacune des régions $r$ avec les deux lignes qui la bordent comme formant un tout rigide, une sorte de grosse arête: imaginons de même que chacune des régions $R$ forme un tout indivisible, une face plus ou moins ondulée: nous pourrons envisager à la place du polyèdre primitif $P$ le polyèdre plus simple $\pi$ dont les $r$ seraient les arêtes, et les $R$ les faces.

Ce solide présente cette particularité qu'*à chacun de ses sommets passent le même nombre de faces qui toutes sont de même nature.*

Nous aurons comme tout à l'heure l'équation

$$S\left\{1-\frac{T}{6}-\frac{2Q}{8}-\frac{3P}{10}-\frac{4H}{12}-\frac{n-2}{2n}(n)\cdots\right\} = 2$$

avec

$$T+Q+P+\cdots+(n)\cdots > 2.$$

De plus, tous les nombres $T$, $Q$, $P$ etc., à l'exception d'un seul, doivent être nuls.

Supposons d'abord $Q = P = (n)\ldots = 0$, $T > 0$.

Il viendra $S = \frac{12}{6-T}$: et les valeurs admissibles seront:

1°. $T = 3$, d'où $S = 4$, $F = 4$,

2°. $T = 4$, d'où $S = 6$, $F = 8$,

3°. $T = 5$, d'où $S = 12$, $F = 20$.

Au delà de $T = 5$, $S$ devient infini, puis négatif.

Soit maintenant $Q > 0$, $T = P = (n)\ldots = 0$.

Il viendra $S = \frac{16}{8-2Q}$ et l'on n'a qu'une solution:

4°. $Q = 3$, d'où $S = 8$, $F = 6$.

Soit maintenant $P > 0$, $T = Q = H \ldots = 0$.

Il viendra $S = \frac{20}{10 - 3P}$ et l'on n'a qu'une solution:

$$5°. \quad P = 3, \quad \text{d'où} \quad S = 20, \quad F = 12.$$

Enfin si on a à la fois $T = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, $S$ est nécessairement infini ou négatif.

Il existe donc en tout *cinq* solutions que nous allons discuter successivement.

1ère Solution. *Soient* $T = 3$, $S = 4$, $F = 4$.

Le polyèdre $\pi$ est un tétraèdre. Le polyèdre primitif sera donc un tétraèdre, dont les six arêtes auraient été remplacées par autant de fuseaux et les faces par autant de calottes polyédriques pareilles entre elles. Le nombre des sommets pareils à $\Sigma$ étant de *quatre* et l'ordre de la rotation autour de chacun d'eux étant de *trois*, le polyèdre sera pareil à lui-même sous *douze* aspects différents.

Chacune des calottes triangulaires étant sa propre homologue sous trois aspects (page 70) devra contenir un élément doué de symétrie *ternaire;* il existera *quatre* éléments semblables, un dans chaque calotte; les autres éléments seront répétés trois fois dans chaque calotte, soit *douze* fois en tout.

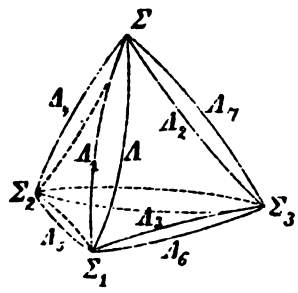
Chacun des six fuseaux est son propre homologue sous deux aspects (page 70): il contiendra donc *soit un élément avec rotation binaire, soit une arête avec symétrie de retournement.* Les autres arêtes et éléments seront répétés deux fois dans chaque fuseau, soit *douze* fois en tout.

Le polyèdre présente ainsi: *Deux systèmes d'éléments d'espèce quadruple: Un système d'éléments ou d'arêtes d'espèce sextuple: les autres éléments et arêtes sont d'espèce dodécuple.*

L'existence de cet autre système d'éléments d'espèce triple montre que *le solide pourrait être dérivé du tétraèdre de deux manières différentes.*

Observation. Il pourrait se faire que plusieurs des lignes pareilles $\Lambda$, etc. coïncidassent ensemble en tout ou en partie, ce qui ferait disparaître soit les calottes, soit les fuseaux. Cette circonstance mérite d'être examinée en détail.

Considérons la ligne $\Lambda$. Les seules lignes pareilles avec lesquelles elle puisse avoir quelque point commun sont les trois lignes $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, $\Lambda_3$ entre lesquelles elle est immédiatement comprise. En effet imaginons un observateur tournant dans le sens direct autour de $\Sigma$: la ligne $\Lambda$ étant issue de ce point,




la suivante $A_1$ y aboutira et la suivante $A_4$ en sera issue: elle ne pourra donc avoir aucun point commun avec $A$ (§. IV, Lemme V). On voit de même que $A_7$ est issue du point $\Sigma$: cette ligne ne peut donc avoir aucun point commun avec $A$. De même encore, les deux lignes $A_5$, $A_6$ aboutissant toutes deux à $\Sigma_1$ ainsi que $A$, n'auront aucun point commun avec elle. La ligne $A$ sera donc entièrement comprise dans l'intérieur du quadrilatère $A_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$: les lignes $A_1$, $A_2$, $A_3$ étant les seules situées à l'intérieur de ce quadrilatère, seront les seules qui puissent rencontrer $A$.

Nous avons vu d'ailleurs (Théorème II) que la ligne $A$ peut être choisie de manière à présenter en général trois tronçons: 1° Deux tronçons extrêmes dans lesquels elle se confond avec une autre ligne pareille: 2° Un tronçon médian où elle est entièrement isolée. Deux cas pourront se présenter suivant que $A$ se confondra dans le voisinage de $\Sigma$ avec $A_1$, ou avec $A_2$.

1^er^ Cas. Supposons que $A$ coïncide avec $A_1$ jusqu'à la distance $d$ du point $\Sigma$. Comparons les deux aspects relativement auxquels $\Sigma$ et $\Sigma_1$, $A$ et $A_1$ sont respectivement homologues. On voit que $A_1$ et $A$ devront se confondre jusqu'à la distance $d$ du point $\Sigma_1$.

Si la longueur $\delta$ de la ligne $A$ est supérieure à $2d+1$, il existera un tronçon médian dans lequel les deux lignes $A$ et $A_1$ se sépareront en laissant entre elles un fuseau $\varphi$. Dans le cas contraire, les deux lignes coïncideront dans toute leur étendue, et le fuseau se réduira à une simple ligne. Si le nombre des sommets de cette ligne est impair, le sommet médian jouira d'une symétrie de rotation binaire: s'il est pair il y aura une arête médiane jouissant de la symétrie de retournement.

2^ème^ Cas. Supposons maintenant que $A$ coïncide avec $A_2$ jusqu'à la distance $d$ de $\Sigma$. Les deux lignes $A$ et $A_2$ ayant une extrémité différente, $d$ sera au plus égal à $\frac{1}{2}\delta$. Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $A$ et $A_2$ ont respectivement pour homologues $A_2$, $A_3$: il résulte de cette comparaison que $A_2$ coïncidera avec $A_3$ jusqu'à la distance $d$ de $\Sigma_3$. De même $A_3$ coïncidera avec $A$ jusqu'à la distance $d$ de $\Sigma$.

Si $d < \frac{1}{2}\delta$ les trois lignes $A$, $A_2$, $A_3$ auront chacune un tronçon *médian*, de longueur $\delta-2d$, où elles seront séparées, et les trois tronçons *médians* circonscriront une petite calotte $C'$. Si au contraire $d=\frac{1}{2}\delta$ ces trois

lignes se confondront deux à deux dans toute leur étendue, et la calotte disparaitra entièrement, ou plutôt se réduira à un point, milieu commun des trois lignes, et qui restera son propre homologue relativement aux trois aspects du polyèdre relativement auxquels $A$, $A_2$, $A_3$ sont homologues les unes des autres.

2ème Solution. Soit

$$T = 4, \quad S = 6, \quad F = 8.$$

Le polyèdre $\pi$ est pareil à l'octaèdre régulier. Le polyèdre primitif est donc dérivé d'un polyèdre pareil à l'octaèdre régulier, par la substitution de fuseaux à ses arêtes et de calottes polyédriques à ses faces. L'ordre de la rotation étant 4 et le nombre des sommets pareils à $\Sigma$ étant 6, le polyèdre sera pareil à lui-même sous 24 aspects différents.

Chacune des calottes triangulaires doit présenter une symétrie ternaire, et possédera ainsi en son centre un élément doué d'une rotation *ternaire*. Il y aura un élément pareil dans chaque calotte, soit *huit* en tout.

Chacun des 12 fuseaux présente une symétrie binaire. Il contiendra donc, soit un élément avec rotation *binaire*, soit une arête avec *symétrie de retournement*. Cette arête ou cet élément sera 12 fois répété.

Tous les autres éléments ou arêtes seront 24 fois répétés.

Le cas où les lignes $A$ etc. se confondraient ensemble en tout ou en partie donne lieu aux mêmes observations que dans la solution précédente.

3ème Solution. Soit

$$T = 5, \quad S = 12, \quad F = 20.$$

Le polyèdre $\pi$ est pareil à l'icosaèdre régulier. Le polyèdre proposé est donc dérivé d'un polyèdre pareil à l'icosaèdre régulier par la substitution à ses arêtes de fuseaux pareils, et à ses faces de calottes polyédriques pareilles. L'ordre de la rotation étant 5 et celui des sommets pareils à $\Sigma$ étant 12, le polyèdre sera pareil à lui-même sous 60 aspects différents.

Chacune des calottes triangulaires devra posséder une symétrie ternaire et renfermer dans son centre un élément doué d'une rotation *ternaire*. Il y aura un élément pareil dans chaque calotte, soit 20 en tout.

Chaque fuseau présente une symétrie binaire. Il contiendra donc, soit un élément avec rotation *binaire*, soit une arête avec *symétrie de retournement*. Cet élément ou cette arête sera répété une fois dans chaque fuseau, soit 30 fois en tout.

Tous les autres éléments ou arêtes seront 60 fois répétés.

Le cas où les lignes $A$ etc. se confondraient ensemble en tout ou en partie donne encore lieu aux mêmes observations que dans la première solution.

4ème Solution. Soit

$$Q = 3, \quad S = 8, \quad F = 6.$$

Le polyèdre $\pi$ est pareil au cube. Le nombre des aspects semblables est de 24. Ce cas se ramène d'ailleurs à celui de l'octaèdre. Car chaque calotte quadrangulaire étant sa propre homologue sous quatre aspects, contiendra un élément à rotation quaternaire. Cet élément ne sera que 6 fois répété, moins par suite que le sommet $\Sigma$, ce qui est contraire à notre supposition. Cette solution doit donc être rejetée, en tant que distincte de la seconde.

5ème Solution. Soit

$$P = 3, \quad S = 20, \quad F = 12.$$

Le polyèdre $\pi$ est pareil au dodécaèdre régulier. Le nombre des aspects semblables est de 60. Ce cas se ramène d'ailleurs à celui de l'icosaèdre. Car chaque calotte pentagonale étant sa propre homologue sous *cinq* aspects, contiendra un élément doué d'une symétrie de rotation d'ordre *cinq*. Cet élément ne sera que 12 fois répété, moins par suite que le sommet $\Sigma$, ce qui est contraire à notre supposition. Cette solution doit donc être rejetée en tant que distincte de la troisième.

Nous obtenons donc ici trois types de polyèdres, dérivés des polyèdres réguliers de la manière suivante:

*Prenons un polyèdre pareil à l'un des polyèdres réguliers: remplaçons ses arêtes par des lignes polygonales quelconques, ou plus généralement encore par des fuseaux pareils présentant une symétrie binaire; ses faces par des calottes polyédriques pareilles présentant une symétrie par rotation dont l'ordre soit égal au nombre des côtés de la face: nous aurons reconstitué ainsi, ou les polyèdres cherchés, ou leurs polaires.*

1°. *Le premier type peut être dérivé du tétraèdre de deux manières différentes. Il présente 12 aspects semblables: deux systèmes d'éléments d'espèce quadruple et un système d'éléments ou d'arêtes d'espèce sextuple: tous les autres éléments et arêtes sont d'espèce dodécuple.*

2°. *Le second type dérive à la fois de l'octaèdre régulier et du cube. Il présente 24 aspects semblables. Il existe un système d'éléments d'espèce*

***sextuple, un système d'espèce octuple, et un système d'éléments ou d'arêtes d'espèce dodécuple. Tous les autres éléments ou arêtes sont 24 fois répétés.***

3°. ***Le troisième type dérive à la fois de l'icosaèdre et du dodécaèdre réguliers. Il présente 60 aspects semblables. Il existe un système d'éléments 12 fois répétés, un autre d'éléments 20 fois répétés, enfin un système d'éléments ou d'arêtes 30 fois répétés. Tous les autres éléments ou arêtes sont 60 fois répétés.***

## VII.

## Démonstration d'un dernier théorème.

Soient $P$ un polyèdre quelconque, $o$ un point quelconque de l'espace. Imaginons une surface fermée quelconque, une sphère par exemple, tracée autour du point $o$ comme centre. Projetons les divers points du polyèdre sur la sphère par des rayons partant de $o$. Les arêtes se projetteront suivant des arcs de cercle, qui formeront sur la surface de la sphère un réseau représentatif du polyèdre.

Réciproquement, considérons un réseau quelconque tracé sur la sphère et tel que le nombre des arcs de cercle qui se croisent à chaque sommet soit de trois au moins. Il existera évidemment une infinité de polyèdres à faces planes ou gauches, se projetant sur ce réseau.

Nous pourrons transporter aux réseaux eux-mêmes la notion des aspects, que nous avions établie pour les polyèdres. Le problème que nous venons de résoudre se confond donc avec celui de la symétrie des réseaux tracés sur la sphère.

Cela posé, il nous sera aisé de démontrer le théorème suivant:

Théorème. ***Si un polyèdre eulérien est pareil à lui-même sous plusieurs aspects différents, on pourra toujours construire un polyèdre pareil à celui-là, et exactement superposable à lui-même sous ces divers aspects.***

Pour le démontrer, il faudrait considérer successivement les diverses sortes de symétrie que nous avons étudiées. La marche à suivre étant très-simple, il nous suffira d'examiner un seul cas, pris parmi les plus compliqués.

Considérons un polyèdre $P$ dérivé d'un tétraèdre, et présentant 12 aspects semblables, deux systèmes d'éléments d'espèce quadruple, un élément ou une arête d'espèce sextuple: tous les autres étant 12 fois répétés.

Supposons d'abord que parmi les deux systèmes d'éléments quadruples, l'un au moins soit un système de sommets, $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$.

Prenons une sphère quelconque: soient $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ les quatre sommets d'un tétraèdre régulier inscrit: joignons-les deux à deux par des arcs de grand cercle. Imaginons ensuite que le réseau formé par ces six arcs se déplace à la surface de la sphère: il existe 12 positions différentes dans lesquelles la situation du réseau coïncidera identiquement avec sa situation primitive. Car on peut amener à la place occupée primitivement par $\alpha$ un quelconque des quatre sommets $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, puis amener l'un quelconque des trois arcs qui se coupent en ce sommet dans la position occupée primitivement par $\alpha\alpha_1$: cette coïncidence établie entraînera évidemment celle de tout le réseau.

Un point de la sphère supposé invariablement lié au réseau occupera en général 12 positions différentes lorsqu'on fera coïncider de toutes les manières possibles le réseau avec sa situation primitive. Ces 12 positions se réduiront à 6 distinctes pour les points milieux des arcs $\alpha a_1$ etc. . . .; car chacun de ces arcs coïncide avec lui-même dans deux positions différentes du réseau. Elles se réduiront à quatre distinctes pour le centre de chacun des quatre triangles sphériques équilatéraux $\alpha\alpha_1\alpha_2$, $\alpha\alpha_2\alpha_3$, $\alpha\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ chacun de ces triangles coïncidant avec lui-même dans trois positions différentes du réseau.

Cela posé, établissons par la pensée une correspondance entre les quatre sommets $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ et les quatre points $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ situés sur la sphère. Soit maintenant $b$ un sommet quelconque du polyèdre $P$. Il y aura en général 12 sommets $b$, $b'$ ... pareils à $b$. Nous prendrons pour correspondre à $b$ un point $\beta$ choisi arbitrairement sur la sphère et pour correspondre à $b'$, $b''$ . . . les positions $\beta'$, $\beta''$ que prend successivement le point $\beta$ lorsqu'on fait coïncider le réseau sphérique avec lui-même de toutes les manières possibles.

On sait qu'il existe dans $P$ outre les $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ un autre système d'éléments d'espèce quadruple. Si cet élément est un sommet $c$, on prendra pour correspondants de $c$ et de ses homologues les centres des triangles sphériques, $\gamma$ ... etc. Il existe en outre dans $P$ un élément ou une arête d'espèce sextuple. Si c'est un sommet $e$, on prendra pour correspondre à $e$ et à ses homologues les milieux $\varepsilon$ etc. des six arcs $\alpha\alpha_1$, ... etc.

Soient maintenant $A$ une arête quelconque du polyèdre $P$, $m$ et $n$ les sommets qu'elle joint, $\mu$ et $\nu$ les points correspondants de la sphère: nous les joindrons par un arc de cercle $A$ qui sera le correspondant de $A$.

L'ensemble de ces arcs de cercle formera un réseau sphérique $\varrho$ qui en vertu de sa construction, sera d'une part superposable à lui-même dans 12 positions différentes et d'autre part évidemment pareil à $P$.

Imaginons maintenant des rayons vecteurs menés du centre de la sphère à tous les points de sa surface et spécialement à ceux du réseau: prenons sur chacun de ces rayons vecteurs une longueur arbitraire, mais qui pourtant soit la même pour les 12 rayons aboutissant à un système de points homologues. Nous obtiendrons évidemment un polyèdre P, pareil à $P$, et superposable à lui-même dans 12 positions différentes.

Soit maintenant $P'$ un polyèdre dérivé également du tétraèdre, et où tous les éléments d'espèce quadruple soient des faces. Soit $P$ le polyèdre polaire de $P'$: les éléments quadruples y seront des sommets: soient $\varrho$ le réseau sphérique correspondant à $P$, déterminé comme précédemment, $\varrho'$ le réseau polaire de $\varrho$ sur la sphère: il sera à la fois pareil à $P'$, et superposable à lui-même dans 12 positions différentes: on en déduira un polyèdre P' jouissant des mêmes propriétés.

Dans la construction que nous venons d'indiquer, presque tout est laissé à l'arbitraire: il est donc extrêmement probable que parmi la grande variété de polyèdres que nous pourrons obtenir, il y en aura dont les faces sont planes. Mais la démonstration rigoureuse de cette proposition ne présente aucune utilité sérieuse.

## VIII.

## Résumé.

Récapitulant tout ce qui précède, on obtient définitivement les théorèmes suivants:

### Théorème I.

*Etant donné un polyèdre eulérien tel que ses diverses parties se présentent dans le même ordre lorsqu'on le considère successivement sous plusieurs aspects différents, on pourra toujours trouver une infinité de polyèdres à faces planes ou gauches, pareils à celui-là, et exactement superposables à eux-mêmes sous ces mêmes aspects.*

### Théorème II.

*Les divers cas qui pourront se présenter sont les suivants:*

1°. Symétrie par rotation. *Solides présentant à chacune de leurs extrémités un élément unique de son espèce: tous les autres éléments et toutes*

*les arêtes étant répétés un nombre de fois déterminé k: k lignes géodésiques pareilles tracées entre les éléments extrêmes ne se rencontreront en aucun point intermédiaire et découperont la surface du polyèdre en k régions pareilles* (§. II).

*Dans le cas particulier où* $k=2$, *l'un des éléments extrêmes* (§. II) *ou tous les deux* (§. VI) *à la fois, peuvent être remplacés par des arêtes, ce qui donne deux genres particuliers de symétrie que nous appellerons:*

II°. Symétrie par rotation et retournement,

et

III°. Symétrie par rotation.

IV°. Symétrie par rotation et renversement:

*Ces solides présentent:*

1°. *Deux éléments pareils E, E' seuls de leur espèce, et doués d'une symétrie de rotation dont l'ordre k peut être quelconque.*

2°. *Deux autres systèmes d'éléments ou d'arêtes remarquables, composés chacun, soit de k éléments doués d'une symétrie de rotation binaire, soit de k arêtes douées de la symétrie de retournement.*

*Tous les autres éléments ou arêtes sont* $2k$ *fois répétés.*

V°. *Dans le cas particulier où* $k=2$ *les éléments extrêmes peuvent être remplacés par deux arêtes pareilles. Si en outre chacun des deux autres systèmes remarquables est formé par des arêtes avec symétrie de retournement, nous avons un genre spécial de symétrie, auquel nous pourrons donner le nom de* symétrie par retournement et renversement. *Les solides doués de cette symétrie sont pareils à eux-mêmes sous quatre aspects différents: ils présentent trois systèmes de deux arêtes pareilles entre elles: toutes les autres arêtes et tous les éléments étant quatre fois répétés* (§. VI).

*En dehors des types précédents, il en existe trois autres, dérivés des polyèdres réguliers par le procédé suivant:*

*Prenons un polyèdre pareil à l'un des polyèdres réguliers: remplaçons ses arêtes par des lignes polygonales quelconques, ou plus généralement par des fuseaux présentant une symétrie binaire par retournement: ses faces par des calottes polyédriques, présentant une symétrie par rotation dont l'ordre soit égal au nombre des côtés de la face: (ces calottes pouvant se réduire à de simples points) nous aurons reconstitué ainsi, ou les polyèdres cherchés, ou leurs polaires* (§. VI).

*On obtient ainsi trois types différents:*

VI°. Symétrie tétraédrique. *Ces solides ou leurs polaires peuvent être considérés comme dérivés de deux tétraèdres différents. Ils présentent douze aspects semblables: deux systèmes d'éléments d'espèce quadruple et un système d'éléments ou d'arêtes d'espèce sextuple. Tous les autres éléments ou arêtes sont douze fois répétés.*

VII°. Symétrie cuboctaédrique. *Ces solides, ou leurs polaires peuvent être considérés comme dérivés, soit d'un polyèdre pareil au cube, soit d'un polyèdre pareil à l'octaèdre régulier. Ils présentent 24 aspects semblables; un système d'éléments sextuple, un autre d'espèce octuple, et un système d'éléments ou d'arêtes d'espèce dodécuple: tous les autres éléments ou arêtes sont 24 fois répétés.*

VIII°. Symétrie icosidodécaédrique. *Ces solides ou leurs polaires, peuvent être considérés comme dérivés soit d'un icosaèdre pareil au régulier, soit d'un dodécaèdre pareil au régulier. Ils présentent 60 aspects semblables: un système d'éléments d'espèce dodécuple, un autre système d'éléments 20 fois répétés, et un système d'éléments ou d'arêtes 30 fois répétés: tous les autres éléments ou arêtes sont 60 fois répétés.*

## IX.

## Classification des polyèdres.

Les principes précédents permettent d'établir les grandes divisions de la classification naturelle des polyèdres eulériens. En effet, l'étude que nous venons de faire est celle de leurs caractères les plus abstraits. Nous avons négligé non seulement les relations de grandeur des diverses faces, mais même leur position dans l'espace, pour nous attacher exclusivement aux rapports de succession. Les caractères trouvés sont donc les plus abstraits de tous, et ceux qui doivent fournir les premières bases de la classification.

On distingue assez habituellement les polyèdres par le nombre de leurs faces. Ce mode de classement est vicieux. Car on sépare les uns des autres dès le début deux polyèdres polaires réciproques, qui ont pourtant entre eux de grandes analogies. D'ailleurs on voit, par la loi de polarité, que la classification d'après le nombre des sommets serait aussi rationnelle que l'autre: donc aucune d'elles ne l'est.

C'est d'après le nombre de leurs arêtes que l'on devra classer les polyèdres: et les polyèdres à $n$ arêtes seront classés d'après leur degré de

symétrie. Il y aura 9 classes en tout, y compris celle qui est complètement dissymétrique.

La nature des éléments les moins répétés, et leurs distances mutuelles, permettent d'établir assez facilement des subdivisions dans ces classes.

Prenons pour exemple les classes 1, 6 et 7.

Classe I. Elle se divise en trois familles suivant que les deux éléments uniques autour desquels a lieu la rotation sont deux sommets, deux faces, ou un sommet et une face. La première famille est polaire de la seconde. La troisième est sa propre polaire.

Chacune de ces familles se subdivise en genres suivant l'ordre $k$ de la rotation. Ce nombre devant diviser le nombre $A$ des arêtes, le nombre des genres sera ainsi limité.

Enfin chaque genre se subdivise à son tour en espèces, caractérisées par la distance des deux éléments autour desquels a lieu la rotation.

Quoique le nombre des faces soit un caractère facile à reconnaître, il me semble constituer entre deux polyèdres une différence moins essentielle que les deux qui précèdent. Il servirait à décomposer l'espèce en variétés.

Classe VI. On a deux systèmes d'éléments quadruples, et dans certains cas un système d'éléments sextuples, remplacé dans d'autres cas par un système d'arêtes. Cette différence fondamentale constituera deux ordres.

1$^{er}$ Ordre. L'élément sextuple peut être face ou sommet. Les éléments quadruples peuvent être des faces, des sommets, ou les uns des faces, et les autres des sommets. Il y a donc six combinaisons possibles, et partant six familles.

2$^{ème}$ Ordre. Pas d'élément sextuple. Il existe trois familles, caractérisées par la nature des éléments quadruples: l'une de ces familles est sa propre polaire.

La symétrie étant toujours d'ordre 24, chaque famille est formée d'un seul genre. Elle pourra se subdiviser en espèces suivant la distance mutuelle des éléments quadruples pareils. Mais ici se présente une certaine ambiguité due à la coexistence de deux systèmes d'éléments quadruples. Les uns sont à la distance $\delta$ les uns des autres, les autres à la distance $\delta'$. Ces deux distances $\delta$, $\delta'$ devront donc concourir toutes deux à caractériser l'espèce.

Enfin on sait que les lignes géodésiques homologues $A$ etc. menées entre ces sommets, et qui ne se traversent pas mutuellement, peuvent se confondre deux à deux en tout ou partie de leur étendue. La longueur des

tronçons dans lesquels elles se confondent pourrait servir à partager chaque espèce en variétés.

Classe VII. Il existe un système d'éléments sextuples, un autre d'éléments octuples, et parfois un système d'éléments dodécuples: la division en ordres, familles etc. ... se fait d'après les mêmes principes que pour la 6ème classe. Mais comme on doit distinguer le cas où l'on a un sommet sextuple et une face octuple de celui d'une face sextuple et d'un sommet octuple, le nombre total des familles s'élèvera à 8 dans le 1er ordre, et à 4 dans le second.

Quant à la grande classe dissymétrique, elle paraît exiger, pour être subdivisée en ordres, familles et genres, des principes tout nouveaux.

Châlon sur Saône 1865.

# Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non eulériens.

(Par M. *Camille Jordan* à Châlon s. Saône.)

Une surface sera dite d'espèce $(m, n)$ si elle est limitée par $m$ contours fermés et si l'on peut d'autre part y tracer $n$ contours fermés ne se coupant eux-mêmes ni mutuellement, sans la partager en deux régions distinctes.

L'importance des deux paramètres $m$ et $n$ ressort des propositions suivantes:

1°. Une surface d'espèce $(m, n)$ est $m+2n$ fois continue (*zusammenhängend*), en donnant à ce terme la même définition que M. *Riemann* (tome 54 de ce Journal). On doit excepter le cas où $m = 0$: la surface est alors non plus $2n$ fois, mais $2n+1$ fois continue.

2°. Tout contour tracé sur une surface d'espèce $(m, n)$ peut être réduit par une déformation progressive à une combinaison de certains contours simples, en nombre $m+2n$.

3°. Pour que deux surfaces *flexibles* et *extensibles à volonté* soient applicables l'une sur l'autre, il faut et il suffit qu'elles soient de même espèce.

4°. On a dans toute surface polyédrique d'espèce $(m, n)$ entre le nombre $F$ des faces, celui $S$ des sommets et celui $A$ des arêtes, la relation

$$F+S = A+2-m-2n$$

qui n'est autre que le théorème d'*Euler* généralisé.

En posant $m = 0$ et faisant varier $n$, on aura les diverses espèces de polyèdres fermés.

Les polyèdres de l'espèce $(0, 0)$ ne sont autres que ceux que j'ai appelés *eulériens* dans le mémoire précédent. Le problème de la symétrie se pose d'une manière analogue dans les autres espèces de polyèdres: mais les résultats obtenus sont essentiellement différents d'une espèce à l'autre.

Prenons par exemple les polyèdres de l'espèce $(0, 1)$. (Un polyèdre présentant l'aspect général d'un tore appartiendrait à cette espèce). Il résulte de mon analyse que ces polyèdres peuvent offrir trois sortes différentes de symétrie.

1°. Symétrie $mn$-quaternaire. Polyèdres offrant deux systèmes distincts de $mn$ éléments à rotation quaternaire et un système de $2mn$ éléments à rotation binaire (ou d'arêtes à retournement). Les autres éléments et arêtes sont $4mn$ fois répétés. Les entiers $m$ et $n$ peuvent être quelconques, sauf cette restriction que si l'un d'eux se réduit à l'unité, l'autre doit se réduire à 1, ou à 2.

2°. Symétrie $mn$-binaire. Polyèdres offrant quatre systèmes distincts de $mn$ éléments à rotation binaire, (chacun de ces systèmes pouvant être remplacé par un système d'arêtes à retournement). Les autres éléments et arêtes sont $2mn$ fois répétés. Les entiers $m$ et $n$ sont absolument quelconques.

3°. Symétrie $mn$-aire. Polyèdres présentant $mn$ aspects semblables: chaque élément ou arête étant $mn$ fois répété. Les entiers $m$ et $n$ sont quelconques.

Dans les trois cas ci-dessus, les entiers $m$ et $n$ pouvant être pris aussi grands que l'on veut, on peut toujours construire un polyèdre de l'espèce (0, 1) qui soit pareil à lui-même sous un nombre d'aspects qui dépasse toute limite assignée *a priori*. La même circonstance se présentait pour les polyèdres eulériens, qui sont susceptibles d'offrir une symétrie de rotation dont l'ordre reste arbitraire. Mais il est digne de remarque que les polyèdres appartenant à ces deux espèces sont les seuls polyèdres fermés qui jouissent de cette propriété: cela résulte de la proposition suivante:

Théorème. *Le nombre K des aspects sous lesquels un polyèdre d'espèce* $(0, n)$ *peut être pareil à lui-même est nécessairement limité, si* $n > 1$.

La démonstration de cette proposition générale est assez délicate: en voici l'abrégé.

On peut supposer qu'aucune face du polyèdre considéré n'est sa propre homologue sous plusieurs aspects différents: car si cela avait lieu, on pourrait prendre un point dans l'intérieur de la face et le joindre aux divers sommets de son contour, de manière à remplacer la face par un système de facettes triangulaires: en opérant de même sur les faces semblables, on aura un nouveau polyèdre d'espèce $(0, n)$ jouissant des mêmes symétries, et où aucune face ne sera sa propre homologue: on pourra étudier ce polyèdre au lieu du primitif.

Cela posé, soient $f$ une face, $f_1$, $f_2$, ... les faces pareilles: s'il en existe d'autres, l'une d'elles, $g$, sera contigue suivant une arête à l'une des précédentes, à $f$ par exemple: ses homologues $g_1$, $g_2$, ... sont respectivement

contigues à $f_1$, $f_2$ etc. .... Si le polyèdre contient d'autres faces, l'une d'elles $h$ est contigue suivant une arête à quelqu'une des précédentes, à $g$ par exemple: ses homologues $h_1$, $h_2$ ... seront respectivement contigues à $g_1$, $g_2$ ... etc. On peut épuiser ainsi toutes les faces du polyèdre: alors les faces $f$, $g$, $h$ ... etc. d'une part, $f_1$, $g_1$, $h_1$ ... etc., $f_2$, $g_2$, $h_2$ ... etc., d'autre part, forment des régions $R$, $R_1$, $R_2$ ... pareilles entre elles, en nombre $K$, et qui par leur réunion constituent le polyèdre.

Supposons que chacune de ces régions soit de l'espèce $(\mu, \nu)$. Soient $F$, $S$, $A$ les nombres des faces, sommets et arêtes de chacune d'elles: on a:

$$F+S = A+2-\mu-2\nu$$

ou en ajoutant les résultats relatifs aux $K$ faces

$$(1.) \qquad KF+KS = KA+(2-\mu-2\nu)K.$$

Soient $F'$, $S'$, $A'$ les nombres des faces, sommets et arêtes du polyèdre: on a $F' = KF$. D'autre part toute arête contenue sur le contour d'une région se trouve sur celui d'une autre région: elle est par suite comptée deux fois dans $KA$: on a donc en désignant par $\alpha$ le nombre des arêtes situées sur le contour de $R$

$$KA = A'+\tfrac{1}{2}\alpha K.$$

Enfin les sommets situés sur le contour de $R$ sont tous situés sur le contour de deux ou d'un plus grand nombre de régions: soit en général $\beta_\lambda$ le nombre de ceux qui sont situés sur $\lambda$ régions: on aura:

$$KS = S'+\left(\tfrac{1}{2}\beta_2+\tfrac{2}{3}\beta_3+\cdots+\frac{\lambda-1}{\lambda}\beta_\lambda\right)K.$$

Substituant ces valeurs dans (1.) il vient

$$(2.) \qquad \left(2-\mu-2\nu+\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\beta_2-\tfrac{2}{3}\beta_3-\cdots-\frac{\lambda-1}{\lambda}\beta_\lambda\ldots\right)K = F'+S'-A' = 2-2n.$$

Dans chacun des contours qui bordent $R$ le nombre des arêtes est égal au nombre des sommets: on aurait donc en additionnant les résultats relatifs à ces divers contours

$$\alpha = \beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_\lambda+\cdots$$

si ces contours ne se touchaient nulle part: mais si $\gamma_2$ sommets appartiennent à deux des contours limites, $\gamma_3$ à trois d'entre eux etc. ... on aura plus généralement

$$\alpha = \beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_\lambda+\cdots+\gamma_2+2\gamma_3+\cdots+(s-1)\gamma_s.$$

D'autre part les diverses faces de $R$ étant contigues entre elles suivant des arêtes, on peut passer d'un point quelconque de $R$ à un autre sans toucher les contours limites. Si donc on suppose la continuité de $R$ détruite aux sommets où les contours se rejoignent, ce qui demandera $\gamma_2+2\gamma_3+\cdots+(s-1)\gamma_s\ldots$ transversales infiniment petites, $R$ restera encore d'une seule pièce: d'où la relation

$$\mu+2\nu \geqq \gamma_2+2\gamma_3+\cdots+(s-1)\gamma_s+\cdots+1.$$

Posons

$$\mu+2\nu-\gamma_2-2\gamma_3-\cdots-(s-1)\gamma_s-1 = \varphi:$$

l'équation (2.) deviendra

$$(3.)\quad \left\{-1+\varphi+\tfrac{1}{2}\gamma_2+\cdots+\frac{s-1}{2}\gamma_s+\cdots+\tfrac{1}{6}\beta_3+\cdots+\frac{\lambda-2}{2\lambda}\beta_\lambda\right\}K = 2n-2.$$

Cela posé, $\varphi+\frac{1}{2}\gamma_2+\cdots+\frac{s-1}{2}\gamma_s=\frac{N}{2}$, $N$ étant un entier positif ou nul.

Si $N>2$ le multiplicateur de $K$ est $\geqq\frac{1}{2}$: donc la valeur de $K$ donnée par l'équation (3.) ne peut dépasser $2(2n-2)$.

Si $N=2$, le multiplicateur de $K$ est égal à

$$\tfrac{1}{6}\beta_3+\cdots+\frac{\lambda-2}{2\lambda}\beta_\lambda\cdots \geqq \tfrac{1}{6}(\beta_3+\cdots+\beta_\lambda) \geqq \tfrac{1}{6};$$

car on ne peut avoir à la fois $\beta_3=0,\ \ldots\ \beta_\lambda=0$, ce qui donnerait $2n-2=0$ ou $n=1$, cas rejeté de nos hypothèses. On aura donc $K\leqq 6(2n-2)$.

Enfin si $N=1$, ou $=0$, l'équation (3.) donnera

$$\left(\frac{N-2+\beta_3+\cdots+\beta_\lambda}{2}-\tfrac{1}{3}\beta_3-\cdots-\frac{1}{\lambda}\beta_\lambda\ldots\right)K = 2n-2.$$

D'ailleurs le multiplicateur de $K$ est $\leqq\frac{N-2}{2}+\frac{\beta_3+\cdots+\beta_\lambda}{6}$; d'autre part, pour que $K$ soit entier et $>1$, il faut que ce multiplicateur ne dépasse pas $n-1$: on a donc $\beta_3+\cdots+\beta_\lambda\ldots<6n-3N+1$, limite que nous désignerons par $M$.

Or soit donné en général un système de solutions entières de l'équation

$$(4.)\quad \left(\frac{a}{b}-\tfrac{1}{3}\beta_3-\cdots-\frac{1}{\lambda}\beta_\lambda\ldots\right)K = L$$

jointe à l'inégalité

$$\beta_3+\cdots+\beta_\lambda\cdots<M,$$

et désignons par $\beta_{\lambda_1}$, $\beta_{\lambda_2}$ ... celles des inconnues $\beta$ qui ne sont pas nulles: on peut assigner une limite supérieure à chacun des indices $\lambda_1$, $\lambda_2$ ....

Car soit $\lambda_1$ le plus petit de ces indices: posons $\frac{1}{\lambda_1}\beta_1+\frac{1}{\lambda_2}\beta_2+\cdots=\frac{p}{q}$, cette fraction étant supposée réduite à sa plus simple expression, ainsi que $\frac{a}{b}$: On aura $\left(\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right)K=L$, d'où $K=\frac{Lbq}{aq-bp}=\frac{Lbe}{ae-dp}$, en posant $b=d\delta$, $q=e\delta$, $\delta$ étant le plus grand commun diviseur de $b$ et de $q$.

$K$ étant entier, $ae-dp$ divise $Lbe$: mais il est premier à $e$: donc il divise $Lb$: on a donc $ae-dp \gtrless Lb$ ou en multipliant par $\delta$,

$$aq-bp \gtrless Lb\delta \gtrless Lb^2. \qquad \text{Mais} \qquad \frac{p}{q} \gtrless \frac{\beta_{\lambda_1}+\beta_{\lambda_2}+\cdots}{\lambda_1} < \frac{M}{\lambda_1}$$

d'où $q > \frac{\lambda_1}{M}p$: donc enfin

$$\left(\frac{a\lambda_1}{M}-b\right)p \gtrless Lb^2,$$

d'où $\lambda_1 < \frac{M}{a}\left\{\frac{Lb^2}{p}+b\right\} < \frac{M}{a}(Lb^2+b)$.

La quantité $\lambda_1$ étant ainsi limitée, de même que $\beta_{\lambda_1}$ qui est au plus égal à $M$, $\frac{1}{\lambda_1}\beta_{\lambda_1}$ ne sera susceptible que d'un nombre fini de valeurs: prenons l'une d'elles à volonté et posons $\frac{a}{b}-\frac{1}{\lambda_1}\beta_{\lambda_1}=\frac{a'}{b'}$: on aura

$$\left(\frac{a'}{b'}-\frac{1}{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_3}\beta_{\lambda_3}\ldots\right)K = L$$

avec

$$\beta_{\lambda_2}+\beta_{\lambda_3}+\cdots < M-\beta_{\lambda_1};$$

on en conclut comme tout à l'heure l'inégalité

$$\lambda_2 < \frac{M-\beta_{\lambda_1}}{a'}(Lb'^2+b'),$$

$\lambda_2$ est ainsi limité, de même que $\beta_{\lambda_2}$: on reconnaît de même que $\lambda_3$ etc. sont limités.

Tous les entiers $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \beta_{\lambda_1}, \beta_{\lambda_2}, \beta_{\lambda_3} \ldots$ étant ainsi renfermés dans certaines limites, le multiplicateur de $K$, $\frac{a}{b}-\frac{1}{\lambda_1}\beta_{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\ldots$ n'est susceptible que d'un nombre limité de valeurs: en les substistuant successivement dans l'équation (4.), on aura les valeurs correspondantes de $K$, en nombre limité.

La considération des aspects peut s'étendre aux surfaces polyédriques non fermées: soit $P$ une semblable surface, d'espèce $(m, n)$: ajoutons-y $m$ faces

auxiliaires ayant respectivement pour contour les $m$ contours limites de $P$: on aura une nouvelle surface $Q$ d'espèce $(0, n)$: et si $P$ est pareil à lui-même sous plusieurs aspects, $Q$ le sera sous ces mêmes aspects: et de plus les $m$ faces auxiliaires seront leurs propres homologues sous tous ces aspects.

Si l'on veut que $P$ soit pareil à lui-même sous un nombre d'aspects illimité, $K$, il en sera de même de $Q$: donc $n < 2$ comme on vient de le voir. D'ailleurs on ne peut avoir $n = 1$, car dans ce cas aucun élément de $Q$ ne pouvant être doué d'une rotation plus que quaternaire, les $m$ faces auxiliaires ne peuvent être leurs propres homologues sous plus de $4m$ aspects: d'où $K \leqq 4m$. Enfin si $n = 0$, comme tous les éléments de $Q$, excepté un, ou deux au plus, ne peuvent être leurs propres homologues que sous un nombre limité d'aspects, cinq au plus, on ne peut avoir $m > 2$: car si $m = 3$ l'une au moins des trois faces auxiliaires ne pourrait être son homologue sous plus de cinq aspects et par suite aurait au moins $\frac{1}{5}K$ homologues distinctes relativement aux $K$ aspects considérés. On aurait donc $m \geqq \frac{1}{5}K$, d'où $K \leqq 5m$; $K$ serait donc limité.

Ainsi les seules surfaces polyédriques qui puissent être pareilles à elles-mêmes sous un nombre illimité d'aspects sont (avec celles des espèces $(0, 0)$ et $(0, 1)$ déjà trouvées) celles des espèces $(1, 0)$ et $(2, 0)$.

Châlon sur Saône 1866.

# Bestimmung von $d\lg\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch die Classenmoduln.

(Von Herrn *J. Thomae* zu Laucha a. d. Unstrut.)

In der „Theorie der *Abel*schen Functionen“ §. 25 *) zeigt *Riemann*, dass $\lg\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\mu)$ durch eine Summe von $\pi$-Functionen und $\lg\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ ausgedrückt werden kann. Zur Bestimmung letzterer Grösse durch die Classenmoduln kann man gelangen, indem man in der Gleichung

$$d\lg\vartheta = \sum_{1}^{p}{}^{(z)}_{(\mu\mu')} \frac{\partial\lg\vartheta}{\partial a_{\mu\mu'}} da_{\mu\mu'}$$

die Differentialcoefficienten durch Integrale algebraischer Functionen ausdrückt. Bei der hier folgenden Ausführung dieser Rechnung ist die *Riemann*sche Bezeichnung überall unverändert beibehalten. Zur grösseren Bequemlichkeit setzen wir noch voraus, dass ausser den sich aufhebenden Verzweigungspunkten nur einfache in $T$ vorkommen, deren keiner mit einem unendlich fernen Punkte zusammenfällt. Mit $k_1$, $k_2$, $k_3$ ... bezeichnen wir diese, — die wir alle als willkürliche betrachten, obschon es hinreicht, $3p-3$, die Classenmoduln, als solche zu betrachten, — so dass $z = k_\mu$ nicht alle übereinander liegenden Punkte von $T$, sondern eben nur den über $z = k_\mu$ befindlichen Verzweigungspunkt bedeutet. Wir schicken noch eine Bemerkung über die Differentiation nach den Verzweigungswerthen voraus. Eine beliebige einwerthige Function $s$ in $T$ ist eine Wurzel einer Gleichung $G(s, z) = 0$ und daher $\frac{ds}{dk_\mu} = -\frac{\partial G}{\partial k_\mu} : \frac{\partial G}{\partial s}$. Hieraus erhellt von selbst die Einwerthigkeit von $\frac{ds}{dk_\mu}$ in $T$. Für $z = \infty$ werden Zähler und Nenner in gleicher Ordnung unendlich gross, also bleibt $\frac{ds}{dk_\mu}$ endlich. Für $s = \infty$ wird aber $\frac{\partial G}{\partial s}$ vom $n-2^{\text{ten}}$ Grade unendlich, wenn $G$ in Bezug auf $s$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade ist, $\frac{\partial G}{\partial k_\mu}$ aber ist in Bezug auf $s$ im allgemeinen von einem höheren Grade, so dass $\frac{ds}{dk_\mu}$, da wo $s$

*) Bd. 54, p. 151 dieses Journals, auch in besonderem Abdruck, Berlin bei *Reimer* 1857, p. 51.

unendlich wird, im allgemeinen auch unendlich wird, aber niemals von einer höhern als der zweiten Ordnung. Ausserdem kann $\frac{ds}{dk_\mu}$ nur noch da, wo $\frac{\partial G}{\partial s}$ Null wird, also in allen Verzweigungspunkten, unendlich werden. Die sich nicht aufhebenden sind unabhängig von einander, und daher kann offenbar $\frac{ds}{dk_\mu}(z = k_\nu)$ nicht unendlich werden, wenn $k_\nu$ von $k_\mu$ verschieden ist, in welchem Falle $\frac{ds}{dk_\mu}$ für $z = k_\mu$ um eine um 1 höhere Ordnung $\infty$ wird als $s$, oder wenn nicht $s$ für $z = k_\nu$ unendlich wird, in welchem Falle $\frac{ds}{dk_\mu}$ wie $s$ für $z = k_\nu$ unendlich wird. In den sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkten, wo $\frac{\partial G}{\partial z}$ und $\frac{\partial G}{\partial s}$ gleichzeitig verschwinden, bleibt $\frac{ds}{dk_\mu}$ endlich, wenn dort $s$ endlich ist. Denn ist dort $s = \alpha$, $z = \zeta$, so ist

$$G = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\overline{s-\alpha}.\overline{s-\alpha} + 2\frac{\partial^2 G}{\partial s\,\partial z}\overline{s-\alpha}.\overline{z-\zeta} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\overline{z-\zeta}.\overline{z-\zeta}\right\}+\cdots,$$

aus welcher Form unsere Behauptung über $-\frac{\partial G}{\partial k_\mu} : \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{ds}{dk_\mu}$ sofort erhellt.

Bei unseren ferneren Untersuchungen liegt die Zerschneidung der Fläche $T$ in eine einfach zusammenhängende $T'$ zu Grunde, wie sie *Riemann* (§. 18, p. 143) angiebt, und die Verzweigung von $T$ ist durch die Gleichung $F(s, z) = 0$ gegeben.

Differentiiren wir das überall endliche Integral $u_\nu(s, z) = \int \frac{\varphi_\nu(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} \partial z$, welches am Querschnitt $b_{\nu'}$ den Periodicitätsmodul $a_{\nu\nu'}$, bei $a_{\nu'}$ den Periodicitätsmodul Null, bei $a_\nu$ aber den Periodicitätsmodul $i\pi$ hat, nach $k_\mu$, was unter dem Integralzeichen geschieht, so finden wir mit Rücksicht auf die oben angegebenen Regeln, dass $\frac{du_\nu(s, z)}{\partial k_\mu}$ ein Integral zweiter Gattung mit dem Periodicitätsmodul $\frac{\partial a_{\nu\nu'}}{\partial k_\mu}$ am Schnitte $b_{\nu'}$ und dem Periodicitätsmodul 0 an jedem Schnitte $a_\nu$, $a_{\nu'}$ . . . sei und im Punkte $z = k_\mu$ unendlich gross erster Ordnung wird (*Riemann*, §. 4, p. 120).

Ein Integral zweiter Gattung, welches als Function von $z_1$ im Punkte $\varepsilon = (s, z)$ wie $-\frac{1}{z - z_1}$ unendlich gross wird, bringt man daher leicht in die Form

$$t\{\varepsilon, (s_1, z_1)\} = \sum_{1}^{p}{}_{(\mu)} \frac{\partial u_\nu(s_1, z_1)}{\partial k_\mu} c_{\nu\mu} - \frac{\psi(s_1, z_1)}{\chi(s_1, z_1)} \cdot \lim_{z = z_1} \frac{\chi(s_1, z_1)}{\overline{z - z_1}\,\psi(s_1, z_1)},$$

worin $\frac{\psi}{\chi}$ in $p$ willkürlich gewählten Verzweigungspunkten, über die sich die Summation erstreckt, und im Punkt $\varepsilon$ unendlich gross erster Ordnung wird. Setzen wir

$$v_\nu = u_\nu(s,z) - \sum_1^p{}_\varrho\, u_\nu(s_\varrho, z_\varrho),$$

so ist

$$(1.)\qquad \frac{\partial \lg\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial z} = \sum_1^p{}_\varrho\, t\{\varepsilon, (s_\varrho, z_\varrho)\} + C,$$

(*Riemann*, §. 25, p. 151), woraus folgt, dass $t\{\varepsilon, (s_\varrho, z_\varrho)\}$ bei $b_\lambda$ den Periodicitätsmodul $\frac{2\varphi_\lambda(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ besitzt. Für $z = k_\mu$ folgt hieraus, wenn $K_{\nu\mu} = \lim\limits_{z=k_\mu}\left(c_{\nu\mu}\frac{\partial F}{\partial s}\right)$ gesetzt wird:

$$(2.)\qquad \sum_1^p{}_\varrho \frac{\partial \lg\vartheta}{\partial v_\varrho}\varphi_\varrho(z=k_\mu) = \sum_1^p{}_\varrho \frac{\partial u_\nu(s_\varrho, z_\varrho)}{\partial k_\mu} k_{\nu\mu} + C,$$

woraus durch Vergleichung der Periodicitätsmoduln noch eine Relation gezogen wird, die $da_{\nu\nu'}$ durch $dk_1$, $dk_2$, ... ausgedrückt liefert, nämlich

$$(3.)\qquad \frac{\partial a_{\nu\nu'}}{\partial k_\mu} = 2\varphi_{\nu'}(z=k_\mu) : K_{\nu\mu}$$

(confer: *Jacobi*, fundam. nova, pag. 74). Man beweist noch leicht die Identität:

$$(4.)\qquad \sum_1^p{}_\varrho \frac{\partial \lg\vartheta}{\partial v_\varrho \partial z_{\varrho'}}\varphi_\varrho(z=k_\mu) = \frac{\partial^2 u_\nu(s_{\varrho'}, z_{\varrho'})}{\partial k_\mu . \partial z_{\varrho'}} K_{\nu\mu} = \lim_{z=k_\mu}\left[\frac{\partial F(s,z)}{\partial s}\cdot\frac{\partial t\{\varepsilon_{\varrho'}, (s,z)\}}{\partial z}\right].$$

Bestimmt man nun $\frac{\partial \lg\vartheta}{\partial v_\varrho}$ nach *Riemanns* Regeln, so findet man aus Gleichung (1.):

$$\frac{\partial \log\vartheta}{\partial v_\varrho} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1(s_1,z_1)}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_1(s_2,z_2)}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_1(s_p,z_p)}{\partial z_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_{\varrho-1}(s_1,z_1)}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_{\varrho-1}(s_2,z_2)}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_{\varrho-1}(s_p,z_p)}{\partial z_p} \\ -t(\varepsilon_1,(s,z)), & -t(\varepsilon_2,(s,z)), & \dots & -t(\varepsilon_p,(s,z)) \\ \frac{\partial u_{\varrho+1}(s_1,z_1)}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_{\varrho+1}(s_2,z_2)}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_{\varrho+1}(s_p,z_p)}{\partial z_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p(s_1,z_1)}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_p(s_2,z_2)}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_p(s_p,z_p)}{\partial z_p} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2}, & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_p}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix} + U,$$

worin $U$ von $(s,z)$ unabhängig ist, aber von $(s_1,z_1)\dots(s_p,z_p)$ abhängt.

Diese Gleichung differentiiren wir nach $z$, multipliciren mit $\frac{\partial F}{\partial z}$ und setzen $z = k_\mu$. Sodann wenden wir (4.) an, wodurch die rechte Seite den Factor $K_{\nu\mu}$ erhält. Für das willkürliche $\nu$ wählen wir die Zahl $\varrho$, welche auf der linken Seite vorkommt, dividiren mit $K_{\varrho\mu}$ und summiren über $\varrho$ und erhalten so mit Rücksicht auf (3.):

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\varrho\varrho'}\frac{\partial^2\lg\vartheta}{\partial v_\varrho\,\partial v_{\varrho'}}\frac{\partial a_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu} = -\frac{\partial\lg}{\partial k_\mu}\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial z_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_p}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix}.$$

Wählen wir nun die Grössen $(s_1, \overset{\mu}{z}_1)$, $(s_2, \overset{\mu}{z}_2)$, $\dots$ $(s_p, \overset{\mu}{z}_p)$ für jeden Verzweigungspunkt $k_\mu$ so, dass $v_1, v_2, \dots v_p \equiv 0, 0, \dots 0$ (*Riemann*, §. 16) und verstehen unter dem Functionszeichen $\Delta$ die Determinante, so ist:

$$(5.)\qquad d\log\vartheta(0,0,\dots 0) = -\tfrac{1}{2}\sum_{(\mu)}\frac{\partial\lg}{\partial k_\mu}\left[\frac{\Delta\,\partial u_\nu(s_{\nu'}, \overset{\mu}{z}_{\nu'})}{\partial z_{\nu'}}\right]dk_\mu,$$

worin beim Differentiiren nach $k_\mu$ der Punkt $(s_{\nu'}, \overset{\mu}{z}_{\nu'})$ noch als unabhängig gilt.

Die Werthe $(s_\varrho, \overset{\mu}{z}_\varrho)$ können durch rein algebraische Operationen gefunden werden. Die $p$ willkürlichen Constanten in $\varphi$ lassen sich, wie nothwendig aus *Riemann*, §. 23, p. 147 folgt, so bestimmen, dass diese Function da, wo sie verschwindet, unendlich klein zweiter Ordnung wird ausser in den sich aufhebenden Windungspunkten. Diese Punkte seien $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{p-1}$. Es ist dann (*Riemann*, §. 23, p. 147) $\sum_1^{p-1}{}_\nu u_1(\eta_\nu)$, $\sum_1^{p-1}{}_\nu u_2(\eta_\nu)$, $\dots$ $\sum_1^{p-1}{}_\nu u_p(\eta_\nu)$ $\equiv \sum_1^p{}_\nu \tfrac{1}{2}h_\nu a_{1\nu} + \tfrac{1}{2}g_1 i\pi, \sum_1^p{}_\nu \tfrac{1}{2}h_\nu a_{2\nu} + \tfrac{1}{2}g_2 i\pi, \dots \sum_1^p{}_\nu \tfrac{1}{2}h_\nu a_{p\nu} + \tfrac{1}{2}g_p i\pi$; $h_\nu$, $g_\nu$ ganze Zahlen. Sodann setzen wir

$$v_\nu = u_\nu(s,z) - u_\nu(\sigma,\zeta) - \sum_1^{p-1}{}_\varepsilon u_\nu(\eta_\varepsilon)$$

und drücken nach *Riemann*, §. 27, p. 154

$$\frac{e^{-\sum_1^p{}_\nu \frac{1}{2}h_\nu v_\nu}\cdot\vartheta(\dots, v_\nu - \sum_1^p{}_{\nu'}\tfrac{1}{2}h_\nu a_{\nu\nu'} - \tfrac{1}{2}g_\nu i\pi, \dots)}{\vartheta(\dots, v_\nu, \dots)}$$

durch eine algebraische Function aus. Wird diese in den Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ unendlich klein, so wird offenbar

$$(\ldots, u_\nu(\sigma,\zeta) - \sum_1^p{}_\varrho u_\nu(\varepsilon_\varrho), \ldots) \equiv 0, 0, \ldots 0.$$

Setzen wir hier für $(\sigma,\zeta)$ den Punkt $k_\mu$, so werden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ die Punkte $(s_1^\mu, z_1), (s_2^\mu, z_2), \ldots (s_p^\mu, z_p)$.

Die Coefficienten von $dk_1, dk_2, \ldots$ sind daher ausser den in $u_1, u_2, \ldots u_p$ vorkommenden Constanten, — welche man durch den Multiplicationssatz der Determinanten aussondern kann, — algebraische Functionen der Verzweigungswerthe. Für den Fall nur zweiwerthiger Functionen kann man diese Operationen leicht ausführen, integriren und den constanten Factor von $\vartheta(0,0,\ldots 0)$ durch geeignete Annäherung der Verzweigungspunkte an einander vollständig bestimmen, wie dies von mir an einem anderen Orte bereits für $p=2$ geschehen ist.

Halle, im December 1865.

# Ueber die Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung.

(Von Herrn *G. Roch* in Halle.)

Die zahlreichsten Resultate in Betreff dieses Gegenstandes sind von *Steiner* und von *Hesse* (beide Abhandlungen im 49. Bande dieses Journals) mitgetheilt worden.

Macht man von den Sätzen Gebrauch, welche *Riemann* für die Darstellung algebraischer Functionen durch $\vartheta$-Functionen gegeben hat, oder auch, wendet man den algebraischen Satz an, welcher den Gegenstand meiner Habilitationsdissertation bildet, so lassen sich die hier stattfindenden Verhältnisse und Beziehungen sehr leicht übersehen.

Ich werde im Verlaufe dieser Abhandlung von beiden Hülfsmitteln Gebrauch machen, dabei *Riemanns* Abhandlung über *Abel*sche Functionen kurz als „Abhdlg." citiren, und die daselbst eingeführten Bezeichnungen benutzen.

Wir werden sehen, wie das vorliegende Problem dasselbe ist, wie dies, die *Abel*schen Functionen für $p = 3$ zu entwickeln.

Durch Anwendung des oben genannten algebraischen Satzes hat *Riemann* in seinen Vorlesungen die algebraischen Ausdrücke für die 28 *Abel*schen Functionen für $p = 3$ vollständig entwickelt, unabhängig von ihrer Darstellung durch $\vartheta$-Functionen. Von dieser Ausführung mache ich im Folgenden nicht Gebrauch, da es für diese Zwecke genügt, die allgemeinsten Eigenschaften der *Abel*schen Functionen zu kennen. Ich bemerke schon jetzt, dass wenn $\sqrt{\varphi}$ eine *Abel*sche Function (im *Riemann*schen Sinne), $\varphi = 0$ für unseren Fall die Gleichung einer Doppeltangente ist.

Ich hoffe, dass auch diese Seite dieses geometrischen Problems, sein Zusammenhang mit der Umkehrung algebraischer Integrale, von Interesse sein wird.

## §. 1.

*Riemann*sche Sätze; gerade und ungerade $\vartheta$; Begriff der *Abel*schen Functionen.

Für eine algebraische Gleichung $F(s, z) = 0$ gebe es $p$ linear von einander unabhängige endlich bleibende Integrale $u$ und $2p$ Querschnitte der

Fläche $T$:

$$(a_1),\quad (b_1),\quad \ldots\quad (a_p),\quad (b_p)$$

(s. §. 19 d. Abhdlg.).

Die Integrale $u_1 \ldots u_p$ lassen sich so bestimmen, dass $u_\mu$ an $(a_\mu)$ den Periodicitätsmodul $\pi i$, an den übrigen $(a_\nu)$ den Modul Null, an $(b_\nu)$ den Modul $a_{\mu,\nu}$ hat. Dann ist (s. §. 20 d. Abhdlg.) $a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$.

Diese $p$ Integrale mögen

$$u_1 = \int \frac{\varphi_1(s,z)\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}, \quad \ldots \quad u_p = \int \frac{\varphi_p(s,z)\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

sein.

Seien $s_1,\ z_1 \ldots s_m,\ z_m$ eine Anzahl Punkte in $T_1$ und $u' \ldots u^{(m)}$ die Werthe der $u$ in denselben. Die Punkte sollen dann auch öfters als Punkte $u' \ldots u^{(m)}$ bezeichnet werden.

Seien $c_1 \ldots c_p$ irgend wie gegebene Zahlenwerthe, so lassen sich diese Grössen immer nur auf eine Weise schreiben:

$$(a.)\qquad \begin{cases} u_1' + \cdots + u_1^{(p)} = c_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_p' + \cdots + u_p^{(p)} = c_p, \end{cases}$$

wenn nicht $\vartheta(u_1 - c_1 \ldots u_p - c_p)$ identisch verschwindet für jeden Werth der den Integralen $u_1 \ldots u_p$ gemeinschaftlichen oberen Grenze; ist Letzteres nicht der Fall, so ist $\vartheta$ eine Function dieser *einen* Grenze, oder des Punktes in der Fläche $T$, auf den sich die Werthe von $u_1 \ldots u_p$ beziehen; $\vartheta$ ist Null in den Punkten $u' \ldots u^{(p)}$.

Die $u$ können sich immer um Periodicitätsmoduln unterscheiden, ohne dass dieser Ort ein anderer zu sein braucht. Ueberschreitet der Ort mehrere Querschnitte, so ändern sich sämmtliche $u$ um dieselben Vielfachen der Periodicätsmoduln, wenn man, zum Ausgangspunkte zurückkehrend, die $u$ stetig sich ändern liess; an die Stelle der Gleichungen $(a.)$ müssen also die treten:

$$(b.)\qquad \begin{cases} u_1' + \cdots + u_1^{(p)} = k_1 \pi i + l_1 a_{1,1} + \cdots + l_p a_{1,p} + c_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_p' + \cdots + u_p^{(p)} = k_p \pi i + l_1 a_{p,1} + \cdots + l_p a_{p,p} + c_p, \end{cases}$$

wo $k_1 \ldots k_p,\ l_1 \ldots l_p$ ganze Zahlen. Diese Gleichungen schreiben wir kürzer

$$(c.)\qquad (u_1' + \cdots + u_1^{(p)} \ldots u_p' + \cdots + u_p^{(p)}) \equiv (c_1 \ldots c_p)$$

(s. §. 15 d. Abhdlg.).

Betrachten wir nun den Quotienten

$$Q = \frac{\vartheta(u_1 - e_1' \ldots)\vartheta(u_1 - e_1^{(2)} \ldots)\vartheta(u_1 - e_1^{(m)} \ldots)}{\vartheta(u_1 - c_1' \ldots)\vartheta(u_1 - c_1^{(2)} \ldots)\vartheta(u_1 - c_1^{(m)} \ldots)}.$$

Derselbe bleibt (s. §. 17 und §. 22 d. Abhdlg.) beim Ueberschreiten der $(a_\nu)$ ungeändert, erlangt aber an $(b_\nu)$ den Factor:

$$e^{+2((e_\nu' - c_\nu') + (e_\nu^{(2)} - c_\nu^{(2)}) + \cdots + (e_\nu^{(m)} - c_\nu^{(m)}))}.$$

Diese Eigenschaft, an den beiden Seiten eines Querschnittes Werthe zu haben, die sich um constante Factoren unterscheiden, behält $Q$ auch nach Multiplication mit

$$e^{k_1 u_1 + \cdots + k_m u_m}.$$

In den $mp$ Punkten, in denen der Zähler von $Q$ verschwindet, mögen die $u$ Werthe $\alpha' \ldots \alpha^{(mp)}$ haben, und in den Nullpunkten des Nenners seien $\beta' \ldots \beta^{(mp)}$ die Werthe der $u$.

Nach dem Vorigen ist:

$$\left(\sum_1^{mp} \alpha_1^{(\nu)} \ldots \sum_1^{mp} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv ((e_1' + \cdots + e_1^{(m)}) \ldots (e_p' + \cdots + e_p^{(m)})),$$

$$\left(\sum_1^{mp} \beta_1^{(\nu)} \ldots \sum_1^{mp} \beta_p^{(\nu)}\right) \equiv ((c_1' + \cdots + c_1^{(m)}) \ldots (c_p' + \cdots + c_p^{(m)})).$$

Bezeichnen die $g$ und $h$ gebrochne Zahlen, so kann man (s. §. 15 d. Abhdlg.) nur auf eine Weise schreiben:

$$[(e_1 + \cdots + e_1^m - c_1' - \cdots - c_1^m), \ldots (e_p' + \cdots + e_p^m - c_p' - \cdots - c_p^m)]$$
$$= \left[\left(g_1 \pi i + \sum_1^p h_\mu a_{1,\mu}\right), \ldots \left(g_p \pi i + \sum_1^p h_\mu a_{p,\mu}\right)\right].$$

Dann erlangt

$$R = Q.e^{-2\sum_1^p h_\mu u_\mu}$$

beim Ueberschreiten von $(a_\nu)$ den Factor $e^{-2h_\nu \pi i}$, beim Ueberschreiten von $(b_\nu)$ den Factor $e^{2g_\nu \pi i}$ (in den betreffenden, auf anderem Wege hergeleiteten Resultaten des §. 26 d. Abhdlg. ist ein Druckfehler).

Soll $R$ rational sein, so müssen $g$ und $h$ ganz, also

$$\left(\sum_1^{mp} \alpha_1^{(\nu)} \ldots \sum_1^{mp} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv \left(\sum_1^{p} \beta_1^{(\nu)} \ldots \sum_1^{p} \beta_p^{(\nu)}\right)$$

sein. Indem einige $\alpha$ und $\beta$ zusammenfallen, kann die Anzahl der Nullpunkte jede, auch nicht durch $p$ theilbare Zahl werden.

Es giebt dies im Allgemeinen $p$ von einander unabhängige Gleichungen, in Folge deren $p$ der Nullpunkte $\alpha$ durch die übrigen $\alpha$ und die $\beta$ bestimmt sind. Man kann so wieder beweisen, dass eine wie $s$ verzweigte Function, die in $\mu$ Punkten $\infty$ wird, $\mu - p + 1$ Constante enthält.

Bemerkenswerthe Ausnahmefälle hiervon werden uns noch in dieser Abhandlung begegnen.

Anstatt nun die Verzweigungsart der algebraischen Function $s$ von $z$ durch die Fläche $T$ darzustellen, können wir auch $s$ und $z$ als Coordinaten, $F = 0$ als Gleichung einer Curve ansehen.

Ist $F(s, z) = 0$ die Gleichung einer Curve vierter Ordnung, so ist, wenn diese keinen Doppelpunkt hat, $p = 3$. $f(s, z) = 0$ sei eine Curve $m^{\text{ter}}$ Ordnung, dann ist $f$ eine Function von $s$ und $z$, welche in $4m$ Punkten der Fläche $T$ $\infty$ wird, und zwar da, wo $s = z = \infty$ ($s$ und $z$ werden hier wie noch weiter erwähnt wird, gleichzeitig unendlich); die $4m$ Nullpunkte, oder die $4m$ Schnittpunkte von $f = 0$ und $F = 0$ sind daher durch $4m - 3$ von ihnen bestimmt, wie bekannt.

Hat $F = 0$ einen Doppelpunkt, so ist $f$ nicht die allgemeinste Function, die in $s = z = \infty$ selbst $\infty$ von $m^{\text{ter}}$ Ordnung wird, denn sie hat in den beiden im Doppelpunkt vereinigten Punkten (den Werthenpaaren $\gamma$, $\delta$ nach §. 6 d. Abhdlg.) *gleiche* Werthe. Dadurch wird der Widerspruch aufgehoben, der darin läge, dass beim Vorhandensein eines Doppelpunktes, d. h. für $p = 2$ (s. §. II) $4m - 2$ der Schnittpunkte willkürlich wären.

Aus Obigem folgt, dass eine rationale Function nicht als Quotient *zweier* $\vartheta$ geschrieben werden kann. Sonst müssten

$$\sum_1^p \alpha \equiv \sum_1^p \beta$$

sein, oder die $\alpha$ und $\beta$ auf einander fallen, wenn nicht $\vartheta(u - \sum_1^p \alpha)$ identisch Null ist.

Sei $Q$ ein Quotient zweier $\vartheta$, so ist der einfachste Fall der, dass die $g$ und $h$ den grössten Nenner 2 haben. Dann ist das Quadrat von

$$R = Q \cdot e^{-2\sum_1^p h_\mu u_\mu}$$

rational, also $R$ eine Quadratwurzel einer rationalen Function; $R$ hat dann an

$(a_\nu)$ und $(b_\nu)$ die Factoren $e^{-2h_\nu\pi i}$, $e^{+2g_\nu\pi i}$, also $+1$ oder $-1$. Wir bezeichnen nun

$$h_\nu = \tfrac{1}{2}\varepsilon_\nu, \qquad g_\nu = \tfrac{1}{2}\varepsilon'_\nu,$$

und nennen den Complex

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_p \end{pmatrix}$$

die Charakteristik von $R$. Dieselbe kann einmal erhalten werden als Factorensystem

$$e^{\varepsilon_\nu\pi i}, \qquad e^{\varepsilon'_\nu\pi i},$$

das andere Mal durch die Summen der endlich bleibenden Integrale über die Nullpunkte des Zählers und die Summen über die des Nenners. In letzterem Sinne kann man auch von Charakteristik der $\vartheta$-Function in Zähler und Nenner einzeln sprechen. Leicht ist die Charakteristik eines Productes mehrerer $R$ zu bilden. Die Charakteristik von $R_1$ sei

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_p \\ \eta'_1 & \eta'_p \end{pmatrix},$$

so ist die von $RR_1$ oder von $\frac{R}{R_1}$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1+\eta_1 & \varepsilon_p+\eta_p \\ \varepsilon'_1+\eta'_1 & \varepsilon'_p+\eta'_p \end{pmatrix};$$

ist hierin z. B. $\varepsilon_1=\eta_1=1$, so darf für $\varepsilon_1+\eta_1=2$ in der Charakteristik 0 geschrieben werden. Wir drücken dies kürzer auch so aus; nennen wir $(\varepsilon)$ die Charakteristik von $R$, $(\eta)$ die von $R_1$, so hat $R.R_1$ oder $\frac{R}{R_1}$ die Charakteristik $(\varepsilon+\eta)=(\varepsilon-\eta)$.

In der Formel

$$R = \frac{\vartheta(u_1-\sum_1^p \alpha_1^{(\nu)} \dots u_p-\sum_1^p \alpha_p^{(\nu)})}{\vartheta(u_1-\sum_1^p \beta_1^{(\nu)} \dots u_p-\sum_1^p \beta_p^{(\nu)})} e^{-2\sum_1^p h_\mu u_\mu}$$

wollen wir die $\vartheta$-Functionen einfacher

$$\vartheta(u-\sum_1^p \alpha) \quad \text{und} \quad \vartheta(u-\sum_1^p \beta)$$

schreiben und $u-\Sigma\beta$ durch $v$ ersetzen:

$$R = e^{-2\sum_1^p h_\mu v_\mu} \frac{\vartheta(v_1-g_1\pi i-\sum_1^p h_\mu a_{1,\mu}\dots)}{\vartheta(v)}$$

ist von dem vorigen $R$ nur um einen constanten Factor verschieden.

Die $\vartheta$-Function des Zählers kann mit dem Exponentialfactor zu einer neuen allgemeineren $\vartheta$-Function vereinigt werden.

Der Exponent nämlich

$$\sum_1^p \sum_1^p a_{\mu,\nu} m_\mu m_\nu + 2\sum_1^p m_\mu (v_\mu - g_\mu \pi i - \sum_1^p{}_\nu h_\mu a_{\mu,\nu}) - 2\sum_1^p h_\nu v_\nu$$

des allgemeinen Gliedes dieser Reihe kann durch Zerlegung der zweiten Doppelsumme: $2\Sigma\Sigma m_\mu h_\nu a_{\mu,\nu}$ in

$$\sum_1^p \sum_1^p h_\mu a_{\mu,\nu} m_\nu + \sum_1^p \sum_1^p h_\nu a_{\mu,\nu} m_\mu$$

in die Form gebracht werden:

$$\sum_1^p \sum_1^p a_{\mu,\nu} (m_\mu - h_\mu)(m_\nu - h_\nu) + 2\sum_1^p (m_\mu - h_\mu) v_\mu - 2\sum_1^p m_\mu g_\mu \pi i,$$

welches nahezu die Form einer neuen $\vartheta$-Reihe ist, deren $m_\mu$, $m_\nu$ aber sämmtlich oder zum Theil gebrochene Zahlenwerthe durchlaufen. Fügt man zu dieser Reihe noch den Factor

$$e^{2\Sigma g_\mu h_\mu \pi i},$$

so entsteht die Form

$$\sum_1^p \sum_1^p (m_\mu - h_\mu)(m_\nu - h_\nu) a_{\mu,\nu} + 2\sum_1^p (m_\mu - h_\mu)(v_\mu - g_\mu \pi i)$$

und die Exponentialreihe, deren allgemeiner Exponent dies ist, soll durch

$$\vartheta\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_p \\ \varepsilon_1' & \varepsilon_p' \end{pmatrix}(v) \quad \text{oder kürzer} \quad \vartheta(\varepsilon)(v)$$

bezeichnet werden.

Die ursprüngliche $\vartheta$-Reihe ist speciell $\vartheta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(v)$. Die Zahlen $m_\mu - \frac{1}{2}\varepsilon_\mu$ durchlaufen alle ganzzahligen oder um $\frac{1}{2}$ davon verschiedenen Werthe. Wir haben, wenn wir diese Werthe wieder als $m_\mu$ bezeichnen, die $\vartheta$-Reihe jetzt in der Form

$$(\sum_{-\infty}^{\infty})^p e^{(\sum_1^p)^2 a_{\mu,\nu} m_\mu m_\nu + 2\sum_1^p m_\mu (v_\mu - \frac{1}{2}\varepsilon_\mu' \pi i)}.$$

Diese Reihe bleibt offenbar ungeändert, wenn sämmtliche $m$ durch $-m$ ersetzt werden. Man kann dies aber auch erreichen, indem man $v_1 \dots v_p$ in $-v_1 \dots -v_p$ verwandelt und mit

$$e^{2\sum_1^p m_\mu \varepsilon_\mu' \pi i} = e^{\sum_1^p \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu' \pi i}$$

multiplicirt. Daraus folgt

$$\vartheta(-v_1 \ldots -v_p) = \vartheta(v_1 \ldots v_p) e^{-\sum_1^p \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu \pi i};$$

oder, die $\vartheta$-Function mit der Charakteristik $(\varepsilon)$ ist gerade oder ungerade, je nachdem

$$\varepsilon_1 \varepsilon'_1 + \cdots + \varepsilon_p \varepsilon'_p \equiv 0 \mod 2$$

oder

$$\varepsilon_1 \varepsilon'_1 + \cdots + \varepsilon_p \varepsilon'_p \equiv 1 \mod 2.$$

Für $p = 1$ ist $\binom{1}{1}$ die einzige ungerade Charakteristik $\binom{0}{1}$, $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{0}$ sind die geraden.

Für $p = 2$ sind

$$\binom{1\ 0}{1\ 0}, \binom{1\ 0}{1\ 1}, \binom{1\ 1}{1\ 0}, \binom{0\ 1}{0\ 1}, \binom{1\ 1}{0\ 1}, \binom{0\ 1}{1\ 1}$$

die 6 ungeraden, ausserdem giebt es 10 gerade. Die Gesammtzahl beider Arten ist immer $2^{2p}$. Sei $\alpha_p$ die Zahl der geraden, $\beta_p$ die der ungeraden Charakteristiken; aus jeder der $\alpha_p$ erhalten wir eines der $\beta_{p+1}$ durch Anhängen von $\binom{1}{1}$, und eines der $\alpha_p$ durch Anhängen von $\binom{0}{1}, \binom{1}{0}$ oder $\binom{0}{1}$; umgekehrt bei $\beta_p$; dies liefert die Gleichungen

$$\beta_{p+1} = 3\beta_p + \alpha_p, \qquad \alpha_{p+1} = 3\alpha_p + \beta_p,$$

hieraus

$$\alpha_{p+1} + \beta_{p+1} = 4(\alpha_p + \beta_p),$$
$$\alpha_{p+1} - \beta_{p+1} = 2(\alpha_p - \beta_p).$$

Da $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 1$, so kommt

$$\alpha_p = \tfrac{1}{2}(2^{2p} + 2^p) = 2^{p-1}(2^p + 1),$$
$$\beta_p = \tfrac{1}{2}(2^{2p} - 2^p) = 2^{p-1}(2^p - 1).$$

Nach diesen Erörterungen über gerade und ungerade $\vartheta$ benutzen wir wieder die alte Schreibweise für $R$, kürzen dieselbe aber ab, indem wir nicht den Exponentialfactor mit hinzuschreiben und auch statt der $p$ Argumente nur eines ohne irgend einen Index hinschreiben. Wir schreiben also

$$R = \frac{\vartheta(u - \sum_1^p \alpha)}{\vartheta(u - \sum_1^p \beta)}.$$

Soll $R$ in $p-1$ Punkten Null werden, so hat es die Form

$$R = \frac{\vartheta(u - u' - \sum_1^{p-1} \alpha)}{\vartheta(u - u' - \sum_1^{p-1} \beta)}.$$

Dies kann eine Quadratwurzel eines rationalen Ausdruckes z. B. dann sein, wenn

$$2(\sum_1^{p-1}\beta_1 \ldots \sum_1^{p-1}\beta_p) \equiv (0 \ldots 0),$$

$$2(\sum_1^{p-1}\alpha_1 \ldots \sum_1^{p-1}\alpha_p) \equiv (0 \ldots 0).$$

Wir haben z. B. in der ersten Gleichung die $p-1$ Punkte $\beta$ zu bestimmen; sie genügen den $p$ Gleichungen, die in dieser einen stecken und die Summen, über die $p-1$ Punkte doppelt ausgedehnt, sind Null. Diese $p-1$ Punkte sind daher solche, in denen eine Function $\varphi$ gleich $0^2$ werden kann. Sollen nämlich durch $p$ Gleichungen

$$(\sum_1^{2p-2}\beta_1^{(\mu)} \ldots \sum_1^{2p-2}\beta_p^{(\mu)}) \equiv (0, \ldots 0)$$

$p-1$ der $2p-2$ Punkte als Function der übrigen bestimmt werden, so sind stets, wie ich in einer kleinen Abhandlung genauer ausführen werde, die $2p-2$ Punkte die, wo eine Function $\varphi$ gleich Null werden kann. In den jetzigen Gleichungen fallen die $2p-2$ Punkte paarweise auf einander, also $\varphi$ ist in $p-1$ Punkten $0^2$.

Diese Systeme $\Sigma\alpha$ und $\Sigma\beta$ genügen der Bedingung, dass die $g$ und $h$ den grössten Nenner 2 haben. In $R$ müssen solche $\vartheta$ eingeführt werden, dass $\vartheta(u-u'-\Sigma\alpha)=0$ für $u=u'$; oder

$$\vartheta(\varepsilon)(v), \qquad v=u-u'$$

muss gleich Null sein für $v=0$; dieser Bedingung genügen unbedingt die ungeraden $\vartheta$. Nun sei $\varphi=0^2$ in den Punkten $\alpha$, $\psi=0^2$ in den Punkten $\beta$ (auch $\psi$ eine Function, so dass $\int \frac{\psi\, dz}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ ein endlich bleibendes Integral), so muss $R^2=\frac{\varphi}{\psi}$ sein, oder

$$\frac{\vartheta(u-u'-\sum_1^{p-1}\alpha)}{\vartheta(u-u'-\sum_1^{p-1}\beta)} = A\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}.$$

Die Constante $A$ wird natürlich von der Lage des Punktes $u'$ abhängen.

Diese Quadratwurzeln $\sqrt{\varphi}$, $\sqrt{\psi}$ nennt *Riemann Abel*sche Functionen, und wir werden sehen $\varphi=0$, $\psi=0$ sind für unseren Fall die Doppeltangenten.

## §. 2.

### Darstellung der Doppeltangenten durch $\vartheta$-Functionen. Berührung von Curven. Ein algebraischer Satz.

Es sei $F(s, z) = 0$ so beschaffen, dass kein Glied der Gleichung den vierten Grad übersteigt, $F=0$ auch, wie wir sagen wollen, von vierter Ordnung. Dann kann man für $s = z = \infty$ aus $F = 0$ eine Gleichung herleiten, welche vier endliche Werthe von $\frac{s}{z}$ liefert, $s$ und $z$ sind also gleichzeitig unendlich. $\frac{\partial F}{\partial s}$ wird für $s = z = \infty$ selbst $\infty^3$, also in 12 Punkten $\infty^1$. Fallen daher keine Wurzeln von $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ auf einander, so ist $u = 12 = 2p+2n-2$, mithin

$$2p = 12-6, \quad p = 3,$$

(s. §. 7 d. Abhdlg.).

Wir können uns nun, anstatt die Verzweigungsart der Function $s$ von $z$ durch die Fläche $T$ darzustellen, die Gleichung $F(s, z) = 0$ als Gleichung einer Curve denken, $s$ und $z$ die Coordinaten eines Punktes einer Ebene. Wären 1, 2 oder 3 Doppelpunkte vorhanden, d. h. wäre für 1, 2 oder 3 Werthenpaare von $s$ und $z$: $\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$, so würde sich $p$ respective auf 2, 1 oder 0 reduciren; mehr Doppelpunkte können also nicht da sein, ohne dass die Fläche $T$ zerfällt, oder die Curve $F = 0$ aus Theilen besteht*). Nehmen wir einen Doppelpunkt an, so lässt sich in der That zeigen, dass man auf den von *Rosenhain* untersuchten Fall kommt.

Sind $p = 0$, $q = 0$ die Tangenten im Doppelpunkt, so kann $F = 0$ in die Form gebracht werden:

$$0 = pq+(a_0q^3+a_1pq^2+a_2p^2q+a_3p^3)+(b_0q^4+\cdots+b_4p^4).$$

Dann ist $r = \frac{p}{q}$ nur in zwei Punkten der Fläche $T$ $\infty^1$; es werde daher $p = qr$ eingeführt; dann erhält man

$$0 = r+q(a_0+\cdots+a_3r^3)+q^2(b_0+\cdots+b_4r^4),$$

*) Man kann dies allgemein durchführen und findet so den Grund, warum das Maximum der Anzahl von Doppelpunkten der Anzahl Punkten gleich ist, in denen sich zwei Curven $C_n$ immer noch schneiden müssen, die durch $\frac{n.n+3}{2}-1$ Punkte gehen (s. *Plücker*, algebraische Curven, p. 216).

und hier ist $\frac{\partial F}{\partial q}$ die Quadratwurzel einer Function, die nach $r$ vom sechsten Grade ist, also $p = 2$.

Wir bleiben zunächst bei $p = 3$ stehen. Solche Curven haben bekanntlich 28 Doppeltangenten; dass so viele existiren müssen, werden wir auch hier sehen.

Alle endlich bleibenden Integrale haben, da $\frac{\partial F}{\partial s}$ von dritter Ordnung ist, die Form

$$\int \frac{as + bz + c}{\frac{\partial F}{\partial s}} ds,$$

und sind daher augenscheinlich durch drei lineare ausdrückbar. Denken wir uns jetzt $F(s, z) = 0$ als Gleichung einer Curve, $s$ und $z$ Coordinaten in einer Ebene. Dann sind $\varphi = 0$ alle beliebigen, die Curve schneidenden Geraden. Seien $u' \ldots u^{IV}$ die Werthe der $u$ in den vier Schnittpunkten; dann müssen die Anfangswerthe der $u$ so bestimmt werden, dass

$$(u_1' + \cdots + u_1^{IV} \cdots u_3' + \cdots + u_3^{IV}) \equiv (0 \ldots 0)$$

(s. §. 23 d. Abhdlg.).

Seien $x = 0$, $\xi = 0$ die Gleichungen zweier Doppeltangenten; dann fallen $u' \ldots u^{IV}$ auf zwei Punkte zusammen, $\alpha'$, $\alpha''$ für $x$ und $\beta'$, $\beta''$ für $\xi$.

Es muss daher $2(\alpha' + \alpha'') \equiv 0$ und $2(\beta' + \beta'') \equiv 0$ sein, so dass

$$r^2 = \left(\frac{\vartheta(u - u' - \alpha' - \alpha'')}{\vartheta(u - u' - \beta' - \beta'')}\right)^2$$

rational und zwar gleich $\frac{x}{\xi}$ ist, oder

$$(1.) \qquad \sqrt{\frac{x}{\xi}} = \frac{\vartheta(u - u' - \alpha' - \alpha'')}{\vartheta(u - u' - \beta' - \beta'')}.$$

Die $\vartheta$ in Zähler und Nenner müssen ungerade $\vartheta$ sein, wenn man $u - u'$ als Argument derselben betrachtet, damit $\vartheta(u - u' - \alpha' - \alpha'') = 0$ für $u = u'$, und es giebt daher so viele Doppeltangenten, als es ungerade $\vartheta$ giebt, d. h. $2^2(2^3 - 1) = 28$ für $p = 3$.

Die Anzahl der Doppeltangenten (oder allgemein der *Abel*schen Functionen) würde eine grössere sein, wenn auch gerade $\vartheta$-Functionen

$$\vartheta(\varepsilon)(v)$$

gleich Null sein könnten für $v = 0$.

Ist $p = 2$, also ein Doppelpunkt vorhanden, so geben die Doppeltangenten nicht mehr *Abel*sche Functionen, da die Functionen $\varphi$ dann alle im Doppel-

punkte Null sein, also $\varphi = 0$ durch den Doppelpunkt gehende Geraden sein müssen.

Ich werde am Schlusse dieser Abhandlung die Ausdrücke der Doppeltangenten durch $\vartheta$-Functionen geben, und den in meiner Habilitations-Dissertation für die *Abel*schen Functionen bewiesenen Satz auch auf solche Doppeltangenten ausdehnen, die nicht *Abel*sche Functionen geben (der Ausdruck sei erlaubt).

Zu allgemeineren Formeln gelangt man durch die Untersuchung der in vier Punkten berührenden Kegelschnitte. Seien $x=0$, $\xi=0$ zwei Doppeltangenten, $\beta' \ldots \beta^{IV}$ ihre Berührungspunkte. Seien $\alpha' \ldots \alpha^{IV}$ vier andere, den drei Gleichungen Genüge leistende Punkte

$$2(\alpha_1' + \cdots + \alpha_1^{IV}, \ldots \alpha_3' + \cdots + \alpha_3^{IV}) \equiv (0, 0, 0).$$

Für die Summen $\alpha' + \cdots + \alpha^{IV}$ sind dann 64 verschiedene Werthe möglich, nämlich

$$(2.) \quad \begin{cases} \alpha_1' + \cdots + \alpha_1^{IV} \equiv \varepsilon_1' \frac{\pi i}{2} + \varepsilon_1 \frac{a_{1,1}}{2} + \cdots + \varepsilon_3 \frac{a_{1,3}}{2}, \\ \alpha_3' + \cdots + \alpha_3^{IV} \equiv \varepsilon_3' \frac{\pi i}{2} + \varepsilon_1 \frac{a_{3,1}}{2} + \cdots + \varepsilon_3 \frac{a_{3,3}}{2}. \end{cases}$$

Hier muss nun das eine System $\varepsilon_1' = \cdots = \varepsilon_3' = \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_3 = 0$ abgerechnet werden, und man gelangt so in ganz ähnlicher Weise, wie Herr *Clebsch* gezeigt hat, zu dem Satze: durch jeden Punkt können 63 in ihm und noch 3 anderen Punkten berührende Kegelschnitte gelegt werden.

Nehmen wir für den beliebigen Punkt einen Berührungspunkt einer Doppeltangente $x$, so müssen $x^2$, $x\xi$, etc. abgerechnet werden, $\xi=0$ eine beliebige andere Doppeltangente; es bleiben daher 36 Kegelschnitte übrig:

*Durch jeden Berührungspunkt einer Doppeltangente gehen 36 Kegelschnitte, die in ihm und noch 3 anderen Punkten berühren.*

Alle berührenden Kegelschnitte lassen sich demnach in 63 Gruppen einordnen; sind $S_1=0$, $S_2=0$ zwei einer Gruppe, so ist $\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$ rational durch $s$ und $z$ ausdrückbar.

Es mögen $\alpha' \ldots \alpha^{IV}$ und $\beta' \ldots \beta^{IV}$ die Berührungspunkte von $S_2 = 0$ und $S_1 = 0$ sein. Dann ist

$$\sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = \frac{\vartheta(u-u'-\alpha'-\alpha'')\,\vartheta(u-u'-\alpha'''-\alpha^{IV})}{\vartheta(u-u'-\beta'-\beta'')\,\vartheta(u-u'-\beta'''-\beta^{IV})}$$

eine rationale Function, die in vier Punkten $\infty^1$ wird. Sie enthält demnach $4-3+1=2$ Constante (s. §. 5 d. Abhdlg.). Legt man durch die $\beta' \ldots \beta^{IV}$

einen Kegelschnitt $\sigma_1 = 0$, so schneidet er noch in vier Punkten. Legen wir durch diese $\sigma_2 = 0$, so enthält $\sigma_2$ noch zwei Constanten und kann daher so bestimmt werden, dass

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}.$$

Ebenso kann, wenn $S_3$ in dieselbe Gruppe gehört, $\sqrt{\frac{S_3}{S_1}} = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$ gemacht werden, und es gehen $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ durch dieselben vier Punkte. Daher können Constanten $k_1$, $k_2$, $k_3$ so bestimmt werden, dass

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3 = 0$$

oder

$$k_1\sqrt{S_1} + k_2\sqrt{S_2} + k_3\sqrt{S_3} = 0.$$

Specielle Kegelschnitte $S$ sind die Producte $x\xi$, $y\eta$, $z\zeta$, wenn $x=0 \ldots \zeta=0$ Doppeltangenten sind und $\sqrt{x\xi}$, $\sqrt{y\eta}$, $\sqrt{z\zeta}$ in dieselbe Gruppe gehören; wir finden hierdurch unsern algebraischen Satz für $p = 3$:

*Zwischen drei in dieselbe Gruppe gehörigen Producten je zweier Abelschen Functionen findet eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten statt* *).

Diese auf die Anzahl der Constanten gestützten Beweise, von denen *Riemann* den ersten in seinen Vorlesungen gegeben hat, lassen sich sehr einfach führen: Sei $\sqrt{\frac{x\xi}{y\eta}}$ rational; es wird in $2p-2$ Punkten $\infty^1$, muss also $p-1$ Constante linear enthalten. Man erkennt aber hierin eine Lücke; offenbar ist $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ auch in $2p-2$ Punkten $\infty^1$ und enthält dennoch $p$ Constanten (die in $\varphi_1$ enthaltenen Constanten). Es hat dies einen tiefer liegenden Grund, wie schon oben angedeutet wurde. Dieser Satz soll im Folgenden als Fundamentalsatz bezeichnet werden. Aus den Darstellungen der berührenden Curven durch $\vartheta$-Functionen folgen auch alle die Sätze, welche Herr *Clebsch* gegeben hat, und es ist auch im Wesentlichen diese bis jetzt benutzte Anwendung der $\vartheta$-Functionen identisch mit der directen Anwendung des Additionstheorems, wie es Herr *Clebsch* zeigt. Nur einen Satz will ich hier besonders anführen, nämlich:

Die Berührungspunkte von 3 Doppeltangenten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ können nicht auf einem Kegelschnitt liegen, wenn die Charakteristik von $\sqrt{xyz}$

*) Dieser Satz ist von *Hesse* bewiesen worden. Er ist der specielle Fall eines ganz allgemeinen Theorems.

gerade ist. Lägen diese 6 Punkte $\alpha' \ldots \alpha^{VI}$ auf einem Kegelschnitt, so schnitte derselbe in noch 2 Punkten, $\beta'$, $\beta''$, und es wäre

$$(\alpha'+\cdots+\alpha^{VI}+\beta'+\beta'') \equiv (0,0,0),$$

oder da $2(\alpha'+\cdots+\alpha^{VI}) \equiv (0,0,0)$, so müsste auch

$$2(\beta'+\beta'') \equiv (0,0,0)$$

sein. Dann wäre $(\beta'+\beta'') \equiv (\alpha'+\cdots+\alpha^{VI})$ eine gerade Charakteristik und die beiden durch $\beta'$, $\beta''$ bezeichneten Punkte müssten wegen $2(\beta'+\beta'') \equiv (0,0,0)$ offenbar Berührungspunkte einer Doppeltangente sein. Wenn also keine gerade $\vartheta$-Function $\vartheta(n)(u-u')$ gleich Null ist für Werthe Null der Argumente, oder, was dasselbe ist, wenn es nur 28 Doppeltangenten giebt, so ist unser Satz wahr. Wir können ihn auch so aussprechen: Liegen die 6 Berührungspunkte von drei Doppeltangenten auf einem Kegelschnitt, so geht dieser auch immer durch die Berührungspunkte einer vierten Doppeltangente, und diese vier Doppeltangenten sind zwei Paare einer Gruppe.

Geht man von den Charakteristiken aus, die zu $p=2$ gehören, so überzeugt man sich leicht, dass jede der 63 Gruppen auch auf gleich viele Arten als Product $\sqrt{x\xi}$ erhalten werden kann, oder dass in jede Gruppe gleich viele, nämlich

$$\frac{28.27}{1.2.63} = 6$$

Paare von Doppeltangenten gehören, sammt unendlich vielen Kegelschnitten

$$\sqrt{S} = k\sqrt{x\xi}+l\sqrt{y\eta}$$

($\sqrt{x\xi y\eta}$ rational).

## §. 3.

### Geometrische Anwendungen des algebraischen Fundamentalsatzes.

Ich habe schon in meiner Habilitationsdissertation erwähnt, dass die Gleichung $F(s,z)=0$ durch eine Gleichung

$$(1.) \qquad \sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta} = 0$$

ersetzt werden kann; wir sehen $x=0, \ldots \zeta=0$ sind Doppeltangenten, die paarweise in dieselbe Gruppe gehören. Diesen Satz kann man auch unabhängig von Betrachtungen über die Anzahl der Constanten beweisen, und es sollen jetzt Sätze entwickelt werden, die aus demselben folgen.

In jeder Gruppe giebt es $\frac{6.5.4}{1.2.3}$ Combinationen, die sich zu einer Glei-

chung wie (1.) vereinigen lassen, so dass man 1260 Gleichungen dieser Art hinschreiben kann. Denkt man $x$, $\xi$, etc. durch drei Variable linear homogen, oder linear durch die früheren Variabeln $s$, $z$ und die lineare Einheit ausgedrückt, so werden diese 1260 Gleichungen alle eine identische Folge einer von ihnen, etwa von (1.). Aus (1.) folgt

$$(2.) \qquad -2\sqrt{x\xi y\eta} = x\xi + y\eta - z\zeta.$$

Daraus folgt: die 8 Berührungspunkte zweier in dieselbe Gruppe gehöriger Paare von Doppeltangenten liegen auf einem Kegelschnitt.

Jede Doppeltangente hat eine ungerade Charakteristik (d. h. bildet man die Summen $u_1' + u_1'' \ldots u_3' + u_3''$ für die Berührungspunkte, so sind sie gleich Ausdrücken wie die rechten Seiten von (2.) in §. 2, ($\varepsilon$) eine ungerade Charakteristik), mithin auch die von $\sqrt{x\xi y}$, welche der von $\sqrt{\eta}$ gleich ist, ungerade. Wir wollen die Charakteristik eines Ausdruckes dadurch bezeichnen, dass wir ihn in Klammer setzen:

$$(\sqrt{xy\xi}) = (\sqrt{\eta}).$$

Es giebt in jeder Gruppe 15, im Ganzen

$$\frac{63.15}{3} = 315$$

Kegelschnitte, welche 8 Berührungspunkte von Doppeltangenten verbinden (*Salmon*, treatise etc. p. 198).

Die Benutzung der $\vartheta$ wird uns zeigen, dass 6 Berührungspunkte dreier Doppeltangenten $x_1$, $x_2$, $x_3$ auf einem Kegelschnitt liegen, oder nicht, je nachdem

$$(\sqrt{x_1 x_2 x_3})$$

ungerade oder gerade, oder je nachdem $x_3$ in der Gruppe $x_1 x_2$ vorkommt oder nicht. In jeder Gruppe sind 12, also ausserdem noch 16 Doppeltangenten; daher giebt es

$$\frac{63.6.16}{3} = 2016$$

Combinationen von drei Doppeltangenten, deren Berührungspunkte nicht in einem Kegelschnitt liegen, und

$$\frac{63.6.10}{3} = 1260$$

solche, wo dies stattfindet (s. *Hesse*, dieses Journal, Bd. 49, pag. 319). Betrachten wir jetzt neben den Gruppen $x\xi$, $y\eta$ die beiden $x\eta$, $y\xi$ und $xy$, $\xi\eta$;

dieselben können ausser $x$, $y$, $\xi$, $\eta$ keine Doppeltangente gemein haben. Wäre z. B. $s$ auch in $x\eta$ vorhanden, so hätte man neben (1.) und (2.) eine Gleichung, etwa:

$$a\sqrt{x\eta}+b\sqrt{y\xi}+\sqrt{st}=0, \quad \text{oder} \quad -2ab\sqrt{x\xi y\eta}=a^2x\eta+b^2y\xi-st.$$

Eliminirt man die Wurzeln, so kommt:

$$(ax-by)(b\xi-a\eta) = s(ab\zeta-t).$$

Diese Gleichung muss, da $F=0$ irreductibel ist, identisch erfüllt sein; oder es muss sich $s$ mit $x$ und $y$ oder mit $\xi$ und $\eta$ in einem Punkte schneiden. Dieser Punkt muss auf dem Kegelschnitt liegen

$$x\xi+y\eta-s\zeta = 0,$$

d. h. einer der Berührungspunkte von $x$, $y$ und $s$ oder $\xi$, $\eta$ und $s$ selbst sein. Er wäre dann nothwendig ein Doppelpunkt der gegebenen Curve $F=0$. Soll $p=3$ sein, so können sich demnach nicht drei solche Doppeltangenten in einem Punkte schneiden; da $s$ nicht in der Gruppe $x\eta$ vorkommt, so muss $(\sqrt{x\eta s})$ gerade sein. Ebenso kommt $s$ nicht in $xy$ vor, so dass

$$(\sqrt{xys})$$

auch gerade sein muss.

Drei Doppeltangenten, deren Charakteristiken eine gerade Summe geben, können sich also nicht in einem Punkte schneiden.

Eine andere Analyse zeigt, dass sich wohl $x\xi$ und $y$ in einem Punkte treffen können; dann geht auch $\eta$ durch diesen Punkt. Dies ist der specielle Fall eines *Steiner*schen Theorems (Ueber algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, dieses Journal, B. 47, p. 21).

Mehr als vier Doppeltangenten können sich nicht in einem Punkte schneiden, ohne dass derselbe ein Doppelpunkt der Curve selbst wird.

Eine flüchtige Betrachtung der Charakteristiken genügt zu zeigen, dass es nicht zwei Gruppen giebt, die gar keine Doppeltangente gemein haben. Sei nämlich

$$x\xi \quad y\eta \quad s\zeta \quad s_1\zeta_1 \quad s_2\zeta_2 \quad s_3\zeta_3$$

eine Gruppe, so erhält man noch 30 Gruppen durch Vertauschungen, wie $xy$, $\xi\eta$ und $x\eta$, $y\xi$. Ferner kann man wieder z. B. $\xi$ mit irgend einer der 16 nicht in dieser Gruppe vorkommenden $s$, $t$ vereinigen; da $(\sqrt{x\xi st})$ nie $\binom{0\,0\,0}{0\,0\,0}$, oder $\sqrt{x\xi st}$ nicht rational ist (indem $s$ und $t$ nicht in $x\xi$ vorkommen), so erhält man hierdurch noch 32 Gruppen; jede der 63 Gruppen muss also mit der

ersten $(x\xi)$ wenigstens eine Doppeltangente gemein haben. Drei Gruppen, wie

$$(a.)\quad \begin{cases} x\xi & y\eta & z\zeta & z_3\zeta_3 \\ x\eta & y\xi & rs & r_3s_3 \\ xy & \xi\eta & tu & t_3u_3 \end{cases}$$

umfassen nach dem Vorigen alle 28 Doppeltangenten.

$$(\sqrt{z\zeta rstu}) \text{ ist } \binom{0\,0\,0}{0\,0\,0}$$

Es giebt aber noch andere Systeme von drei Gruppen.

Sei

$$ab,\quad a_1b_1 \ldots a_5b_5$$

eine Gruppe. Eine zweite sei $(bc)$, $c$ nicht in $(ab)$ enthalten. Dann ist $(\sqrt{abc})$ gerade, aber nach dem Früheren entweder $(\sqrt{ba_1c})$ oder $(\sqrt{bb_1c})$ ungerade; denn die drei Gruppen $ba$, $ba_1$, $bb_1$ enthalten alle Doppeltangenten. Daraus folgt, dass $b_1$ oder $a_1$, ebenso dass $b_2$ oder $a_2 \ldots b_5$ oder $a_5$ mit in $(bc)$ enthalten sind, so dass die Gruppe $bc$ die Gestalt haben wird (da die Bezeichnung durch $a$ oder $b$ willkürlich ist):

$$bc,\quad b_1c_1 \ldots b_5c_5,$$

und es giebt nun eine dritte Gruppe,

$$ca \ldots c_5a_5,$$

so dass

$$(\sqrt{ab.b_1c_1.c_2a_2}) = \binom{0\,0\,0}{0\,0\,0},$$

(s. *Steiner*, dieses Journal, Bd. 49, p. 268).

Schreibt man irgend drei solchen drei Gruppen entsprechende Gleichungen hin, wie (1.), also etwa

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2},$$
$$\sqrt{b_1c_1} = \sqrt{bc}+\sqrt{b_2c_2},$$
$$\sqrt{c_2a_2} = \sqrt{ca}+\sqrt{c_1a_1},$$

so muss man die rechte Seite der durch Multiplication entstehenden Gleichung durch die Gleichung (1.) rational machen können, denn die Producte $\sqrt{a_\mu b_\mu . b_\nu c_\nu . c_\pi a_\pi}$ sind rationale Functionen und zwar von der dritten Ordnung; man erhält so

$$\sqrt{ab.b_1c_1.c_2a_2} = f(s, s),$$

wenn $s$ und $s$ die in $F(s, s) = 0$ angenommenen Variablen. Diese Gleichung

wäre eine Transformation von (1.) oder vermöge (1.) eine Identität; sie sagt aus, dass die 12 Berührungspunkte von irgend 6 Doppeltangenten $a, b \ldots a_2, b_2$ von denen nicht zwei Paare zu einer Gruppe gehören, auf einer Curve dritter Ordnung liegen: $f(s, s^3) = 0$.

Ein System wie ($a$.) giebt nicht zerfallende Curven $f = 0$ einmal durch die 64 Combinationen $z\zeta rstu$; dies sind Combinationen der Art, dass nicht irgend 6 Berührungspunkte, etwa von $z\zeta r$ auf einem Kegelschnitt liegen. Dies würde $\frac{64.315}{15} = 1344$ Curven $f_3$ geben (abweichend von *Hesse*, Bd. 49, p. 324 dieses Journals). Ferner rühren nicht zerfallende Curven von ($a$.) her, indem man Combinationen wie $x\xi rstu$ bildet; dies ist $6.16 = 96$ mal möglich; zu jedem System ($a$.) gehören also 160 eigentliche Curven $f = 0$.

Ein System der zweiten Art giebt solche nur auf $6.5.4 = 120$ Arten.

Die Gesammtzahl der Curven $f_3 = 0$, die durch 12 Berührungspunkte gehen, ist übereinstimmend mit *Hesse*, 6048 (s. *Steiner* a. a. O.).

Es giebt offenbar $\frac{63.62}{1.2.3} = 651$ Systeme beider Arten im Ganzen *).

Systeme $S_4$. Nehmen wir 4 Gruppen, so dass die Summe ihrer Charakteristiken $\binom{0\,0\,0}{0\,0\,0}$ ist. Es wären hier noch mehr Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem je zwei der Gruppen 4 oder 6 Doppeltangenten gemein haben. Ich unterlasse vorläufig diese Discussionen (Fragen, die *Steiner* am Ende seiner Abhandlung stellt); es genügt zu sehen, dass diese Hülfsmittel dazu ausreichen. Es folgt sofort, dass diese 16 Berührungspunkte solcher Doppeltangenten, welche Paare aus je einer solcher 4 Gruppen eines Systemes bilden, auf einer Curve vierter Ordnung liegen. Bezeichnen wir symbolisch durch die Anzahl der möglichen Gruppen zugleich irgend eine derselben; nimmt man eine Gruppe 63 und eine andere 62, so sind noch 60, die kein System $S_3$ bilden und daher

$$\frac{63.62.60}{1.2.3.4} = 9765$$

Systeme $S_4$.

Ebenso giebt es Systeme $S_5$ von 5 Gruppen, $x_1\xi_1 \ldots x_5\xi_5$, so dass

*) Bildet man das (rationale) Product

$$\sqrt{(x\xi y\eta . z\zeta z_1\zeta_1 . z_2\zeta_2 z_3\zeta_3 . tut_1u_1 . t_2u_2t_3u_3 . rsr_1s_1 . r_2s_2r_3s_3)},$$

so sieht man, dass alle Berührungspunkte der 28 Doppeltangenten auf 7 Kegelschnitten liegen (s. *Hesse*, dieses Journal, Bd. 40, p. 260).

$\sqrt{x_1\xi_1 \ldots x_5\xi_5} = f(s, z)$. Die Berührungspunkte von 5 Paaren von Doppeltangenten, aus jeder Gruppe von $S_5$ eines genommen, liegen auf einer Curve fünfter Ordnung. Die Anzahl findet sich, wie folgt. Nimmt man die Gruppen 63, 62, 60 an, so giebt eine der übrigen 59 ein System $S_4$; noch zwei bilden mit 60 und 63 oder 62 ein System $S_3$, so dass 56 übrig bleiben, oder die Gesammtzahl der Systeme $S$ ist: $\frac{63.62.60.56}{5.4\ldots1} = 109368$.

Man kann so mit *Steiner* bis zu Systemen $S_6$ und $S_7$ gehen, für welche die in dessen Abhandlung angegebenen Eigenschaften stattfinden, und man findet:

$$\text{Anzahl von } S_6\text{: } \frac{63.62.60.56.48}{6.5\ldots1} = 874944,$$

$$\text{Anzahl von } S_7\text{: } \frac{63.62.60.56.48.32}{7.6\ldots1} = 3999744.$$

Wollte man ein System $S_8$ bilden, so blieben 30 Gruppen, die kein $S_7$ mit 63 ... 32 bilden; davon gehen

$$\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} + \frac{5.4.3}{1.2.3} + \frac{5.4}{1.2} + 5 = 30$$

ab, welche mit 32 und 4, oder 3, oder 2, oder 1 der 63 ... 48 ein System respective $S_6 \ldots S_3$ bilden, d. h. es giebt keine Gruppe mehr, die nicht schon in diesen enthalten wäre, oder es giebt keine Systeme $S_8$, $S_9$ ....

Ausserdem giebt *Steiner* Sätze bezüglich der Kegelschnitte, welche in einem Punkte vierpunktig, in 2 anderen zweipunktig berühren. Dieselben lassen sich durch die Methoden, wie sie z. B. in „*Salmon*, Kegelschnitte, übersetzt von *Fiedler*“ p. 403 angegeben sind, und wie *Hesse* erwähnt (Bd. 49, p. 262 dieses Journals), finden. Einige weitere von *Steiner* darüber gegebene Sätze sind eine augenblicklich zu ersehende Folge der Erzeugung der Curve vierten Grades durch projectivische Kegelschnittsbüschel, die man durch zweimal je 4 Berührungspunkte (etwa von $xy$, $\xi\eta$, $\sqrt{xy\xi\eta}$ rational) legt.

## §. 4.

### Curven mit einem Doppelpunkte ($p = 2$).

Der Ausdruck $\frac{\partial F}{\partial s}$ wird jetzt ausser in den 10 Verzweigungspunkten in zwei Punkten $0'$, in denen $s = \gamma$, $z = \delta$. Functionen $\varphi$ sind Ausdrücke erster Ordnung, die in diesen Punkten 0 sind, oder $\varphi = 0$ sind durch den Doppelpunkt gehende Gerade. Sei $\alpha$ der Berührungspunkt einer durch diesen

Punkt gehenden Tangente, einer uneigentlichen Doppeltangente, $\beta$ der einer zweiten, $x=0$, $y=0$ die Gleichungen derselben; dann ist

$$2\alpha \equiv 2\beta \equiv 0$$

und

$$(1.) \qquad \frac{\vartheta(u-u'-\alpha)}{\vartheta(u-u'-\beta)} = \sqrt{\frac{x}{y}},$$

die Bezeichnung der $\vartheta$-Function im früheren Sinne verstanden. In den zwei Punkten, welche in der Fläche $T$ dem Doppelpunkte entsprechen, habe $u_1$ die Werthe $u_1'$, $u_1''$; $u_2$ die Werthe $u_2'$, $u_2''$; diese Punkte sollen die Punkte $u'$, $u''$ genannt werden. Seien $\alpha' \ldots \alpha^{VI}$ die Schnittpunkte einer Geraden, so ist offenbar:

$$(\alpha' + \cdots + \alpha^{IV}) \equiv (u'+u''+2\alpha) \equiv (u'+u'').$$

Fällt $\alpha'''$ mit $\alpha'$, $\alpha^{IV}$ mit $\alpha''$ zusammen, so wird die Gerade Tangente; es ist dann

$$2(\alpha'+\alpha'') \equiv (u'+u''), \quad \text{oder} \quad \alpha'+\alpha'' \equiv \frac{u'+u''}{2}+\xi,$$

wo $2\xi \equiv 0$.

Seien $\beta'$, $\beta''$ Berührungspunkte einer anderen Doppeltangente

$$\beta'+\beta'' \equiv \frac{u'+u''}{2}+\eta,$$

so ist

$$(2.) \qquad \frac{\vartheta\left(u-\frac{u'+u''}{2}-\xi\right)}{\vartheta\left(u-\frac{u'+u''}{2}-\eta\right)} = \sqrt{\frac{r}{t}},$$

wenn $r=0$, $t=0$ die Gleichungen dieser Doppeltangenten sind. Es giebt 16 Charakteristiken, also 16 Werthsysteme $\xi$, $\eta$ entsprechend den 16 Doppeltangenten; darunter sind 6 ungerade Charakteristiken, entsprechend in (1.) den 6 durch den Doppelpunkt gehenden Tangenten. Sind $\alpha' \ldots \alpha^{IV}$, $\beta' \ldots \beta^{IV}$ resp. die Schnittpunkte zweier Geraden, so ist

$$\frac{\vartheta(u-\alpha'-\alpha'')\vartheta(u-\alpha'''-\alpha^{IV})}{\vartheta(u-\beta'-\beta'')\vartheta(u-\beta'''-\beta^{IV})}$$

rational; eine in $\beta' \ldots \beta^{IV}$ unendliche Function enthält $4-2+1=3$ Constante linear, also ist wenn $a_1 s+b_1 z+c_1=0$ in den Punkten $\beta$, $\frac{as+bz+c}{a_1 s+b_1 z+c_1}$ der allgemeinste Ausdruck einer in $\beta' \ldots \beta^{IV}$ unendlichen Function, also müssen auch diese Functionen, für welche $\alpha''' = \alpha'$, $\alpha^{IV} = \alpha''$ in dieser Form enthalten,

mithin in der That die $\vartheta$-Ausdrücke, die wir angegeben haben, geradlinigen Doppeltangenten entsprechen.

Der Ausdruck

$$\frac{r}{t} = \left( \frac{\vartheta\left(u - \frac{u'+u''}{2} - \xi\right)}{\vartheta\left(u - \frac{u'+u''}{2} - \eta\right)} \right)^2$$

hat ersichtlich, wie es sein muss, in $u'$ und $u''$ gleiche Werthe. Dagegen hat $\sqrt{\frac{r}{t}}$ in $u'$ und $u''$ entweder gleiche oder entgegengesetzte Werthe.

Es giebt für $p=2$ 15 Gruppen; die 6 ungeraden Charakteristiken lassen sich auf 15 Arten zu zwei combiniren; in jeder Gruppe ist daher ein Paar ungerader Charakteristiken. Die anderen 4 ungeraden Charakteristiken combiniren sich in jeder Gruppe mit 4 geraden; es bleiben dann noch 6 gerade, die sich zu 3 Paaren ungerader Charakteristiken vereinigen; denn offenbar sind hier in jeder Gruppe alle Charakteristiken enthalten.

Jede Gruppe enthält 8 Paar eigentliche Doppeltangenten. $\sqrt{\frac{r}{t}}$ ist in $u'$ und $u''$ von gleich grossen oder entgegengesetzten Werthen, je nachdem $\xi$ und $\eta$ beide gerade oder ungerade, oder eines gerade, eines ungerade ist. Die Paare $\sqrt{rt}$, die in $u'$ und $u''$ gleiche Werthe haben, nennen wir erster Art, die anderen zweiter Art. Es giebt in jeder Gruppe 4 Paare erster Art und 4 Paare zweiter Art von Doppeltangenten.

Betrachten wir

$$u = \int \frac{\sqrt{rt}\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}.$$

Dasselbe wird in $u'$, $u''$ logarithmisch unendlich, etwa wie $A' \log(z-\delta)$ und $A'' \log(z-\delta)$; es ist

$$A' \mp A'' = 0,$$

je nachdem $\sqrt{rt}$ erster Art oder zweiter Art ist. Sei $\sqrt{r_1 t_1}$ von derselben Gruppe und Art wie $\sqrt{rt}$, logarithmisch unendlich in $u'$, $u''$ wie $A_1' \lg(z-\delta)$, $A_1'' \log(z-\delta)$, so wird:

$$A_1' u - A' u_1 = A_1' \int \frac{\sqrt{rt}\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}} - A' \int \frac{\sqrt{r_1 t_1}\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

in $u'$ und $u''$ unendlich sein. In dieselbe Gruppe wie $\sqrt{rt}$ gehört auch ein

Product $\sqrt{xy}$ (s. (1.)). Das Integral

$$\int \frac{\sqrt{xy}\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

ist endlich. Nach dem algebraischen Fundamentalsatze, da $p=2$, besteht demnach eine Gleichung der Art:

$$\alpha \int \frac{\sqrt{xy}\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}} + A_1' u - A' u_1 = \text{Const.}$$

oder

$$\alpha\sqrt{xy} + A_1'\sqrt{rt} - A'\sqrt{r_1 t_1} = 0,$$

$\alpha$ eine Constante.

Ebenso besteht zwischen drei Paaren $rt$, $r_1 t_1$, $r_2 t_2$ derselben Gruppe und Art eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten:

$$a\sqrt{rt} + a_1\sqrt{r_1 t_1} + a_2\sqrt{r_2 t_2} = 0.$$

Paare uneigentlicher Doppeltangenten kann man gewissermassen sowohl erster als zweiter Art nennen. Es giebt $2.15 = 30$ mal je 5 Paare Doppeltangenten $r=0$, $t=0$, so dass zwischen den $\sqrt{rt}$ lineare Gleichungen stattfinden; bei $p=3$ waren allemal je 6 solcher Paare; dies erklärt sich naturgemäss, da das Paar der uneigentlichen Doppeltangenten allemal doppelt zu rechnen ist.

Die 8 Berührungspunkte von Doppeltangenten derselben Gruppe und Art liegen auf einem Kegelschnitt.

Die 8 Berührungspunkte von Doppeltangenten derselben Gruppe und ungleicher Art liegen auf einer Curve dritter Ordnung, welche durch den Doppelpunkt geht und die gegebene Curve noch in 2 Punkten schneidet, die mit dem Doppelpunkte auf einer Geraden liegen.

Sei nämlich $g=0$ diese Gerade, $\sqrt{rt}$, $\sqrt{r_1 t_1}$ entgegengesetzter Art, gleicher Gruppe, so kann man

$$\sqrt{rt\,r_1 t_1} = \frac{f(s,z)}{g}\ ^*)$$

schreiben (s. Abhdlg. §. 8), $f(s,z)$ eine Function dritten Grades und dritter Ordnung.

---

*) Diese Schreibweise ist auf unendlich viele Arten möglich, z. B. $\sqrt{rtr_1 t_1} = \frac{f_1(s,z)}{g_1}$, $g_1$ eine andere durch den Doppelpunkt gehende Gerade. Dann ist $f(s,z).g_1 = f_1(s,z).g$ eine Transformation der Gleichung $F(s,z)=0$.

Es giebt im Ganzen $\frac{16.15.14}{1.2.3.4} = 140$ Combinationen der Art, dass $\sqrt{rtr_1t_1}$ rational ist; 60 davon geben je 8 Berührungspunkte, die auf einem Kegelschnitte liegen; 80 Combinationen liefern Curven dritter Ordnung $f(s, z) = 0$.

In jeder Gruppe giebt es ausser den 8 Paaren eigentlicher noch ein Paar uneigentlicher Doppeltangenten. Hier gilt der Satz:

Die beiden Berührungspunkte dieser letzteren liegen mit den vieren eines Paares eigentlicher Doppeltangenten derselben Gruppe auf einem Kegelschnitt, der auch durch den Doppelpunkt geht. Es giebt $15.8 = 120$ solcher Kegelschnitte.

Wir betrachten nun Combinationen von 6 Doppeltangenten $x_1 = 0, \ldots x_6 = 0$, so dass $\sqrt{x_1 \ldots x_6}$ rational durch $s$ und $z$ ausdrückbar ist.

Hier sind folgende Fälle möglich:

$x_1 = 0 \ldots x_6 = 0$ sind die 6 durch den Doppelpunkt gehenden Tangenten. Dann ist $\sqrt{x_1 \ldots x_6}$ rational von dritter Ordnung, in $u'$, $u''$ gleich $0^3$ und in den 6 Berührungspunkten Null. Diese rationale Function hat in $u'$, $u''$ gleiche Werthe, nämlich Null; sie braucht also in ihrer Darstellung durch $s$ und $z$ keinen in $u'$, $u''$ verschwindenden Nenner; die 6 Berührungspunkte liegen demnach auf einer Curve dritter Ordnung, welche mit der gegebenen Curve den Doppelpunkt als solchen gemein hat, deren Zweige die Zweige der gegebenen Curve im Doppelpunkte tangiren.

Es seien 4 der $x_1 \ldots x_6$ uneigentliche, 2 eigentliche Doppeltangenten. Es giebt $8.15 = 120$ solcher Combinationen; die 8 Berührungspunkte liegen auf einer Curve dritter Ordnung, die den Doppelpunkt als solchen mit der gegebenen Curve gemein hat.

Ferner giebt es Combinationen zweier uneigentlicher und vier eigentlicher Doppeltangenten; die 10 Berührungspunkte liegen auf einer durch den Doppelpunkt gehenden Curve dritter Ordnung. Es giebt $\frac{16.15.14.12}{1.2.3.4} = 1680$ solcher Curven.

Endlich mögen alle $x_1 \ldots x_6$ eigentliche Doppeltangenten sein. Hier hat $\sqrt{x_1 \ldots x_6}$ in $u'$, $u''$ gleich grosse Werthe, wenn eine gerade Anzahl; entgegengesetzte Werthe, wenn eine ungerade Anzahl von ungeraden Charakteristiken in den $x_1 \ldots x_6$ enthalten sind. Im ersten Falle liegen die 12 Berührungspunkte auf Curven dritter Ordnung, im zweiten Falle auf Curven vierter Ordnung, die durch den Doppelpunkt gehen und noch in 2 Punkten schneiden, die mit dem Doppelpunkte auf einer Geraden $g = 0$ liegen. Im

zweiten Falle nämlich kann man schreiben: $\sqrt{x_1 \ldots x_6} = \frac{f(s,z)}{g}$. Beide Fälle zusammen finden auf $\frac{16.15.14.12.8}{1.2.3.4.5.6} = 448$ verschiedene Arten statt; dies theilt sich wie folgt:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Fall: | 6 | ungerade | 0 | gerade | Char. | 1 mal |
| | 4 | - | 2 | - | - | 45 - |
| | 2 | - | 4 | - | - | 195 - |
| | 0 | - | 6 | - | - | 15 - |
| 2. Fall: | 5 | - | 1 | - | - | 0 - |
| | 3 | - | 3 | - | - | 120 - |
| | 1 | - | 5 | - | - | 72 - |

Es giebt daher im Ganzen 256 Curven dritter Ordnung, 192 Fälle von Curven vierter Ordnung. Die Herleitung der einzelnen Zahlen würde zu weitläufig sein. Keine dieser Curven zerfällt in niedere.

Man erkennt ohne Schwierigkeit, dass es keine Combination von 6 eigentlichen Doppeltangenten giebt, für welche nicht $\sqrt{x_1 \ldots x_6}$ oder die Wurzel aus dem Product von 4 oder 2 der $x_1 \ldots x_6$ rational wäre. Von complicirteren Combinationen als den bisher betrachteten giebt es also nur solche mit eigentlichen und uneigentlichen Doppeltangenten. Der einzig noch mögliche Fall, der zu unzerlegbaren Curven führt, ist:

4 eigentliche und 4 uneigentliche Doppeltangenten; ihre Berührungspunkte liegen auf einer Curve vierter Ordnung, die mit der gegebenen den Doppelpunkt als solchen gemein hat. Dies ist möglich auf $\frac{16.15.14.12}{1.2.3.4} = 1680$ Arten.

Es giebt keine Systeme höherer Art als $S_4$, im *Steiner*schen Sinne.

Eine wie $T$ verzweigte algebraische Function $\zeta$, die in $m$ Punkten unendlich wird, enthält hier im Allgemeinen $m-1$ Constante. Die Bedingung, dass $\zeta$ in $u'$ und $u''$ gleiche Werthe erlangen soll, lässt in $\zeta$ nur $m-2$ Constante willkürlich; $\zeta$ enthält also dann so viel Constante linear, als es enthält, wenn $p = 3$, oder wenn die einzelne Curve $F(s,z) = 0$ keinen Doppelpunkt hat.

Hat die gegebene Curve vierter Ordnung zwei Doppelpunkte, so ist $p = 1$. Die Ausdrücke der durch einen dieser Punkte gehenden Doppeltangenten durch $\vartheta$-Functionen sind sehr einfach anzugeben; bei der Darstellung der eigentlichen Doppeltangenten muss von der Bedingung Gebrauch gemacht werden, dass die darzustellende Function in den je zwei einem Doppelpunkte entsprechenden Punkten der Fläche $T$ gleich grosse (oder, da wir Quadrat-

wurzeln rationaler Functionen ausdrücken, auch entgegengesetzte) Werthe erlangt. Dadurch wird die Benutzung der $\vartheta$-Function unbequem und bei drei Doppelpunkten, wo $p = 0$, giebt es gar keine $\vartheta$-Functionen. In allen diesen Fällen aber kann man noch von unserem algebraischen Satze Gebrauch machen.

Eigenthümliche Modificationen treten ein, wenn einige der $\vartheta$-Ausdrücke für eigentliche Doppeltangenten mit denen für die uneigentlichen Doppeltangenten zusammenfallen, und sich also in Folge dessen die Anzahl die ersteren vermindert. Dies tritt z. B. ein, wenn der Doppelpunkt der Curve eine Spitze wird.

Die Gleichungen $F(s, z) = 0$, für welche $p = 3$ ist, die sich aber nach der einen Variabeln $s$ bis auf den zweiten Grad erniedrigen lassen, sind in den bisherigen Discussionen gar nicht mitbegriffen. Für solche Gleichungen sind die Functionen $\varphi$ alle durch $s$ allein rational ausdrückbar. In den Gleichungen vierter Ordnung $F(s, z) = 0$, für welche $p = 3$ ist, sind $s$ und $z$ selbst Functionen $\varphi$, diese Gleichungen können also gar nicht der eben erwähnten Art angehören, vielmehr werden sich Gleichungen dieser Art besser als specielle Fälle höherer $p$ betrachten lassen.

Halle, 1864.

# Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.

(Von Herrn *L. Fuchs*.)

Nach dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft stellt man sich in der Theorie der Differentialgleichungen nicht sowohl die Aufgabe, eine gegebene Differentialgleichung auf Quadraturen zurückzuführen, als vielmehr die, den Verlauf ihrer Integrale, für alle Punkte der Ebene, d. h. für alle Werthe der unbeschränkt Veränderlichen aus der Differentialgleichung selbst abzuleiten. Die Analysis lehrt eine Function determiniren, wenn man das Verhalten derselben in der Umgebung derjenigen Punkte ermitteln kann, für welche sie unstetig oder mehrdeutig wird. Es ist daher die wesentliche Aufgabe bei der Integration einer gegebenen Differentialgleichung, die Lage dieser Punkte und das Verhalten der Integrale in deren Umgebung festzustellen. — In diesem Sinne haben *Briot* und *Bouquet* im Journal de l'école polytechnique cah. 36 die Differentialgleichungen der Form $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ behandelt, wenn $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ eine ganze Function von $y$ und $\frac{dy}{dx}$ bedeutet. — In den Abhandlungen der Societät der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1857 hat *Riemann* die Differentialgleichung hergeleitet, welcher die durch die *Gauss*sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen genügen; und man kann umgekehrt die dortige Abhandlung als eine solche ansehen, wodurch die Integration jener Differentialgleichung geleistet ist. — Im Folgenden erlaube ich mir einige Ergebnisse einer über lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten angestellten Untersuchung mitzutheilen, zu welcher ich durch das Studium der *Riemann*schen Abhandlung veranlasst wurde. Es ergab sich, dass die Integrale einer beliebigen linearen Differentialgleichung, welche kein von der abhängigen Variabeln freies Glied enthält, bei Umläufen um die singulären Punkte sich wie Potenzen und Logarithmen verhalten (No. 3). Von besonderem Interesse sind diejenigen linearen Differentialgleichungen, deren sämmtliche Integrale mit einer bestimmten endlichen Potenz von $x-a$ multiplicirt für $x=a$ endlich bleiben, für jeden endlichen Werth von $a$, und mit

einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt für $x = \infty$ dieselbe Eigenschaft besitzen. Ihre Form ist in No. 4 und 5 vollständig festgestellt. Ein specieller Fall dieser Klasse von Differentialgleichungen ist die von *Riemann* in der ebenerwähnten Abhandlung erhaltene Differentialgleichung, so dass die Eigenschaften der durch die *Gauss*sche Reihe darstellbaren Functionen, von denen *Riemann* ausgeht, auch von einem anderen Gesichtspunkte aus als denselben charakteristisch erkannt werden (No. 6). Zu derselben Klasse von Differentialgleichungen gehören auch diejenigen linearen Differentialgleichungen, welchen nur algebraische Functionen genügen. — Im Sommer 1863 hielt *Weierstrass* eine Vorlesung über *Abel*sche Functionen, worin er als Einleitung die Fundamente der Theorie der linearen Differentialgleichungen entwickelte. Dieser Vorlesung werde ich mich in der Art der begrifflichen Feststellung der Integrale einer linearen Differentialgleichung, wie sie in No. 1 angedeutet ist, im Wesentlichen anschliessen. — Die vorliegende Arbeit ist, von einzelnen hier angebrachten Vereinfachungen und Zusätzen abgesehen, zuerst im „Programm der städtischen Gewerbeschule zu Berlin, Ostern 1865" erschienen.

## 1.

Es sei:

$$1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y$$

eine lineare Differentialgleichung $m^{ter}$ Ordnung, deren Coefficienten $p_1, p_2, \ldots p_m$ Functionen von $x$ sind, die innerhalb eines einfach zusammenhangenden Flächentheils $T$ der $x$ Ebene nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig werden, im Uebrigen aber innerhalb dieser Fläche eindeutig und continuirlich sind. Diejenigen Punkte innerhalb $T$, für welche eine oder mehrere der Functionen $p$ unstetig sind, werden wir im Folgenden, nach dem Vorgange von *Weierstrass*, singuläre Punkte nennen. — Es sei ferner $x_0$ irgend ein Punkt in $T$ und um denselben ein Kreis beschrieben, welcher sich bis zum nächsten singulären Punkte erstreckt, so bezeichnen wir das durch diesen Kreis abgegrenzte Flächengebiet, ebenfalls nach *Weierstrass*, als die Umgebung des Punktes $x_0$.

Ist nun $x_0$ ein Punkt, der nicht zu den singulären gehört, so giebt es innerhalb $T$ eine in der Umgebung desselben überall endliche, eindeutige und continuirliche Function $y$, welche der Differentialgleichung (1.) genügt und so

beschaffen ist, dass $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$ $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ beliebig gegebene Werthe annehmen. Dieses lässt sich folgendermassen beweisen:

In der Umgebung von $x_0$ innerhalb $T$ seien die Maxima der Moduln der Functionen $p_1, p_2, \ldots p_m$ resp. $M_1, M_2, \ldots M_m$. Ist $a_1$ der dem Punkte $x_0$ zunächst liegende singuläre Punkt, und setzt man $\mathrm{mod}(a_1 - x_0) = r$, und

$$\frac{M_1}{1-\frac{x-x_0}{r}} = \varphi_1, \quad \frac{M_2}{1-\frac{x-x_0}{r}} = \varphi_2, \quad \cdots \quad \frac{M_m}{1-\frac{x-x_0}{r}} = \varphi_m,$$

so ist bekanntlich (s. *Briot* et *Bouquet* Journal de l'école polytechnique cah. 36 pag. 137) für jedes ganzzahlige $\alpha$

$$\mathrm{mod}\left(\frac{d^\alpha p_1}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_1}{dx^\alpha}\right)_0, \quad \mathrm{mod}\left(\frac{d^\alpha p_2}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_2}{dx^\alpha}\right)_0, \quad \cdots \quad \mathrm{mod}\left(\frac{d^\alpha p_m}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_m}{dx^\alpha}\right)_0,$$

wo wir mit $(f(x))_0$ den Werth einer Function $f(x)$ für $x = x_0$ bezeichnen.

Die sämmtlichen Ableitungen einer der Differentialgleichung (1.) genügenden Function $y$ lassen sich auf die Form bringen:

$$(2.) \qquad \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \mathfrak{A}_{\alpha 1}(x)\cdot\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \mathfrak{A}_{\alpha 2}(x)\cdot\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \mathfrak{A}_{\alpha m}(x)\cdot y,$$

worin die Grössen $\mathfrak{A}$ sich aus den Grössen $p$ und deren Ableitungen durch die Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen.

Man bilde nunmehr die Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \frac{d^m u}{dx^m} = \varphi_1\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \varphi_2\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \varphi_m\cdot u,$$

so lassen sich die sämmtlichen Ableitungen einer derselben genügenden Function $u$ in der ähnlichen Form

$$(4.) \qquad \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \mathfrak{B}_{\alpha 1}(x)\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \mathfrak{B}_{\alpha 2}(x)\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \mathfrak{B}_{\alpha m}(x)\cdot u$$

darstellen. Die Grössen $\mathfrak{B}$ werden aus den entsprechenden Grössen $\mathfrak{A}$ abgeleitet, indem man an die Stelle einer jeden Function $p$ und ihrer Ableitungen die entsprechende Function $\varphi$ und ihre entsprechenden Ableitungen setzt. Hieraus folgt, dass

$$\mathfrak{B}_{\alpha 1}(x_0) > \mathrm{mod}\,\mathfrak{A}_{\alpha 1}(x_0), \quad \mathfrak{B}_{\alpha 2}(x_0) > \mathrm{mod}\,\mathfrak{A}_{\alpha 2}(x_0), \quad \ldots \quad \mathfrak{B}_{\alpha m}(x_0) > \mathrm{mod}\,\mathfrak{A}_{\alpha m}(x_0).$$

Wenn sich daher eine in der Umgebung von $x_0$ eindeutige, continuirliche und endliche Function $u$ bestimmen lässt, der Art, dass sie der Differentialgleichung (3.) genügt, und dass für $x = x_0$ die Grössen $u$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\ldots$ $\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$ beliebig ge-

gebene positive Werthe annehmen, so existirt auch eine in der Umgebung von $x_0$ eindeutige, continuirliche und endliche Function $y$ von der Beschaffenheit, dass sie der Differentialgleichung (1.) genügt, und dass $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$ $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ beliebig gegebene Werthe annehmen.

Setzt man $\frac{x-x_0}{r} = z$, so lässt sich die Differentialgleichung (3.) auf die Gestalt bringen:

$$(3^a.) \qquad (1-z)\frac{d^m u}{dz^m} = M_1 r \frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + M_2 r^2 \frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}} + \cdots + M_m r^m u.$$

Versucht man dieser Differentialgleichung durch eine Reihe von der Form $u = \sum_0^\infty b_a z^a$ zu genügen, so findet man für jeden ganzzahligen Werth von $k$ die Relation:

$$(5.) \quad \begin{cases} (m+k)(m+k-1)\ldots(k+1)b_{m+k} = \\ (m+k-1)(m+k-2)\ldots(k+1)[k+M_1 r].b_{m+k-1} \\ + M_2 r^2.(m+k-2)(m+k-3)\ldots(k+1).b_{m+k-2} \\ + \cdots + M_m r^m b_k. \end{cases}$$

Nimmt man daher $b_0$, $b_1$, $\ldots$ $b_{m-1}$ positiv an, so sind alle Grössen $b$ positiv, und es ist $b_{m+k} = \frac{k+M_1 r}{m+k}\cdot b_{m+k-1} + \psi$, wo $\psi$ eine positive Grösse ist.

Man kann annehmen, dass $M_1 r > m$. Denn wenn dieses nicht stattfindet, so bleiben alle vorhergehenden Schlüsse a potiori gültig, wenn man $M_1$ so gross annimmt, dass dieser Bedingung Genüge geschieht.

Daher ist $b_{m+k} > b_{m+k-1}$ für jedes ganzzahlige $k$, d. h. die Grössen $b$ wachsen mit ihrem Index, und deswegen ist $\frac{b_r}{b_s}$ nicht unendlich, wenn $r < s$, für alle Werthe von $r$ und $s$.

Dividirt man die Gleichung (5.) durch

$$(m+k)(m+k-1)\ldots(k+1).b_{m+k-1},$$

so erhält man

$$\frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} = \frac{k+M_1 r}{m+k} + \frac{M_2 r^2}{(m+k)(m+k-1)}\cdot\frac{b_{m+k-2}}{b_{m+k-1}} + \cdots + \frac{M_m r^m}{(m+k)(m+k-1)\ldots(k+1)}\cdot\frac{b_k}{b_{m+k-1}}.$$

Hieraus folgt

$$\lim \frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} = 1 \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

mithin ist

$$\lim \frac{b_{m+k}\cdot z^{m+k}}{b_{m+k-1}\cdot z^{m+k-1}} = z \quad \text{für} \quad k = \infty,$$

d. h. die Reihe $u = \sum_0^\infty a b_a \cdot z^a$ ist convergent, so lange der Modul von $z$ kleiner ist als 1; oder die Differentialgleichung (3.) hat innerhalb $T$ ein in der Umgebung von $x_0$ gültiges Integral der Form $\sum_0^\infty a c_a (x-x_0)^a$, derart dass $c_0$, $c_1$, $c_2$, ... $c_{m-1}$ oder auch $u_0$, $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0$, ... $\left(\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right)_0$ beliebige positive Werthe erhalten können. —

Hiermit ist die Existenz einer Function $y$ von der oben angegebenen Beschaffenheit erwiesen. —

Umgiebt man jeden der singulären Punkte mit einem beliebig kleinen endlichen Kreise, so ist der übrig bleibende Theil der Fläche $T$, der $T'$ heissen möge, eine mehrfach zusammenhangende Fläche. Ziehen wir von jedem Kreise aus eine sich selbst und die übrigen nicht schneidende Linie, z. B. eine gerade Linie, bis zur Begrenzung von $T$, so wird die Fläche $T'$ durch diese Querschnitte in eine einfach zusammenhangende $T''$ zerlegt. Innerhalb dieser Fläche lässt sich die eben definirte Function $y$ nur auf eine Weise fortsetzen, so dass man eine innerhalb der Fläche $T''$ eindeutige, continuirliche und endliche Function $y$ erhält, welche der Differentialgleichung (1.) genügt und so beschaffen ist, dass für einen Punkt $x_0$ dieser Fläche $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ beliebig gegebene Werthe annehmen.

Geht man in $T''$ von $x_0$ aus und kehrt nach einer oder mehrmaliger Ueberschreitung eines oder mehrerer Querschnitte nach $x_0$ zurück, so erhalten $y$ und dessen Ableitungen im Allgemeinen von den ursprünglichen verschiedene Werthe. Mit diesen als Anfangswerthen ist innerhalb $T''$ eine im Allgemeinen von $y$ verschiedene Function bestimmt. Auf diese Weise erlangt man im Allgemeinen unendlich viele solcher Functionen. Denkt man sich die Fläche $T$ von unendlich vielen Blättern bedeckt, alle mit denselben Querschnitten, und jedem dieser Blätter eine solche Function (einen Zweig) zuertheilt, so hangen diese Blätter längs der Querschnitte so zusammen, dass wenn $x$ in der Fläche $T'$ einen Querschnitt überschreitet, sich ein Zweig continuirlich in einen anderen der unendlich vielen Zweige fortsetzt, da die Werthe der Functionen in $T''$ zu beiden Seiten eines Querschnitts im Allgemeinen von einander verschieden sind.

Hiermit ist der Verlauf eines Integrals der Differentialgleichung (1.) innerhalb $T'$ vollständig bestimmt, wenn in einem Punkte dieser Fläche für $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ beliebig gegebene Anfangswerthe festgesetzt sind.

## 2.

Wenn man im Punkte $x_0$ der Fläche $T'$ für $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$ $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ $m$ verschiedene Werthsysteme festsetzt, so erhält man $m$ particuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots y_m$. Wir wählen, was offenbar immer möglich ist, diese Werthsysteme so, dass die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1 \\ \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m \end{vmatrix}$$

für $x = x_0$ nicht verschwindet. Alsdann kann jedes Integral $\eta$, welches dadurch bestimmt ist, dass $\eta$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d^2\eta}{dx^2}$, $\cdots$ $\frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ resp. die beliebig gegebenen Anfangswerthe $\eta_0$, $\eta_0'$, $\eta_0''$, $\ldots$ $\eta_0^{(m-1)}$ annehmen, als lineare homogene Function von $y_1, y_2, \ldots y_m$ mit constanten Coefficienten dargestellt werden, also

$$(1.) \qquad \eta = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_m$ Constanten sind.

Denn unter der gemachten Voraussetzung liefert das System linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= c_1(y_1)_0 + c_2(y_2)_0 + \cdots + c_m(y_m)_0, \\ \eta_0' &= c_1\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0 + c_2\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_0 + \cdots + c_m\left(\frac{dy_m}{dx}\right)_0, \\ &\vdots \\ \eta_0^{(m-1)} &= c_1\left(\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}\right)_0 + c_2\left(\frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}\right)_0 + \cdots + c_m\left(\frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}\right)_0, \end{aligned}$$

für $c_1, c_2, \ldots c_m$ endliche und bestimmte Werthe; und wenn die Function $\eta$ nebst ihren $m-1$ ersten Ableitungen mit der Function $c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m$ und deren entsprechenden Ableitungen für $x = x_0$ übereinstimmt, so findet nach der vorigen Nummer diese Uebereinstimmung für alle Werthe von $x$ statt.

Ein solches System von Functionen $y_1, y_2, \ldots y_m$, für welches die Determinante $D$ in einem innerhalb $T'$ liegenden Punkte nicht verschwindet, durch welches sich also alle particulären Integrale in der Form der Gleichung (1.) ausdrücken lassen, werde ich im Folgenden ein ***Fundamentalsystem***, und $y_1, y_2, \ldots y_m$ dessen ***Elemente*** nennen.

Jeder Zweig einer Function $y$ kann als ein particuläres Integral innerhalb $T''$ mit bestimmten Anfangswerthen angesehen werden, und lässt sich daher als lineare homogene Function von $y_1, y_2, \ldots y_m$ mit constanten Coefficienten darstellen.

Hieraus ergiebt sich der Satz:

***Zwischen je $m+1$ Zweigen derselben Function $y$ findet eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten statt.***

Denn es seien $y, y', y'', \ldots y^{(m)}$ $m+1$ solche Zweige, so hat man folgende $m+1$ lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m, \\ y' &= c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_m' y_m, \\ &\vdots \\ y^{(m)} &= c_2^{(m)} y_1 + c_2^{(m)} y_2 + \cdots + c_m^{(m)} y_m, \end{aligned}$$

wo die Grössen $c$ sämmtlich bestimmte Constanten sind. Eliminirt man aus denselben die Grössen $y_1, y_2, \ldots y_m$, so erhält man als Eliminationsresultante eine lineare homogene Gleichung zwischen $y, y', \ldots y^{(m)}$ mit constanten Coefficienten.

Um einzusehen, dass bei der Bestimmung einer Function, welche der Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer genügt, der Ausgangspunkt $x_0$ gleichgültig sei, muss noch gezeigt werden, dass

*die Determinante eines Fundamentalsystems für die ganze Fläche $T'$ endlich und von Null verschieden ist.*

Aus den $m$ Gleichungen:

$$(2.) \quad \begin{cases} \frac{d^m y_1}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_1, \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \frac{d^m y_m}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_m \end{cases}$$

folgt:

$$D.p_1 = D^1,$$

wo $D^1$ aus $D$ erhalten wird, wenn man $\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}, \cdots \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}$ resp. durch $\frac{d^m y_1}{dx^m}, \frac{d^m y_2}{dx^m}, \cdots \frac{d^m y_m}{dx^m}$ ersetzt. Bekanntlich ist $D^1$ die Ableitung von

$D$, daher ist

$$\frac{d\log D}{dx} = p_1 \quad \text{oder}$$

$$(3.) \qquad D = C.e^{\int p_1 dx},$$

wo $C$ eine Constante bedeutet, die durch die Anfangswerthe von $y_1, y_2, \ldots y_m$ und ihre Ableitungen für $x = x_0$ bestimmt und der Voraussetzung gemäss von Null verschieden ist. Da $\int p_1 dx$ nur für einen singulären Punkt unendlich werden kann, so folgt, dass $e^{\int p_1 dx}$ und folglich auch $D$ innerhalb $T'$ überall endlich und von Null verschieden ist.

Hieraus folgt auch, dass wenn die Functionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein Fundamentalsystem bilden, sie noch ein solches System ausmachen, wenn man jede derselben auf demselben Wege innerhalb $T'$ um singuläre Punkte herum bis zu dem Punkte $x_0$ zurück fortgesetzt hat.

Die gegebene Definition eines Fundamentalsystems kann auch durch die folgende ersetzt werden:

Ein System von Integralen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ bildet ein Fundamentalsystem, wenn eine Gleichung der Form

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_m\eta_m = 0$$

für keine endlichen bestimmten Werthe der Constanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ Statt haben kann.

Denn es sei $y_1, y_2, \ldots y_m$ irgend ein Fundamentalsystem (im Sinne der ersten Definition), so darf man setzen:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= f_{11}y_1 + f_{12}y_2 + \cdots + f_{1m}y_m, \\
\eta_2 &= f_{21}y_1 + f_{22}y_2 + \cdots + f_{2m}y_m, \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\eta_m &= f_{m1}y_1 + f_{m2}y_2 + \cdots + f_{mm}y_m,
\end{aligned}$$

wo die Grössen $f$ Constanten sind. — Die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mm} \end{vmatrix}$$

darf nicht verschwinden, da sonst zwischen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten Statt finden müsste. Daher lassen sich $y_1, y_2, \ldots y_m$ und folglich *alle* particulären Integrale der linearen

Differentialgleichung als lineare homogene Functionen der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ mit constanten Coefficienten darstellen. Dieses erfordert aber, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}\eta_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}\eta_1}{dx^{m-2}} & \cdots & \eta_1 \\ \frac{d^{m-1}\eta_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}\eta_2}{dx^{m-2}} & \cdots & \eta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d^{m-1}\eta_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}\eta_m}{dx^{m-2}} & \cdots & \eta_m \end{vmatrix}$$

innerhalb $T'$ überall endlich und von Null verschieden ist. Hierdurch ist die Uebereinstimmung der beiden Definitionen erwiesen.

Bekanntlich kann man folgendermassen verfahren, um $m$ particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$(4.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y$$

zu erhalten. Es sei $y_1$ ein particuläres Integral derselben, welches nicht identisch verschwindet, und man setze

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

so genügt $z$ einer linearen Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(5.) \qquad \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} = q_1 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + q_2 \frac{d^{m-3} z}{dx^{m-3}} + \cdots + q_{m-1} . z.$$

Es sei $z_1$ ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist

$$y_2 = y_1 \int z_1\, dx$$

ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung (4.). Man setze

$$z = z_1 \int u\, dx,$$

so genügt $u$ einer linearen Differentialgleichung $m-2^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(6.) \qquad \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} = r_1 \frac{d^{m-3} u}{dx^{m-3}} + r_2 \frac{d^{m-4} u}{dx^{m-4}} + \cdots + r_{m-2} u.$$

Ist $u_1$ ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist

$$z_2 = z_1 \int u_1\, dx$$

ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung (5.) und

$$y_3 = y_1 \int dx \, . \, z_1 \int u_1 dx$$

ein drittes particuläres Integral der Differentialgleichung (4.). Fährt man so fort, so gelangt man schliesslich zu einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(7.) \qquad \frac{dw}{dx} = tw,$$

und man erhält auf diese Weise $m$ particuläre Integrale der Differentialgleichung (4.).

Wir behaupten nun,

*dass die so erhaltenen particulären Integrale ein Fundamentalsystem bilden.*

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, nehmen wir $m=3$ an. In diesem Falle ist die Differentialgleichung (6.) erster Ordnung. Bildeten nun $y_1$, $y_2$, $y_3$ kein Fundamentalsystem, so hätte man eine Gleichung:

$$(8.) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1 dx + c_3 y_1 \int dx \, . \, z_1 \int u_1 dx = 0,$$

wo $c_1$, $c_2$, $c_3$ Constanten sind, die nicht sämmtlich verschwinden. Da $y_1$ nicht identisch verschwindet, so darf man diese Gleichung durch $y_1$ dividiren; differentiirt man alsdann, so erhält man

$$c_2 z_1 + c_3 z_1 \int u_1 dx = 0.$$

Da $z_1$ nicht identisch verschwindet, so darf man wieder durch $z_1$ dividiren, und erhält alsdann durch Differentiation

$$c_3 u_1 = 0.$$

Da nun $u_1$ nicht identisch verschwindet, so hätte man $c_3=0$. Es müsste alsdann

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1 dx = 0$$

sein. Hieraus würde auf ähnliche Weise folgen $c_2 z_1 = 0$, und daher $c_2 = 0$, und folglich auch $c_1 = 0$.

Es ergiebt sich also, dass die Gleichung (8.) nicht bestehen kann, und dass daher die auf die angegebene Weise ermittelten Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

Bemerkenswerth ist die Form, in welche sich die Determinante $D$, welche wir *die Determinante des Fundamentalsystems* $y_1$, $y_2$, ... $y_m$ nennen wollen, mit Hülfe der Integrale $y_1$, $z_1$, $u_1$, ... $w$ bringen lässt.

*Es ist nämlich*

$$(9.) \qquad D = C \, . \, y_1^m \, . \, z_1^{m-1} \, . \, u_1^{m-2} \ldots w,$$

*wo $C$ eine Constante bedeutet.*

Dieses wird folgendermassen bewiesen. In der Differentialgleichung (5.) ist, wie leicht zu sehen,

$$q_1 = p_1 - m\frac{d\log y_1}{dx}.$$

Bezeichnet man die Determinante eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (5.) mit $D_1$, so folgt nach dem Gesetze der Gleichung (3.)

$$D_1 = C'.e^{\int[p_1 - m\frac{d\log y_1}{dx}]dx} = C'.y_1^{-m}e^{\int p_1 dx},$$

d. h. nach Gleichung (3.)

$$(10.) \qquad D_1 = C''.y_1^{-m}.D,$$

wo $C'$ und $C''$ Constanten sind. Ebenso folgt, wenn man mit $D_2$ die Determinante eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (6.) bezeichnet,

$$(11.) \qquad D_2 = C''.z_1^{-(m-1)}.D_1 = C'''.y_1^{-m}.z_1^{-(m-1)}.D.$$

Indem man so fortfährt, ergiebt sich die Richtigkeit der Gleichung (9.).

Wir werden später von diesem Satze eine wichtige Anwendung machen.

## 3.

Nach No. 1 kommt die Aufgabe der Integration einer linearen Differentialgleichung auf die Untersuchung der Frage hinaus, was aus einem beliebigen durch die Anfangswerthe in einem Punkte $x_0$ bestimmten Integrale wird, wenn man es innerhalb $T'$ um einen singulären Punkt herum bis zum Punkte $x_0$ zurück fortsetzt.

Es genügt zu diesem Zwecke, das Verhalten irgend eines Systems von Fundamentalintegralen zu untersuchen. Es sei daher $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung:

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y,$$

wo über die Coefficienten $p$ dieselben Voraussetzungen gemacht werden, wie am Anfange der No. 1. Ist alsdann $u$ irgend ein Integral der Differentialgleichung (1.), so darf man setzen

$$(2.) \qquad u = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m,$$

wo $x_1, x_2, \ldots x_m$ Constanten sind. — Nach einem Umlaufe um einen singulären Punkt $a$ mögen die Functionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ resp. übergehen in $y_1', y_2', \ldots y_m'$, so hat man nach der vorigen No. ein System von Gleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} y_1' = \alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\cdots+\alpha_{1m}y_m, \\ y_2' = \alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2+\cdots+\alpha_{2m}y_m, \\ \qquad\vdots \\ y_m' = \alpha_{m1}y_1+\alpha_{m2}y_2+\cdots+\alpha_{mm}y_m, \end{cases}$$

wo die Grössen $\alpha_{rs}$ Constanten sind. — Nach einem Umlaufe um den Punkt $a$ geht alsdann $u$ über in

$$(4.)\quad u' = y_1\sum_1^m{}_i\alpha_{i1}.x_i+y_2\sum_1^m{}_i\alpha_{i2}.x_i+\cdots+y_m\sum_1^m{}_i\alpha_{im}.x_i.$$

Wir wollen $x_1, x_2, \ldots x_m$ so bestimmen, dass

$$u' = \omega.u$$

wird, wo $\omega$ eine Constante bedeutet. Multiplicirt man zu dem Zweck die Gleichung (2.) mit $\omega$ und subtrahirt sie alsdann von der Gleichung (4.), so ergiebt der Umstand, dass zwischen $y_1, y_2, \ldots y_m$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet, zur Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots x_m$ das folgende System von Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} x_1(\alpha_{11}-\omega)+x_2\alpha_{21} & +\cdots+x_m\alpha_{m1} & = 0, \\ x_1\alpha_{12} & +x_2(\alpha_{22}-\omega)+\cdots+x_m\alpha_{m2} & = 0, \\ \vdots & \vdots \quad\vdots & \\ x_1\alpha_{1m} & +x_2\alpha_{2m} \quad +\cdots+x_m(\alpha_{mm}-\omega) & = 0. \end{cases}$$

Ist $\omega$ eine Wurzel der Gleichung

$$(6.)\quad A = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\omega & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\omega & \ldots & \alpha_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \ldots & \alpha_{mm}-\omega \end{vmatrix} = 0,$$

so lassen sich die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_m$ so bestimmen, dass sie nicht alle verschwinden. Die Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden, da nach der No. 2 die Functionen $y_1', y_2', \ldots y_m'$ ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden. Hieraus folgt, dass die sämmtlichen

Wurzeln der Gleichung (6.) von Null verschieden sind. Setzt man daher

$$\omega = e^{2r.\pi\sqrt{-1}},$$

und legt dem $r$ einen der unendlich vielen und um ganze Zahlen verschiedenen, endlichen Werthe bei, welche diese Gleichung befriedigen, so wird $u(x-a)^{-r}$ in der Umgebung von $a$ eindeutig.

Wir nennen die Gleichung (6.) *die zum singulären Punkte a gehörige Fundamentalgleichung*. Diese Benennung wird gerechtfertigt durch folgenden Satz:

*Die Coefficienten der nach Potenzen von $\omega$ entwickelten Gleichung* (6.) *sind von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig.*

Es ist nämlich der Coefficient von $\omega^k$ der Gleichung $A=0$ bekanntlich die Summe der Hauptunterdeterminanten der $k^{\text{ten}}$ Ordnung der Determinante $\delta$. Es sei nunmehr $u_1, u_2, \ldots u_m$ ein neues Fundamentalsystem, welches mit dem vorigen durch die $m$ Gleichungen

$$u_a = k_{a1}.y_1 + k_{a2}.y_2 + \cdots + k_{am}y_m \quad (\text{für } a = 1, 2, \ldots m),$$

wo die Grössen $k$ Constanten sind, zusammenhängt, man setze die Substitution

$$(K) = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \ldots & k_{mm} \end{Bmatrix}$$

mit der Substitution

$$(A) = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{Bmatrix}$$

zusammen und die resultirende Substitution mit der inversen Substitution von $(K)$, die wir in üblicher Weise mit $(K)^{-1}$ bezeichnen wollen. Alsdann ist die Summe der Hauptunterdeterminanten der $k^{\text{ten}}$ Ordnung derjenigen Determinante, welche aus den Elementen der Substitution $(K)(A)(K)^{-1}$ gebildet wird, der Coefficient von $\omega^k$ in der Gleichung $A'=0$, welche an die Stelle von $A=0$ tritt, wenn man das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots y_m$ durch das Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots u_m$ ersetzt. Nach einer bekannten Eigenschaft der Unterdeterminanten (vergl. *Brioschi* Determinanten §. 7 Formel 61) ergiebt sich nun ohne Mühe, dass dieser Coefficient gleich ist dem Coefficienten von $\omega^k$ in der Gleichung $A=0$.

I. Es seien die Wurzeln der Fundamentalgleichung (6.) $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ alle von einander verschieden, so ergiebt die Substitution jeder derselben in das Gleichungssystem (5.) ein Werthsystem $x$ , $x_2, \ldots x_m$. Das zur Wurzel $\omega_a$ gehörige Werthsystem dieser Grössen sei $c_{a1}, c_{a2}, \ldots c_{am}$, so liefert die Gleichung

$$(7.) \qquad u_a = c_{a1}y_1 + c_{a2}y_2 + \cdots + c_{am}y_m \quad \text{für} \quad a = 1, 2, \ldots m$$

$m$ Functionen $u_1, u_2, \ldots u_m$, welche ein Fundamentalsystem bilden. Denn setzt man

$$(8.) \qquad \omega_a = e^{2r_a\pi\sqrt{-1}},$$

so ist $u_a.(x-a)^{-r_a}$ in der Umgebung von $a$ eindeutig. Man hat daher

$$u_a = (x-a)^{r_a}\varphi_a,$$

wo $\varphi_a$ eine nach ganzen Potenzen von $x-a$ und von $(x-a)^{-1}$ fortschreitende Reihe ist. — Da aber die Differenz zweier der Grössen $r_1, r_2, \ldots r_m$ weder Null noch eine ganze Zahl ist, so kann eine Gleichung der Form

$$C_1(x-a)^{r_1}\varphi_1 + C_2(x-a)^{r_2}\varphi_2 + \cdots + C_m(x-a)^{r_m}\varphi_m = 0,$$

wo $C_1, C_2, \ldots C_m$ Constanten sind, nicht bestehen, ohne dass diese sämmtlich verschwinden; woraus sich ergiebt, dass $u_1, u_2, \ldots u_m$ ein Fundamentalsystem ist.

Wir erhalten also den Satz:

*Im Allgemeinen gehört zu jedem singulären Punkte a ein Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots u_m$, dessen sämmtliche Elemente mit Potenzen von $x-a$ multiplicirt, in der Umgebung von a eindeutig werden, so dass*

$$(9.) \qquad u_1 = (x-a)^{k_1}.\varphi_1, \quad u_2 = (x-a)^{k_2}.\varphi_2, \quad \ldots \quad u_m = (x-a)^{k_m}.\varphi_m,$$

*wo $k_1, k_2, \ldots k_m$ bestimmte endliche Grössen und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ in der Umgebung von a eindeutige Functionen sind.*

II. Wir nehmen jetzt an, es seien Wurzeln der Fundamentalgleichung (6.) einander gleich, und zwar seien $\lambda_1$ Wurzeln gleich $\omega_1$, $\lambda_2$ Wurzeln gleich $\omega_2$, etc. $\lambda_n$ Wurzeln gleich $\omega_n$, wenn $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ die von einander verschiedenen Wurzeln bedeuten, so dass $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = m$. Bezeichnen wir mit $v'$ die Function, in die irgend eine Function $v$ nach einem Umlaufe um den Punkt $a$ übergeht, so gilt folgendes Theorem:

*Ist $\omega$ eine $\lambda$fache Wurzel der Fundamentalgleichung* (6.), *so gehört zu derselben eine Gruppe von Integralen von folgender Eigenschaft:*

$$(10.)\quad \begin{cases} u_1' = \omega u_1, \\ u_2' = \omega_{21} u_1 + \omega u_2, \\ u_3' = \omega_{31} u_1 + \omega_{32} u_2 + \omega u_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_\lambda' = \omega_{\lambda 1} u_1 + \omega_{\lambda 2} u_2 + \cdots + \omega_{\lambda\,\lambda-1} u_{\lambda-1} + \omega u_\lambda, \end{cases}$$

*wo die mit zwei Indices versehenen Grössen $\omega$ Constanten sind. Die zu den verschiedenen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ gehörigen Gruppen von Integralen constituiren zusammen ein Fundmentalsystem.*

Um diesen Satz zu beweisen, verfahren wir folgendermassen: Es ist oben die Existenz eines Integrals nachgewiesen, welches nach einem Umlaufe um den singulären Punkt $a$ übergeht in sich selbst multiplicirt mit $\omega_1$, bezeichnen wir dasselbe mit $u_1'$. Es ist offenbar erlaubt, das Fundamentalsystem $(y_1, y_2, \ldots y_m)$, von dem wir ausgehen, durch ein zweites zu ersetzen, in welchem $u_1'$ an die Stelle eines der Elemente $y$ getreten ist. Giebt es eine zweite Wurzel der Gleichung (6.), die gleich $\omega_1$ ist, so führt ein Verfahren, welches demjenigen ähnlich ist, das wir oben bei den Gleichungen (2.) bis (5.) angewendet haben, zur Bestimmung eines Integrals $u_2'$ als lineare Function der Elemente des zweiten Fundamentalsystems derart, dass

$$u_2' = \omega_{21}' u_1' + \omega_1 u_2',$$

wo $\omega_{21}'$ eine neue unbestimmte Constante ist. Es ist alsdann erlaubt, das zweite Fundamentalsystem durch ein drittes zu ersetzen, in welchem $u_2'$ an die Stelle eines der $m-1$ übrigen Elemente $y$ getreten ist. — Ist eine dritte Wurzel der Gleichung (6.) gleich $\omega_1$, so wird man ein Integral $u_3'$ als lineare Function der Elemente des dritten Fundamentalsystems bestimmen können, derart dass

$$u_3' = \omega_{31}' u_1' + \omega_{32}' u_2' + \omega_1 u_3',$$

wo $\omega_{31}'$, $\omega_{32}'$ neue unbestimmte Constanten sind. Es ist wieder erlaubt, das dritte Fundamentalsystem durch ein viertes zu ersetzen, in welchem $u_3'$ an die Stelle eines der noch übrigen $m-2$ Elemente $y$ getreten ist. Fährt man so fort, so wird die Existenz einer Gruppe von $\lambda_1$ Integralen, die zur Wurzel $\omega_1$ gehört und die im Satze characterisirte Beschaffenheit hat, nachgewiesen, und zu gleicher Zeit ein Fundamentalsystem hergestellt, worin $\lambda_1$ der Elemente $y$ durch die Functionen dieser Gruppe ersetzt sind. Indem man nunmehr von

diesem Fundamentelsysteme ausgeht, wird ebenso die Existenz der zur Wurzel $\omega_2$ gehörigen Gruppe von Integralen nachgewiesen, und es wird möglich sein, ein Fundamentalsystem herzustellen, welches die zu den Wurzeln $\omega_1$ und $\omega_2$ gehörigen Gruppen von Integralen als Elemente enthält. Indem man von diesem Fundamentalsystem ausgeht, und so fortfährt, wird schliesslich gezeigt, dass zu jeder Wurzel $\omega_a$ der Gleichung (6.) eine Gruppe von $\lambda_a$ Integralen mit den im Satze angegebenen Eigenschaften gehöre, und dass alle Gruppen zusammen ein Fundamentalsystem bilden.

Aus diesem hier angedeuteten Verfahren geht zugleich hervor, dass die mit doppeltem Index versehenen Grössen $\omega$ der Gleichungen (10.), wenn sie nicht verschwinden, willkürliche Werthe annehmen können.

Als Corollar zu diesem Theoreme ergiebt sich ein Satz, welcher das Verhalten der Elemente eines Fundamentalsystems, folglich eines jeden Integrals, in der Umgebung eines beliebigen singulären Punktes kennen lehrt, in dem Falle, dass die zu diesem Punkte gehörige Fundamentalgleichung gleiche Wurzeln hat:

***Es sei a irgend ein singulärer Punkt, und von den Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung seien*** $\lambda_1$ ***gleich*** $\omega_1$, $\lambda_2$ ***gleich*** $\omega_2$, ... $\lambda_n$ ***gleich*** $\omega_n$, ***wo*** $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ ***von einander verschieden sind, und*** $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=m$, ***so giebt es ein Fundamentalsystem, dessen Elemente in Gruppen vertheilt werden können, derart dass zu jeder der verschiedenen Wurzeln*** $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ ***eine Gruppe von resp. je*** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ***Integralen gehört. Es sei*** $\omega$ ***eine der Wurzeln und*** $\lambda$ ***der Grad ihrer Vielfachheit, so hat die zu derselben gehörige Gruppe von*** $\lambda$ ***Integralen*** $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ ***die Gestalt:***

$$(11.)\quad \begin{cases} u_1 = (x-a)^r\varphi_{11}, \\ u_2 = (x-a)^r\varphi_{21}+(x-a)^r\varphi_{22}.\log(x-a), \\ u_3 = (x-a)^r\varphi_{31}+(x-a)^r\varphi_{32}.\log(x-a)+(x-a)^r\varphi_{33}.[\log(x-a)]^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\lambda = (x-a)^r\varphi_{\lambda 1}+(x-a)^r\varphi_{\lambda 2}.\log(x-a)+\cdots+(x-a)^r\varphi_{\lambda\lambda}.[\log(x-a)]^{\lambda-1}, \end{cases}$$

***wo*** $r$ ***einen der unendlich vielen um ganze Zahlen von einander verschiedenen Werthe des Ausdruckes*** $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log\omega$ ***bedeutet, und die Grössen*** $\varphi$ ***in der Umgebung von a eindeutige Functionen von*** $x$ ***sind, zwischen denen die Beziehung besteht, dass jede derselben eine lineare homogene Function der Grössen*** $\varphi_{11}$, $\varphi_{21}, \varphi_{31}, \ldots \varphi_{\lambda 1}$ ***mit constanten Coefficienten ist.***

Um diesen Satz zu beweisen, sei $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots \overset{a}{u}_{\lambda_a}$ die zur Wurzel $\omega_a$ gehörige Gruppe des vorigen Theorems, und es werde vorausgesetzt, dass von den Integralen $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots \overset{a}{u}_{\varrho-1}$, wo $\varrho < \lambda_a$, bereits erwiesen sei, dass sie die in den ersten $\varrho-1$ der Gleichungen (11.) angegebene Form haben. Man setze nunmehr

$$(12.) \quad \overset{a}{u}_\varrho = v_{\varrho 1} + v_{\varrho 2}\log(x-a) + v_{\varrho 3}[\log(x-a)]^2 + \cdots + v_{\varrho\varrho}[\log(x-a)]^{\varrho-1},$$

so ist offenbar, dass man die Functionen $v_{\varrho 2}, v_{\varrho 3}, \ldots v_{\varrho\varrho}$ beliebig wählen darf, während alsdann $v_{\varrho 1}$ durch diese Gleichung bestimmt ist. Wir wählen jene Functionen so, dass

$$v'_{\varrho 2} = \omega_a v_{\varrho 2}; \quad v'_{\varrho 3} = \omega_a v_{\varrho 3}; \quad \ldots \quad v'_{\varrho\varrho} = \omega_a v_{\varrho\varrho},$$

d. h. dass $v_{\varrho\mathfrak{b}} = (x-a)^{r_a}\varphi_{\varrho\mathfrak{b}}$ für $\mathfrak{b} = 2, 3, \ldots \varrho$, wo $\varphi_{\varrho\mathfrak{b}}$ eine in der Umgebung von $a$ eindeutige Function bedeutet, und $r_a = \frac{1}{2\pi i}\log\omega_a$ ist.

Setzt man in die Gleichung

$$(13.) \quad \overset{a}{u}'_\varrho = \overset{a}{\omega}_{\varrho 1}\overset{a}{u}_1 + \overset{a}{\omega}_{\varrho 2}\overset{a}{u}_2 + \cdots + \overset{a}{\omega}_{\varrho\,\varrho-1}\overset{a}{u}_{\varrho-1} + \omega_a \overset{a}{u}_\varrho$$

linkerhand für $\overset{a}{u}'_\varrho$ den Werth, der aus der Gleichung (12.) hervorgeht, wenn man an die Stelle von $v_{\varrho 2}, v_{\varrho 3}, \ldots v_{\varrho\varrho}$ resp. $\omega_a v_{\varrho 2}, \omega_a v_{\varrho 3}, \ldots \omega_a v_{\varrho\varrho}$, und an die Stelle von $\log(x-a)$ den Ausdruck $\log(x-a)+2\pi i$ und endlich $v'_{\varrho 1}$ an die Stelle von $v_{\varrho 1}$ setzt; und rechterhand für $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ die für dieselben gültigen Ausdrücke aus den Gleichungen (11.) und ebenso für $\overset{a}{u}_\varrho$ den Werth aus der Gleichung (12.), so darf man, nach Weglassung des Ausdruckes $\omega_a v_{\varrho 2}\log(x-a) + \omega_a v_{\varrho 3}[\log(x-a)]^2 + \cdots + \omega_a v_{\varrho\varrho}[\log(x-a)]^{\varrho-1}$ auf beiden Seiten, die Coefficienten der gleichhohen Potenzen von $\log(x-a)$, von der ersten bis zur $\varrho-2^{\text{ten}}$, einander gleichsetzen, wodurch man $\varrho-2$ Gleichungen erhält. Die letzte dieser Gleichungen giebt $v_{\varrho\varrho}$ als lineare homogene Function der Grössen $\varphi_{rs}(x-a)^{r_a}$, die in den Functionen $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ enthalten sind. Setzt man diesen Werth von $v_{\varrho\varrho}$ in die vorletzte Gleichung ein, so giebt diese $v_{\varrho\,\varrho-1}$ als lineare homogene Function derselben Grössen. Setzt man die gefundenen Werthe von $v_{\varrho\varrho}$ und $v_{\varrho\,\varrho-1}$ in die drittletzte Gleichung ein, so giebt diese $v_{\varrho\,\varrho-2}$ als lineare homogene Function derselben Grössen. Fährt man so fort, so bestimmt man $v_{\varrho 3}, v_{\varrho 4}, \ldots v_{\varrho\varrho}$ als lineare homogene Functionen derselben Grössen. Es ist alsdann noch eine Gleichung von folgender Form zu befriedigen:

$$(14.) \quad v'_{\varrho 1} + \omega_a 2\pi i v_{\varrho 2} + A = \omega_a v_{\varrho 1} + B,$$

wo $A$ eine lineare Function der Grössen $v_{\varrho 3}, v_{\varrho 4}, \ldots v_{\varrho\varrho}$ und $B$ eine lineare Function der Grössen $\varphi_{rs}(x-a)^{r_a}$, die in $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ vorkommen, ist. Denkt man sich in $A$ für die Functionen $v_{\varrho 3}, v_{\varrho 4}, \ldots v_{\varrho\varrho}$ ihre bereits bestimmten Werthe gesetzt, so darf man $v_{\varrho 2}$ durch die Gleichung

$$(15.) \qquad \omega_a 2\pi i v_{\varrho 2} + A = B$$

bestimmen, so dass auch $v_{\varrho 2}$ als lineare Function der Grössen $\varphi_{rs}(x-a)^{r_a}$, die in $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ vorkommen, bestimmt ist. — Es ergiebt sich alsdann für $v_{\varrho 1}$ die Gleichung

$$(16.) \qquad v'_{\varrho 1} = \omega_a v_{\varrho 1}.$$

Aus dieser folgt, dass $v_{\varrho 1} = (x-a)^{r_a}\varphi_{\varrho 1}$ ist, wo $\varphi_{\varrho 1}$ eine in der Umgebung von $a$ eindeutige Function bedeutet.

Hieraus folgt nicht nur, dass auch $\overset{a}{u}_\varrho$ die in Gleichung (11.) angenommene Gestalt hat, sondern dass die in dem Ausdrucke derselben vorkommenden Grössen $\varphi$ mit Ausnahme von $\varphi_{\varrho 1}$ lineare homogene Functionen der in den Integralen $\overset{a}{u}_1, \overset{a}{u}_2, \ldots \overset{a}{u}_{\varrho-1}$ enthaltenen Grössen $\varphi$ sind.

Da nun $\overset{a}{u}_1$ nach den im Anfange dieser Nummer gemachten Entwickelungen, jedenfalls die in der ersten Gleichung (11.) angegebene Gestalt hat, so folgt aus den jetzigen Auseinandersetzungen für $\overset{a}{u}_2$ die Form in der zweiten Gleichung (11.), alsdann für $\overset{a}{u}_3$ die Form in der dritten Gleichung (11.) u. s. w., und zugleich ergiebt sich, dass alle Grössen $\varphi$ einer Gruppe lineare homogene Functionen derjenigen sind, welche nicht mit einer Potenz eines Logarithmus multiplicirt sind; so dass hiermit unser Satz erwiesen ist. —

Ist der Punkt $\infty$ ein singulärer Punkt, so substituire man in die Differentialgleichung (1.) $\frac{1}{t}$ statt $x$, alsdann gehört zu dem singulären Punkte $t=0$ ein Fundamentalsystem der Form (9.) oder (11.), welches das zum Punkte $x=\infty$ gehörige ist, wenn man wieder $t=\frac{1}{x}$ setzt.

Die Functionen $\varphi$ der Gleichungen (9.) oder (11.) lassen sich in der Umgebung von $a$ in Reihen entwickeln, welche nach ganzen Potenzen von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ fortschreiten. Sind die Coefficienten dieser Reihen in gegebenen Fällen vermittelst der Differentialgleichung, in welche die Ausdrücke $u$ zu substituiren sind, bestimmt, so ist das Verhalten der Integrale in der Umgebung von $a$ vollständig bekannt.

Um den Verlauf eines Integrals in der ganzen Ebene zu erforschen, müssen noch die Coefficienten der linearen Substitutionen untersucht werden, wodurch sich die zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme durch einander ausdrücken.

## 4.

Wir nehmen jetzt an, dass in der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y$$

die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots p_m$ in der ganzen unendlichen Ebene eindeutige Functionen von $x$ seien, die nur für eine endliche Anzahl von Punkten $a_1$, $a_2, \ldots a_\varrho$ unstetig werden. Ausserdem muss jetzt im Allgemeinen der Punkt $\infty$ als singulärer Punkt aufgefasst werden.

Die Querschnitte, wodurch die Fläche $T'$ in eine einfach zusammenhängende $T''$ zerlegt wird, sind jetzt Linien, welche von den um die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ beschriebenen beliebig kleinen aber endlichen Kreisen ausgehend, sich selbst und die übrigen niemals schneidend ins Unendliche verlaufen.

Unter einem *zu einem singulären Punkte $a_i$ gehörigen* Fundamentalsysteme verstehen wir von jetzt ab ein solches, dessen Elemente in der Umgebung von $a_i$ die Form (9.) oder (11.) der vorigen Nummer haben.

Wir stellen uns nunmehr folgende Aufgabe:

*Es soll die Beschaffenheit der Coefficienten $p_1, p_2, \ldots p_m$ der Differentialgleichung* (1.) *ermittelt werden, in dem Falle, dass jedes Integral $y$ derselben mit einer endlichen bestimmten Potenz von $x - a_i$ multiplicirt für $x = a_i$ nicht mehr unendlich werde, wenn $a_i$ einer der $\varrho$ singulären Punkte ist, und dass $y$ mit einer endlichen bestimmten Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt für $x = \infty$ ebenfalls nicht mehr unendlich werde.*

Es ist offenbar, dass in diesem Falle in den Elementen eines jeden zu irgend einem singulären Punkte $a_i$ gehörigen Fundamentalsystems die Grössen $\varphi$ nur eine endliche Anzahl von Potenzen von $(x-a_i)^{-1}$ enthalten. Ebenso werden in dem zum Punkte $\infty$ gehörigen Fundamentalsysteme die Grössen $\varphi$ nur eine endliche Anzahl von Potenzen von $x$ enthalten.

I. Wir setzen für $\infty$ das Zeichen $a_{\varrho+1}$, und bezeichnen ein Fundamentalsystem, welches zum singulären Punkte $a_i$ gehört, mit $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots y_m^{(i)}$. Da die Grössen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots y_m^{(i)}$ für jeden Werth von $i$ aus der Zahlenreihe $1, 2, \ldots \varrho+1$ ein Fundamentalsystem constituiren, so darf man setzen:

$$(2.)\quad \begin{cases} y_1^{(1)} = b_{11}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{12}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{1m}^{(i)} y_m^{(i)}, \\ y_2^{(1)} = b_{21}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{22}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{2m}^{(i)} y_m^{(i)}, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_m^{(1)} = b_{m1}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{m2}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{mm}^{(i)} y_m^{(i)}, \end{cases}$$

wo die Grössen $b_{rs}$ Constanten bedeuten. Wir wollen die Substitution

$$\begin{Bmatrix} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} & \cdots & b_{1m}^{(i)} \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & \cdots & b_{2m}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1}^{(i)} & b_{m2}^{(i)} & \cdots & b_{mm}^{(i)} \end{Bmatrix}$$

mit $(B)_i$ bezeichnen, und für $i = 1, 2, \ldots \varrho$

$$(3.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad y_a^{(i)} = (x - a_i)^{r_{ia}} \varphi_a^{(i)}, \\ \text{und für } i = \varrho + 1 \\ \qquad\qquad y_a^{(\varrho+1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\varrho+1,a}} \varphi_a^{(\varrho+1)} \end{array} \right.$$

setzen, so dass die Function $\varphi_a^{(i)}$ eine ganze Function von $\log(x - a_i)$ bedeutet, deren Coefficienten in der Umgebung von $a_i$ eindeutige Functionen von $x$ sind, und ebenso $\varphi_a^{(\varrho+1)}$ eine ganze Function von $\log\frac{1}{x}$, deren Coefficienten in der Umgebung von $\infty$ eindeutige Functionen von $x$ sind.

Setzt man alsdann für $i = 1, 2, \ldots \varrho + 1$

$$(4.)\quad \omega_{ia} = e^{2\pi\gamma - 1 \cdot r_{ia}},$$

so sind $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \ldots \omega_{im}$ die $m$ Wurzeln der zum singulären Punkte $a_i$ gehörigen Fundamentalgleichung.

Nach einem Umlaufe um den singulären Punkt $a_1$ gehen die Functionen $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_m^{(1)}$ in lineare Functionen derselben über, welche durch Anwendung einer gewissen Substitution $(R)_1$ erhalten werden, deren Form sich aus den Gleichungen (10.) der vorigen Nummer ergiebt. Um zu finden, worin jene Functionen übergehen, wenn man einen Umlauf um den Punkt $a_i$ macht, muss man auf dieselben zuerst die Substitution $(B)_i$, darauf eine Substitution $(R)_i$, vermöge deren die linearen Functionen von $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots y_m^{(i)}$ bestimmt werden, in welche die letzteren Functionen nach einem Umlaufe um $a_i$ übergehen, und deren Form aus den Gleichungen (10.) der vorigen Nummer sich ergiebt, und endlich die Substitution $(B)_i^{-1}$, womit wir wieder die inverse Substitution von $(B)_i$ bezeichnen, anwenden.

Durchläuft $x$ in directer Richtung die Begrenzung einer Fläche, welche die sämmtlichen singulären Punkte enthält, darauf dieselbe Curve in entgegengesetzter Richtung, so erhält die Function offenbar ihren ursprünglichen Werth wieder. Der letztere Weg ist aber einem Umlaufe um den Punkt $\infty$ gleich zu achten, während der erstere durch die successiven Umläufe um die einzelnen singulären Punkte ersetzt werden kann. Man kann sich demnach, wenn man den Punkt $\infty$ mit zu den singulären Punkten rechnet, auch so ausdrücken: die Function nimmt zuletzt ihren früheren Werth an, wenn man successive alle singulären Punkte umkreist.

Bezeichnen wir eine Substitution $(S)$, die durch Zusammensetzung mehrerer anderer $(k)$, $(l)$, ... entstanden ist, symbolisch mit

$$(S) = (k)(l)\ldots,$$

so werden die Werthe, welche die Functionen $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$ ... $y_m^{(1)}$ nach successiver Umkreisung sämmtlicher singulärer Punkte erhalten, gefunden, wenn man auf dieselben die Substitution

$$(R)_1(B)_2(R)_2(B)_2^{-1}(B)_3(R)_3(B)_3^{-1}\ldots(B)_{\varrho+1}(R)_{\varrho+1}(B)_{\varrho+1}^{-1}$$

anwendet. — Weil nun durch diese Substitution die Functionen $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_m^{(1)}$ jede in sich selbst verwandelt werden, so muss sie mit der folgenden übereinstimmen:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right\}$$

Da aber die Determinante aus den Elementen einer Substitution $(S)$, die aus den Substitutionen $(k)$, $(l)$ ... zusammengesetzt ist, gleich ist dem Producte der Determinanten aus den Elementen von $(k)$, von $(l)$ etc., so muss

$$\mathrm{Det.}(R)_1\mathrm{Det.}(B)_2\mathrm{Det.}(R)_2\mathrm{Det.}(B)_2^{-1}.\mathrm{Det.}(B)_3\mathrm{Det.}(R)_3\mathrm{Det.}(B)_3^{-1}\ldots\ldots\ldots\times$$
$$\mathrm{Det.}(B)_{\varrho+1}\mathrm{Det.}(R)_{\varrho+1}\mathrm{Det.}(B)_{\varrho+1}^{-1}=1$$

sein.

Nun ist

$$\mathrm{Det.}(B)_i.\mathrm{Det.}(B)_i^{-1}=1,$$

und wie aus den Gleichungen (10.) der vorigen Nummer sich leicht ergiebt,

$$\mathrm{Det.}(R)_i=\omega_{i1}\omega_{i2}\ldots\omega_{im}=e^{2\pi i\sum_1^m r_{ia}};$$

folglich ist

$$(5.)\qquad \sum_{1}^{\varrho+1}{}_{i}\sum_{1}^{m}{}_{\alpha} r_{i\alpha} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Diese ganze Zahl wollen wir mit $k$ bezeichnen.

Nennt man $r_{i\alpha}$ *den Exponenten, zu dem* $y_\alpha^{(i)}$ *gehört,* so kann man dieses Resultat so aussprechen:

*Die Summe der Exponenten, zu welchen die Elemente der sämmtlichen* $\varrho+1$ *Fundamentalsysteme gehören, ist eine ganze Zahl.*

Oder auch

*Die Summe der Logarithmen der Wurzeln der* $\varrho+1$ *verschiedenen Fundamentalgleichungen ist ein ganzes Vielfaches von* $2\pi\sqrt{-1}$.

II. Man kann annehmen, dass in den Gleichungen (3.) die Grössen $r_{i\alpha}$ so gewählt sind, dass $\varphi_\alpha^{(i)}$ für $x=a_i$ nicht verschwindet und nur $\infty$ wird wie ein Ausdruck der Form

$$L = a+b\log(x-a_i)+c[\log(x-a_i)]^2+\cdots+l[\log(x-a_i)]^{r-1},$$

und $\varphi_\alpha^{\varrho-1}$ für $x=\infty$ nicht verschwindet und nur $\infty$ wird wie ein Ausdruck

$$L' = a'+b'\log x+c'(\log x)^2+\cdots+l'(\log x)^{r'-1}.$$

In den Ausdrücken $L$ und $L'$ sind $a$, $b$, $c$, $\ldots$ $l$, $a'$, $b'$, $c'$, $\ldots$ $l'$ Constanten und $r$ und $r'$ ganze Zahlen.

Es ist

$$(6.)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{d^m y_1^{(i)}}{dx^m} = p_1\dfrac{d^{m-1}y_1^{(i)}}{dx^{m-1}}+p_2\dfrac{d^{m-2}y_1^{(i)}}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y_1^{(i)}, \\ \dfrac{d^m y_2^{(i)}}{dx^m} = p_1\dfrac{d^{m-1}y_2^{(i)}}{dx^{m-1}}+p_2\dfrac{d^{m-2}y_2^{(i)}}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y_2^{(i)}, \\ \qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{d^m y_m^{(i)}}{dx^m} = p_1\dfrac{d^{m-1}y_m^{(i)}}{dx^{m-1}}+p_2\dfrac{d^{m-2}y_m^{(i)}}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y_m^{(i)}. \end{array}\right.$$

Setzt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^{m-1}y_1^{(i)}}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}y_1^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1^{(i)} \\ \dfrac{d^{m-1}y_2^{(i)}}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}y_2^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{d^{m-1}y_m^{(i)}}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}y_m^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m^{(i)} \end{vmatrix} = \Delta_0^{(i)},$$

und bezeichnet mit $\Delta_1^{(i)}$ diejenige Determinante, welche man aus $\Delta_0^{(i)}$ erhält,

wenn man die $\alpha^{te}$ Verticalreihe der letzteren durch $\frac{d^m y_1^{(i)}}{dx^m}, \frac{d^m y_2^{(i)}}{dx^m}, \ldots \frac{d^m y_m^{(i)}}{dx^m}$ ersetzt, so ergiebt sich

$$(7.) \qquad \Delta_0^{(i)} p_\alpha = \Delta_\alpha^{(i)}.$$

Aus den Gleichungen (2.) folgt die Relation

$$(8.) \qquad \Delta_\alpha^{(1)} = \text{Det.}(B)_i \Delta_\alpha^{(i)}$$

für $\alpha = 0, 1, 2 \ldots m$. — Da sowohl $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_m^{(1)}$ als auch $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots y_m^{(i)}$ ein Fundamentalsystem constituiren, darf $\text{Det.}(B)_i$ nicht verschwinden. Daher sind $\Delta_\alpha^{(1)}$ und $\Delta_\alpha^{(i)}$ zu gleicher Zeit eindeutig oder mehrdeutig, endlich oder unendlich, Null oder von Null verschieden. — Da ferner $y_\alpha^{(i)}(x-a_i)^{-r_{i\alpha}}$ für $x = a_i$ nicht verschwindet und nur unendlich wird wie $L$, so hat $\frac{d^s y_\alpha^{(i)}}{dx^s}(x-a_i)^{-r_{i\alpha}+s}$ dieselbe Eigenschaft. — Nach einem Umlaufe um $a_i$ geht $\Delta_\alpha^{(i)}$ über in $\text{Det.}(R)_i . \Delta_\alpha^{(i)}$, folglich ist $\Delta_\alpha^{(i)}$ von der Form $(x-a_i)^\varepsilon \psi$, wenn man $\varepsilon = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log \text{Det.}(R)_i$ setzt und wo $\psi$ in der Umgebung von $a_i$ eindeutig ist. Daher enthält der entwickelte Ausdruck von $\Delta_\alpha^{(i)}$, für $\alpha = 0, 1, \ldots m$ keine Logarithmen, und $\Delta_0^{(1)}(x-a_1)^{-\sum_\alpha r_{1\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$ ist in der Umgebung von $a_1$, ebenso wie $\Delta_0^{(i)}.(x-a_i)^{-\sum_\alpha r_{i\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von $a_i$ eindeutig, endlich und continuirlich. Nach der Gleichung (8.) hat daher auch $\Delta_0^{(1)}.(x-a_i)^{-\sum_\alpha r_{i\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von $a_i$ dieselbe Eigenschaft. — Hieraus folgt, dass der Ausdruck

$$K_0 = \Delta_0^{(1)}.(x-a_1)^{-\sum_\alpha r_{1\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}} . (x-a_2)^{-\sum_\alpha r_{2\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}} \ldots (x-a_\varrho)^{-\sum_\alpha r_{\varrho\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$$

für alle endlichen Werthe von $x$ eindeutig, endlich und continuirlich ist.

Weil ferner $y_\alpha^{(\varrho+1)} . \left(\frac{1}{x}\right)^{-r_{\varrho+1,\alpha}}$ für $x = \infty$ nicht verschwindet und nur unendlich wird wie $L'$, so hat $\frac{d^s y_\alpha^{(\varrho+1)}}{dx^s} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-r_{\varrho+1,\alpha}+s}$ dieselbe Eigenschaft, und daher sind, da wieder der entwickelte Ausdruck von: $\Delta_\alpha^{(\varrho+1)}$ keinen Logarithmus enthält, $\Delta_0^{(\varrho+1)} . x^{\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$ und $\Delta_0^{(1)} . x^{\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha} + \frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von $x = \infty$ eindeutig, endlich und continuirlich.

Daraus folgt, dass $K_0$ für $x=\infty$ unendlich ist höchstens von der Ordnung

$$-\sum_1^{\varrho+1}{}_i \sum_1^m{}_a r_{ia}+(\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2} = -k+(\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2}.$$

Setzt man, wie am Schlusse der No. 2, in die Differentialgleichung (1.) $y=y_1^{(i)}\int z\,dx$, und wenn $z_1$ ein nicht verschwindendes particuläres Integral der Differentialgleichung in $z$ ist, $z=z_1\int u\,dx$, und wenn $u_1$ ein nicht verschwindendes Integral der Differentialgleichung in $u$ ist, $u=u_1\int v\,dx$, und fährt so fort, so erhält man schliesslich eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integral wir mit $w$ bezeichnen wollen. Es ist offenbar, dass man die Integrale $z_1$, $u_1$, $v_1$, ... so wählen kann, dass $y_2^{(i)}=y_1^{(i)}\int z_1\,dx$, $y_3^{(i)}=y_1^{(i)}\int z_1\int u_1\,dx$, etc., und dass die Integrale der Differentialgleichungen in $z$, $u$, $v$, ... $w$ sämmtlich die Eigenschaft haben müssen, mit bestimmten Potenzen von $x-a_i$ multiplicirt für $x=a_i$ endlich zu werden, damit den Integralen der Differentialgleichung (1.) diese Eigenschaft zukomme. Da nun $y_2^{(i)}.(x-a_i)^{-r_{i2}}$ für $x=a_i$ nicht verschwindet und nur $\infty$ wird wie $L$, so hat $y_1^{(i)}.z_1(x-a_i)^{-r_{i2}+1}$ dieselbe Eigenschaft. Da ferner $y_3^{(i)}.(x-a_i)^{-r_{i3}}$ diese Eigenschaft hat, so kommt dieselbe auch der Function $y_1^{(i)}.z_1u_1(x-a_i)^{-r_{i3}+2}$ zu etc. — Nun aber ist nach Gleichung (9.) in No. 2

$$\Delta_0^{(i)} = C.(y_1^{(i)})^m.z_1^{m-1}.u_1^{m-2}.v_1^{m-3}\ldots w,$$

wo $C$ eine Constante bedeutet, oder

$$\Delta_0^{(i)} = C.y_1^{(i)}.(y_1^{(i)}.z_1)(y_1^{(i)}.z_1.u_1)(y_1^{(i)}.z_1.u_1.v_1)\ldots(y_1^{(i)}.z_1.u_1.v_1\ldots w),$$

daraus folgt, dass der Ausdruck

$$\Delta_0^{(i)}.(x-a_i)^{-\sum_a r_{ia}+\frac{m(m-1)}{2}}$$ und daher auch $$\Delta_0^{(1)}.(x-a_i)^{-\sum_a r_{ia}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

für $x=a_i$ nicht verschwindet, und da er, wie schon bemerkt, keinen Logarithmus enthält, auch nicht unendlich wird. —

Mit Hülfe desselben Satzes aus No. 2 wird gezeigt, dass

$$\Delta_0^{(\varrho+1)}.x^{\sum_a r_{\varrho+1,a}+\frac{m(m-1)}{2}}$$ und daher auch $$\Delta_0^{(1)}.x^{\sum_a r_{\varrho+1,a}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

für $x=\infty$ nicht verschwindet und nicht unendlich wird.

Aus der Gleichung (7.) ergiebt sich (vergl. No. 2)

$$\Delta_0^{(i)} = Ce^{\int p_1 dx},$$

wo $C$ eine nicht verschwindende Constante ist. Damit $e^{\int p_1 dx}.(x-a_i)^{-\Sigma_a r_{ia}+\frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von $a_i$ endlich, eindeutig, continuirlich und von Null verschieden sei, muss

$$\lim(x-a_i).p_1 \quad \text{für} \quad x = a_i$$

einen endlichen Werth haben. Bezeichnet man den Coefficienten von $(x-a_i)^{-1}$ in der Entwickelung von $p_1$ nach steigenden Potenzen von $(x-a_i)$ mit $\Gamma_i$, so muss

$$\Gamma_i = \Sigma_a r_{ia} - \frac{m(m-1)}{2}$$

sein. — Damit ferner $e^{\int p_1 dx}.x^{\Sigma_a r_{\varrho+1,a}+\frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von $\infty$ eindeutig, endlich, continuirlich und von Null verschieden sei, darf

$$\lim(x.p_1) \quad \text{für} \quad x = \infty$$

nicht unendlich sein. Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit $\mathfrak{F}$, so hat man

$$\mathfrak{F} = -\Sigma_a r_{\varrho+1,a} - \frac{m(m-1)}{2},$$

so dass

$$(9.) \qquad \sum_1^{\varrho} \Gamma_i - \mathfrak{F} = k-(\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2}.$$

Da aber $p_1$ der Voraussetzung gemäss in der ganzen Ebene eindeutig und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich ist, da wir ferner jetzt gefunden haben, dass es in diesen Punkten von einer endlichen Ordnung unendlich und für $x=\infty$ nicht unendlich ist, so ist $p_1$ bekanntlich eine rationale Function von $x$.

Die Bedingung, dass $\lim(xp_1)$ für $x=\infty$ nicht unendlich sei, erfordert, dass der Grad des Nenners von $p_1$ mindestens um eine Einheit höher ist als der des Zählers; in Folge dessen ist aber bekanntlich

$$\sum_1^{\varrho} \Gamma_i - \mathfrak{F} = 0,$$

so dass sich aus der Gleichung (9.) ergiebt

$$(10.) \qquad k = (\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2}.$$

Daher ist $K_0$ eine Constante, und zwar ist diese Constante von Null verschieden, weil $\Delta_0^{(1)}$ nicht verschwinden darf, wenn $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_m^{(1)}$ ein Fundamentalsystem constituiren sollen.

III. Auf ähnliche Weise findet man, dass der Ausdruck

$$K_\mathfrak{b}=\Delta_\mathfrak{b}^{(1)}(x-a_1)^{-\sum_\alpha r_{1\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}}(x-a_2)^{-\sum_\alpha r_{2\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}}\dots(x-a_\varrho)^{-\sum_\alpha r_{\varrho\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}},$$

wo $\mathfrak{b}$ jede der Zahlen 1, 2, ... $m$ bedeutet, für jedes endliche $x$ eindeutig, continuirlich und endlich ist. — Da ferner $\Delta_\mathfrak{b}^{(1)}.x^{\sum_\alpha r_{\varrho+1,\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}+\mathfrak{b}}$ in der Umgebung von $\infty$ eindeutig, endlich und continuirlich ist, so folgt, dass der Ausdruck $K_\mathfrak{b}$ eine ganze Function höchstens vom Grade

$$-k+(\varrho-1)\frac{m(m-1)}{2}+(\varrho-1)\mathfrak{b}=(\varrho-1)\mathfrak{b}$$

ist

Bezeichnet man daher mit $F_s(x)$ eine ganze Function von $x$ höchstens vom Grade $s$, so folgt mit Hülfe der Gleichung (7.):

$$(11.)\qquad p_\mathfrak{b}=\frac{F_{(\varrho-1)\mathfrak{b}}(x)}{(x-a_1)^\mathfrak{b}(x-a_2)^\mathfrak{b}\dots(x-a_\varrho)^\mathfrak{b}}$$

für $\mathfrak{b}=1, 2, \dots m$.

*Die Differentialgleichung* (1.) *muss daher, um den in der Aufgabe gestellten Forderungen zu genügen, die folgende Form haben:*

$$(12.)\qquad \frac{d^my}{dx^m}=\frac{F_{\varrho-1}(x)}{\psi}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{F_{2(\varrho-1)}(x)}{\psi^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\dots+\frac{F_{(m-1)(\varrho-1)}(x)}{\psi^{m-1}}\frac{dy}{dx}+\frac{F_{m(\varrho-1)}(x)}{\psi^m}y,$$

*wo*

$$\psi=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)$$

*gesetzt ist.*

Wir werden in der nächsten Nummer *umgekehrt* nachweisen, dass jedes Integral dieser Differentialgleichung mit einer bestimmten endlichen Potenz von $x-a_i$ multiplicirt für $x=a_i$ endlich wird, wenn $a_i$ irgend ein singulärer Punkt ist, und dass jedes Integral mit einer bestimmten endlichen Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt für $x=\infty$ dieselbe Eigenschaft hat.

IV. Setzen wir

$$\frac{F_{\alpha(\varrho-1)}(x).(x-a_i)^\alpha}{\psi^\alpha}=P_{i\alpha}(x)$$

für $\alpha=1, 2, \dots m$, so lässt sich die Differentialgleichung (12.) folgendermassen schreiben:

$$(13.)\qquad \frac{d^my}{dx^m}=\frac{P_{i1}(x)}{(x-a_i)}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{P_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\dots+\frac{P_{im}(x)}{(x-a_i)^m}y.$$

Es sei

$$y = (x-a_i)^r u,$$

so verwandelt sich diese Differentialgleichung in die folgende:

$$(14.) \quad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{P'_{i1}(x)}{(x-a_i)}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{P'_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{P'_{im}(x)}{(x-a_i)^m}u,$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$P'_{i\alpha}(x) =$$
$$\frac{-m(m-1)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha} r(r-1)\ldots(r-\alpha+1) +$$
$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots(\alpha-1)} r(r-1)\ldots(r-\alpha+2)P_{i1}(x) +$$
$$\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots(\alpha-2)} r(r-1)\ldots(r-\alpha+3)P_{i2}(x) +$$
$$\frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2\ldots(\alpha-3)} r(r-1)\ldots(r-\alpha+4)P_{i3}(x)$$
$$+ \cdots P_{i\alpha}(x)$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots m$.

Es wird in der nächsten Nummer gezeigt, dass die Differentialgleichung (13.) ein oder mehrere Integrale von der Eigenschaft hat, dass sie mit einer endlichen, bestimmten Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von $a_i$ eindeutig, endlich und continuirlich und in $a_i$ von Null verschieden werden. Ist $(x-a_i)^r$ diese Potenz für eines dieser Integrale, so muss der Differentialgleichung (14.) durch eine in der Umgebung von $a_i$ convergente Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha (x-a_i)^\alpha$$

genügt werden, wo $c_0$ von Null verschieden ist. Setzt man diese Reihe für $u$ in die Differentialgleichung ein, so ergiebt der Coefficient von $(x-a_i)^{-m}$ die Gleichung

$$P'_{im}(a_i).c_0 = 0.$$

Da aber $c_0$ von Null verschieden ist, so muss $P'_{im}(a_i) = 0$ sein. Sind daher $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots y_n^{(i)}$ Elemente des zu $a_i$ gehörigen Fundamentalsystems, mit der angegebenen Eigenschaft, so sind die Exponenten $r_{i1}, r_{i2}, \ldots r_{in}$, zu denen sie gehören, Wurzeln der Gleichung

$$(15.) \quad \left\{ \begin{array}{l} r(r-1)\ldots(r-m+1) - r(r-1)\ldots(r-m+2).P_{i1}(a_i) \\ -r(r-1)\ldots(r-m+3)P_{i2}(a_i) - \cdots - rP_{i,m-1}(a_i) - P_{im}(a_i) = 0. \end{array} \right.$$

Setzt man $t=\frac{1}{x}$, so findet man ohne Mühe, dass die Differentialgleichung (12.) übergeht in:

$$(16.)\quad \frac{d^m y}{dt^m} = \frac{\Phi_1(t)}{t}\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\frac{\Phi_2(t)}{t^2}\frac{d^{m-2}y}{dt^{m-2}}+\cdots+\frac{\Phi_m(t)}{t^m}y,$$

wo die Grössen $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, ... $\Phi_m(t)$ rationale Functionen von $t$ sind, die für $t=0$ endlich bleiben. Es ergiebt sich alsdann, dass wenn $y_1^{(\varrho+1)}$, $y_2^{(\varrho+1)}$, ... $y_n^{(\varrho+1)}$ diejenigen Elemente des zum Punkte $\infty$ gehörigen Fundamentalsystems sind, welche mit einer bestimmten endlichen Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt in der Umgebung von $x=\infty$ endlich, eindeutig und continuirlich und für $x=\infty$ von Null verschieden werden, die Exponenten $r_{\varrho+1,1}$, $r_{\varrho+1,2}$, ... $r_{\varrho+1,n}$, zu zu denen sie gehören, Wurzeln der Gleichung

$$(17.)\quad \begin{cases} r(r-1)\ldots(r-m+1)-r(r-1)\ldots(r-m+2)\Phi_1(0) \\ -r(r-1)\ldots(r-m+3)\Phi_2(0)-\cdots-r\Phi_{m-1}(0)-\Phi_m(0) = 0 \end{cases}$$

sind. —

## 5.

Um den in der vorigen Nummer versprochenen Nachweis zu geben, gehen wir von der Differentialgleichung:

$$(1.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}=\frac{P_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{P_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+\frac{P_{im}(x)}{(x-a_i)^m}y$$

aus, wo $i$ eine der Zahlen 1, 2, ... $\varrho$ bedeutet. Die Wurzeln der Gleichung

$$(2.)\quad \begin{cases} r(r-1)\ldots(r-m+1)-r(r-1)\ldots(r-m+2)P_{i1}(a_i)- \\ r(r-1)\ldots(r-m+3)P_{i2}(a_i)-\cdots-rP_{i,m-1}(a_i)-P_{im}(a_i) = 0 \end{cases}$$

denken wir uns so geordnet, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser sei als der irgend einer vorhergehenden, und sie seien in dieser Reihenfolge $r_{i1}$, $r_{i2}$, ... $r_{im}$.

Setzt man nun

$$y = (x-a_i)^{r_{i1}}u,$$

so geht die Differentialgleichung (1.) über in

$$(3.)\quad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{Q_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}+\frac{Q_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}}+\cdots+\frac{Q_{im}(x)}{(x-a_i)^{m-1}}u,$$

wo die Grössen $Q_{ia}(x)$ aus den Grössen $P_{ia}(x)$ der Differentialgleichung (14.) der vorigen Nummer erhalten werden, wenn man in den Ausdrücken der

letzteren $r_{i1}$ statt $r$ setzt, und in dem aus $P'_{im}(x)$ hervorgehenden Ausdruck den durch (2.) entstehenden Factor $x-a_i$ fortlässt.

Wir formen nunmehr die Differentialgleichung (3.) um in:

$$(4.)\quad \begin{cases} (x-a_i)^{m-1}\frac{d^m u}{dx^m} - Q_{i1}(a_i)(x-a_i)^{m-2}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} - \\ Q_{i2}(a_i)(x-a_i)^{m-3}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} - \cdots - Q_{i,m-1}(a_i)\frac{du}{dx} = \\ Q'_{i1}(x).(x-a_i)^{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + Q'_{i2}(x).(x-a_i)^{m-2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} \\ + \cdots + Q'_{i,m-1}(x).(x-a_i)\frac{du}{dx} + Q_{im}(x)u, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{Q_{i1}(x)-Q_{i1}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i1}(x), \quad \frac{Q_{i2}(x)-Q_{i2}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i2}(x),$$
$$\cdots \frac{Q_{i,m-1}(x)-Q_{i,m-1}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i,m-1}(x)$$

gesetzt ist.

Versucht man dieser Differentialgleichung durch eine Reihe

$$u = \sum_0^\infty c_a (x-a_i)^a$$

zu genügen, so findet man für jeden positiven ganzzahligen Werth von $k$:

$$(5.)\quad \begin{cases} [(k+1)k(k-1)\ldots(k-m+2) - Q_{i1}(a_i).(k+1)k(k-1)\ldots(k-m+3) \\ -Q_{i2}(a_i)(k+1)k(k-1)\ldots(k-m+4) - \cdots - Q_{i,m-1}(a_i)(k+1)]\,c_{k+1} \\ = A_{k0}c_k + A_{k1}c_{k-1} + A_{k2}c_{k-2} + \cdots + A_{kk}c_0, \end{cases}$$

worin die Grössen $A$ sich aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen der Functionen $Q'_{i1}(x)$, $Q'_{i2}(x)$, ... $Q_{im}(x)$ nach Potenzen von $x-a_i$ und aus numerischen Grössen durch die blossen Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen.

Die Gleichung

$$(6.)\quad \begin{cases} w(w-1)\ldots(w-m+2) - Q_{i1}(a_i)w(w-1)\ldots(w-m+3) \\ -Q_{i2}(a_i)w(w-1)\ldots(w-m+4) - \cdots - Q_{i,m-1}(a_i) = 0 \end{cases}$$

hat, wie ohne Mühe gefunden wird, die Wurzeln

$$(7.)\quad r_{i2}-r_{i1}-1,\quad r_{i3}-r_{i1}-1,\quad r_{i4}-r_{i1}-1,\quad \ldots\quad r_{im}-r_{i1}-1.$$

Keine dieser Grössen kann wegen der über die Reihenfolge der Wurzeln $r_{i1}, r_{i2}, \ldots r_{im}$ gemachten Voraussetzung einer positiven ganzen Zahl

oder der Null gleich sein. Demnach bleibt für jeden positiven ganzzahligen Werth von $k$ und für $k=0$ der Coefficient von $c_{k+1}$ der Gleichung (5.) von Null verschieden. Daher lassen sich mit Hülfe dieser Gleichung sämmtliche Coefficienten $c$ unter der Form darstellen:

$$(8.) \qquad c_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha c_0$$

für alle positiven ganzzahligen Werthe von $\alpha$.

Es seien die Maxima der Moduln der Functionen

$$Q'_{i1}(x), \quad Q'_{i2}(x), \quad \ldots \quad Q'_{i,m-1}(x), \quad Q_{im}(x)$$

in der Umgebung von $a_i$ resp. $M_1, M_2, \ldots M_{m-1}, M_m$, so ist bekanntlich für jeden ganzzahligen positiven Werth von $\alpha$:

$$(9.) \qquad \begin{cases} \text{mod.}\left(\frac{d^\alpha Q'_{i1}(x)}{dx^\alpha}\right)_{a_i} < 1.2.3\ldots\alpha\,\frac{M_1}{r^\alpha}, \\ \text{mod.}\left(\frac{d^\alpha Q'_{i2}(x)}{dx^\alpha}\right)_{a_i} < 1.2.3\ldots\alpha\,\frac{M_2}{r^\alpha}, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \text{mod.}\left(\frac{d^\alpha Q_{im}(x)}{dx^\alpha}\right)_{a_i} < 1.2.3\ldots\alpha\,\frac{M_m}{r^\alpha}, \end{cases}$$

wo $r$ die Entfernung des Punktes $a_i$ vom nächsten singulären Punkte und $(f(x))_{a_i}$ den Werth von $f(x)$ für $x=a_i$ bezeichnet.

Man bilde nunmehr die Differentialgleichung:

$$(10.) \qquad \begin{cases} \gamma_1(x-a_i)^{m-2}\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}}+\gamma_2(x-a_i)^{m-3}\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}}+\cdots+\gamma_{m-1}\frac{dv}{dx} = \\ \frac{M_1}{1-\frac{x-a_i}{r}}\cdot(x-a_i)^{m-1}\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}}+\frac{M_2}{1-\frac{x-a_i}{r}}\cdot(x-a_i)^{m-2}\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} \\ \qquad +\cdots+\frac{M_{m-1}}{1-\frac{x-a_i}{r}}\cdot(x-a_i)\frac{dv}{dx}+\frac{M_m}{1-\frac{x-a_i}{r}}v, \end{cases}$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{m-1}$ beliebige positive Grössen sind, jedoch der Beschränkung unterworfen, dass die Gleichung

$$(11.) \qquad \gamma_1 w(w-1)\ldots(w-m+3)+\gamma_2 w(w-1)\ldots(w-m+4)+\cdots+\gamma_{m-1} = 0$$

weder eine ganze positive Zahl noch die Null zur Wurzel habe. — Versucht man auch der Differentialgleichung (10.) durch eine Reihe

$$v = \sum_0^\infty g_\alpha\cdot(x-a_i)^\alpha$$

zu genügen, so ergiebt sich für jedes ganzzahlige, positive $k$ die Relation

$$(12.)\quad \begin{cases} [\gamma_1(k+1)k\ldots(k-m+3)+\gamma_2(k+1)k\ldots(k-m+4)+\cdots+\gamma_{m-1}(k+1)]g_{k+1} \\ \qquad = B_{k0}g_k+B_{k1}g_{k-1}+B_{k2}g_{k-2}+\cdots+B_{kk}g_0, \end{cases}$$

wo die Grössen $B$ sich ebenso aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen der Functionen $\frac{M_1}{1-\frac{x-a_i}{r}}, \frac{M_2}{1-\frac{x-a_i}{r}}, \ldots \frac{M_m}{1-\frac{x-a_i}{r}}$ nach Potenzen von $x-a_i$ und aus numerischen Grössen zusammensetzen, wie sich die Grössen $A$ der Gleichung (5.) aus den entsprechenden Coefficienten der Reihenentwickelungen von $Q'_{i1}(x)$, $Q'_{i2}(x)$, $\ldots$ $Q_{im}(x)$ und aus denselben numerischen Grössen zusammensetzen. Da die Grössen $B$ sämmtlich positiv sind, so folgt aus den Ungleichheiten (9.), dass

$$(13.)\quad B_{k\alpha} > \text{mod.}\, A_{k\alpha}$$

für $\alpha = 0, 1, \ldots k$.

Es giebt stets eine endliche Grenze für $k$, $k=t$, derart, dass für $k \gtreqless t$

$$(14.)\quad \begin{cases} \text{mod}\,[k(k-1)\ldots(k-m+2)-Q_{i1}(a_i)k(k-1)\ldots(k-m+3) \\ \qquad -Q_{i2}(a_i)k(k-1)\ldots(k-m+4)-\cdots-Q_{i,m-1}(a_i)] \\ \quad > \gamma_1 k(k-1)\ldots(k-m+3)+\gamma_2 k(k-1)\ldots(k-m+4)+\cdots+\gamma_{m-1}. \end{cases}$$

Da nun nach Gleichung (12.) sich jedes $g$ unter der Form

$$(15.)\quad g_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha g_0$$

darstellen lässt, wo $\mathfrak{B}_\alpha$ eine positive Zahl ist, so sind alle Grössen $g$ positiv, wenn man $g_0$ positiv annimmt. — Aus den Ungleichheiten (13.) und (14.) in Verbindung mit den Gleichungen (5.) und (12.) würde für *jeden* ganzzahligen Werth von $k$ folgen

$$(16.)\quad g_k > \text{mod.}\, c_k,$$

wenn dieses für $k \leqq t$ stattfände.

Nun sei unter den Moduln der Grössen

$$1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_t$$

A der grösste, und unter den Grössen

$$1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_t$$

B die kleinste, und $c_0$ so gewählt, dass

$$(17.)\quad \text{A.mod.}\, c_0 < \text{B}g_0.$$

Da die Grössen $g_0$, B und A von Null verschieden sind, so ist diese Ungleichheit immer erfüllbar und liefert für $c_0$ von Null verschiedene Werthe.

Alsdann ist für $k \leqq t$, folglich für jedes $k$

$$g_k > \text{mod.}\, c_k.$$

Wenn daher die Reihe

$$v = \sum_0^\infty{}_a g_a (x-a_i)^a$$

convergirt, so convergirt um so mehr die Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_a c_a (x-a_i)^a,$$

wenn man über $c_0$ gemäss der Ungleichheit (17.) disponirt.

Multiplicirt man die Gleichung (10.) mit $1-\frac{x-a_i}{r}$ und substituirt alsdann die Reihe für $v$, so ergiebt sich für jeden ganzzahligen Werth von $k$

$$(18.)\quad \begin{cases} [(k+1)k(k-1)\ldots(k-m+3)\gamma_1+(k+1)k(k-1)\ldots(k-m+4)\gamma_2 \\ \qquad +\cdots+(k+1)\gamma_{m-1}]g_{k+1} = \\ [k(k-1)\ldots(k-m+2)\left(\frac{\gamma_1}{r}+M_1\right)+k(k-1)\ldots(k-m+3)\left(\frac{\gamma_2}{r}+M_2\right) \\ \qquad +\cdots+k\left(\frac{\gamma_{m-1}}{r}+M_{m-1}\right)+M_m]g_k. \end{cases}$$

Daher ist

$$\lim\frac{g_{k+1}}{g^k} \quad (\text{für } k=\infty) \quad = \frac{\gamma_1+rM_1}{r\gamma_1}$$

und

$$\lim\frac{g_{k+1}(x-a_i)^{k+1}}{g_k(x-a_i)^k} = \frac{\gamma_1+rM_1}{r\gamma_1}\cdot(x-a_i).$$

Die Reihe für $v$ ist daher convergent für alle Werthe von $x$, für welche

$$\text{mod.}(x-a_i) < \frac{r\gamma_1}{\gamma_1+rM_1}.$$

Da $\gamma_1$ und $r$ von Null verschiedene positive Grössen sind, so findet die Convergenz innerhalb eines endlichen, um den Punkt $a_i$ beschriebenen Kreises statt.

Daraus folgt, dass die Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_a c_a (x-a_i)^a$$

innerhalb desselben Kreises convergirt. Es giebt daher eine innerhalb dieses Kreises und folglich nach No. 1 *in der ganzen Umgebung von* $a_i$ eindeutige, endliche und continuirliche und in $a_i$ von Null verschiedene Function $u$, welche der Differentialgleichung (3.) genügt.

Hiernach giebt es also ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1.), $y_{i1}$, welches mit $(x-a_i)^{-r_{i1}}$ multiplicirt in der Umgebung von $a_i$ eindeutig, endlich und continuirlich und in $a_i$ von Null verschieden ist.

Setzt man jetzt

$$(19.) \qquad y = y_{i1}\int z\,dx,$$

so erhält man für $z$ eine lineare Differentialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung der Form:

$$(1^a.) \qquad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} = \frac{G_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \frac{G_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \cdots + \frac{G_{i,m-1}(x)}{(x-a_i)^{m-1}}z,$$

worin die Coefficienten $G_{i1}(x)$, $G_{i2}(x)$ ... $G_{i,m-1}(x)$ Functionen sind, welche innerhalb eines endlichen den Punkt $a_i$ umgebenden Kreises $S$ eindeutig, endlich und continuirlich sind.

Die Wurzeln der Gleichung:

$$(2^a.) \qquad \begin{cases} r'(r'-1)\ldots(r'-m+2) - r'(r'-1)\ldots(r'-m+3)\,G_{i1}(a_i) - \\ r'(r'-1)\ldots(r'-m+4)\,G_{i2}(a_i) - \cdots - r'\,G_{i,m-2}(a_i) - G_{i,m-1}(a_i) = 0 \end{cases}$$

sind, wie leicht zu zeigen,

$$(20.) \qquad r_{i2}-r_{i1}-1, \quad r_{i3}-r_{i1}-1, \quad r_{i4}-r_{i1}-1, \quad \ldots \quad r_{im}-r_{i1}-1.$$

Dieselben haben in Folge der am Anfange dieser Nummer über die Reihenfolge von $r_{i1}, r_{i2}, \ldots r_{im}$ gemachten Voraussetzung, in der Reihenfolge (20.) die Eigenschaft, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser ist, als der reelle Theil irgend einer vorhergehenden.

Man weist nun auf ähnliche Weise, wie oben die Existenz der zu dem Exponenten $r_{i1}$ gehörigen Function $y_{i1}$ ergründet wurde, die Existenz einer Function $z_1$ nach, welche mit $(x-a_i)^{-(r_{i2}-r_{i1}-1)}$ multiplicirt innerhalb des Kreises $S$ eindeutig, continuirlich und endlich und in $a_i$ von Null verschieden wird. Setzt man in die Gleichung (19.) $z_1$ statt $z$, so erhält man ein Integral der Differentialgleichung (1.) von der Form $y_{i2} = \varphi_1 + \varphi_2 \log(x-a_i)$, wo $\varphi_1$ und $\varphi_2$ nicht unendlich viele Potenzen von $(x-a_i)^{-1}$ enthalten, so dass $y_{i2}$ mit einer endlichen Potenz von $x-a_i$ multiplicirt für $x=a_i$ endlich wird.

Man setze nunmehr

$$(21.) \qquad z = z_1\int t\,dx,$$

so erhält man für $t$ eine lineare Differentialgleichung $m-2^{\text{ter}}$ Ordnung der Form

$$(1^b.) \qquad \frac{d^{m-2}t}{dx^{m-2}} = \frac{G'_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-3}t}{dx^{m-3}} + \frac{G'_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-4}t}{dx^{m-4}} + \cdots + \frac{G'_{i,m-2}(x)}{(x-a_i)^{m-2}}\cdot t,$$

worin die Coefficienten $G'_{i1}(x)$, $G'_{i2}(x)$, ... $G'_{i,m-2}(x)$ Functionen sind, welche

innerhalb eines endlichen den Punkt $a_i$ umgebenden Kreises $S'$ eindeutig, endlich und continuirlich sind.

Die Wurzeln der Gleichung

$$(2^b.)\quad \begin{aligned} &r''(r''-1)\dots(r''-m+3)-r''(r''-1)\dots(r''-m+4)G'_{i1}(a_i)- \\ &r''(r''-1)\dots(r''-m+5)G'_{i2}(a_i)-\dots-r''G'_{i,m-3}(a_i)-G'_{i,m-2}(a_i) = 0 \end{aligned}$$

sind, wie leicht zu zeigen,

$$(22.)\quad r_{i3}-r_{i2}-1,\quad r_{i4}-r_{i2}-1,\quad \dots\quad r_{im}-r_{i2}-1.$$

Dieselben haben in Folge der am Anfange dieser Nummer über die Reihenfolge von $r_{i1}, r_{i2}, \dots r_{im}$ gemachten Voraussetzung, in der Reihenfolge (22.) die Eigenschaft, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser ist, als der reelle Theil irgend einer vorhergehenden.

Man weist nun auf ähnliche Weise, wie oben die Existenz der Functionen $y_{i1}$ und $z_1$ ergründet wurde, die Existenz einer Function $t_1$ nach, welche mit $(x-a_i)^{-(r_{i3}-r_{i2}-1)}$ multiplicirt innerhalb des Kreises $S'$ eindeutig, continuirlich und endlich und in $a_i$ von Null verschieden wird. Setzt man in die Gleichung (21.) $t_1$ statt $t$, so erhält man ein Integral der Differentialgleichung ($1^a$.) von der Form $z_2 = \varphi'_1+\varphi'_2\log(x-a_i)$, wo $\varphi'_1$ und $\varphi'_2$ nicht unendlich viele Potenzen von $(x-a_i)^{-1}$ enthalten. Setzt man diesen Werth von $z_2$ statt $z$ in die Gleichung (19.) ein, so erhält man ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1.) der Form $y_{i3} = \varphi''_1+\varphi''_2\log(x-a_i)+\varphi''_3[\log(x-a_i)]^2$, wo $\varphi''_1$, $\varphi''_2$, $\varphi''_3$ nicht unendlich viele Potenzen von $(x-a_i)^{-1}$ enthalten, und daher $y_{i3}$ mit einer endlichen bestimmten Potenz von $x-a_i$ multiplicirt für $x=a_i$ endlich wird. — Fährt man so fort, so wird die Existenz von $m$ particulären Integralen der Differentialgleichung (1.), welche nach No. 1 in der ganzen Umgebung von $a_i$ definirt sind, und nach No. 2 ein Fundamentalsystem bilden, nachgewiesen, die alle mit bestimmten, endlichen Potenzen von $x-a_i$ multiplicirt für $x=a_i$ endlich werden. Daraus folgt aber, dass alle Integrale der Differentialgleichung (1.) dieselbe Eigenschaft besitzen.

Aehnlich wird für den Punkt $\infty$ der Beweis geliefert, indem man hierbei von der Differentialgleichung (16.) der vorigen Nummer ausgeht.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich also umgekehrt:

***Jedes Integral der Differentialgleichung*** (12.) ***der vorigen Nummer hat die Eigenschaft, mit einer bestimmten endlichen Potenz von $x-a$ multiplicirt für jeden endlichen Werth von $a$, und mit einer bestimmten endlichen Potenz von $x$ multiplicirt für $x=\infty$ endlich zu werden.***

## 6.

An die Untersuchungen der beiden vorigen Nummern knüpfen wir noch einige Folgerungen.

I. Wenn eine Function $F$ die Eigenschaft hat, mit $(x-a_i)^{-k}$ multiplicirt, in der Nähe von $a_i$ die Gestalt einer ganzen rationalen Function von $\log(x-a_i)$

$$(1.)\quad (x-a_i)^{-k}F = \varphi_0+\varphi_1\log(x-a_i)+\varphi_2\log[(x-a_i)]^2+\cdots+\varphi_n[\log(x-a_i)]^n$$

anzunehmen, deren Coefficienten in der Nähe von $a_i$ eindeutige, endliche und continuirliche Functionen von $x$ sind, so kann $k$ so gewählt werden, dass $(x-a_i)^{-k}F$ für $x=a_i$ auch nicht mehr verschwindet und nur unendlich wird, wie eine ganze Function von $\log(x-a_i)$

$$L = a+b\log(x-a_i)+c[\log(x-a_i)]^2+\cdots+l[\log(x-a_i)]^s$$

mit constanten Coefficienten $a, b, c, \ldots l$. Wir sagen alsdann in Uebereinstimmung mit II. in No. 4, *dass $F$ zum Exponenten $k$ gehöre.*

1) Es sei $G(x)$ eine wie $F$ beschaffene Function, so dass

$$(2.)\quad G(x) = \psi_0+\psi_1\log(x-a_i)+\psi_2[\log(x-a_i)]^2+\cdots+\psi_\lambda[\log(x-a_i)]^\lambda,$$

und es gehöre $G(x)$ zum Exponenten $r$, so ist $\int G(x)dx$ (wo die Integrationsconstante Null genommen wird) *eine wie $F$ beschaffene Function, die zum Exponenten $r+1$ gehört.*

Da es einleuchtend ist, dass das Integral $\int G(x)dx$ eine wie $F$ beschaffene Function ist, so ist nur zu zeigen, dass es zum Exponenten $r+1$ gehört.

Setzt man

$$(x-a_i)^{-r}.\psi_a = \sum_0^\infty{}_b^a c_b(x-a_i)^b,$$

so ist

$$(3.)\quad \int G(x)dx = \sum_0^\lambda{}_a^a c_0\int(x-a_i)^r\log(x-a_i)^a dx+\sum_1^\infty{}_b\sum_0^\lambda{}_a^a c_b\int(x-a_i)^{r+b}\log(x-a_i)dx.$$

Die einfache Summe und die Doppelsumme rechter Hand lassen sich resp. auf die Form $(x-a_i)^{r+1}\eta$ und $(x-a_i)^{r+1}\vartheta$ bringen, wo für $x=a_i$ die Function $\vartheta$ verschwindet, $\eta$ aber von Null verschieden ist und nur unendlich wird wie ein Ausdruck $L$. Hieraus ergiebt sich, dass $\int G(x)dx$ zum Exponenten $r+1$ gehört.

2) Sind ferner $G(x)$ und $G_1(x)$ zwei wie $F$ beschaffene Functionen, die resp. zu den Exponenten $r$ und $r_1$ gehören, *so ist das Produkt eine wie $F$ beschaffene Function, welche zum Exponenten $r+r_1$ gehört.*

Wir haben am Schlusse der vorigen Nummer ein gewisses Fundamentalsystem hergeleitet, welches wir mit Hülfe der eben festgesetzten Principien näher untersuchen wollen. — Um das Element $y_{i\alpha}$ zu erhalten, dient die Reihe der abgeleiteten Differentialgleichungen $m-1^{\text{ter}}$, $m-2^{\text{ter}}$ bis zu der $m-\alpha+1^{\text{ter}}$ Ordnung. Jeder dieser Differentialgleichungen entspricht eine gewisse Reihe von Grössen, und zwar denen von der Ordnung $m-1$ und $m-2$ resp. die Reihen (20.) und (22.) der vorigen Nummer, und allgemein der von der Ordnung $m-\alpha+1$ die Reihe

$$(4.)\quad r_{i\alpha}-r_{i,\alpha-1}-1,\ r_{i,\alpha+1}-r_{i,\alpha-1}-1,\ r_{i,\alpha+2}-r_{i,\alpha-1}-1,\ \ldots\ r_{im}-r_{i,\alpha-1}-1.$$

Nach den Entwicklungen der vorigen Nummer hat die Differentialgleichung der $m-\alpha+1^{\text{ten}}$ Ordnung ein Integral, welches mit $(x-a_i)^{-(r_{i\alpha}-r_{i,\alpha-1}-1)}$ multiplicirt in der Nähe von $a_i$ eindeutig, endlich, continuirlich und für $x=a_i$ von Null verschieden ist, also eine wie $F$ beschaffene Function ist, die zum Exponenten $r_{i\alpha}-r_{i,\alpha-1}-1$ gehört. Bezeichnen wir das Integral mit $v_\alpha$, so ist nach dem Verfahren am Schlusse der vorigen Nummer

$$(5.)\quad y_{i\alpha} = y_{i1}\int dx\, v_1 \ldots \int dx\, v_{\alpha-2}\int dx\, v_{\alpha-1}\int dx\, v_\alpha.$$

Durch wiederholte Anwendung der beiden für die wie $F$ beschaffenen Functionen gegebenen Sätze ergiebt sich, dass $y_{i\alpha}$ eine wie $F$ beschaffene Function ist, die zum Exponenten

$$(r_{i\alpha}-r_{i,\alpha-1}-1)+1+(r_{i,\alpha-1}-r_{i,\alpha-2}-1)+1+\cdots+(r_{i2}-r_{i1}-1)+1+r_{i1} = r_{i\alpha}$$

gehört.

Aehnliche Betrachtungen gelten für die Differentialgleichung (16.) der Nummer 4.

Hieraus ergiebt sich der Satz:

*Zu jedem singulären Punkte $a_i$ der Differentialgleichung* (12.) *in No. 4* (*und zum Punkte* $\infty$) *gehört eine der Gleichungen* (15.) (*und die Gleichung* (17.)) *derselben Nummer. In der Umgebung irgend eines dieser Punkte giebt es stets ein Fundamentalsystem, dessen Elemente den Wurzeln der Gleichung* (15.) (*oder* (17.)) *derart entsprechen, dass zu jeder Wurzel ein Element als zu seinem Exponenten gehört.*

Diesen Satz kann man auf jede der nach dem Verfahren am Schlusse der vorigen Nummer abzuleitenden $m-1$ Differentialgleichungen anwenden, derart, dass für die Differentialgleichung $m-\alpha+1^{\text{ter}}$ Ordnung die Reihe (4.) die Exponenten enthält, zu denen die Elemente ihres Fundamentalsystems gehören. Setzt man in dieser Reihe $\alpha=2, 3, \ldots m$, so erhält man $m-1$ Reihen,

die zusammen alle Differenzen der Wurzeln $r_{i1}, r_{i2}, \ldots r_{im}$ enthalten. Es seien irgend zwei dieser Wurzeln $r_{i\lambda}$ und $r_{i\mu}$ einander gleich, wo $\lambda > \mu$, so giebt es ein Integral $w$ einer bestimmten der $m-1$ abgeleiteten Differentialgleichungen, welches eine wie $F$ beschaffene zum Exponenten $r_{i\lambda}-r_{i\mu}-1$ gehörige Function ist. Geht man von dem Integrale $w$ aus, um nach dem Verfahren der vorigen Nummer ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung zu bilden, so führt schon die erste Integration einen Logarithmus ein, so dass das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung ebenfalls Logarithmen enthält. Man hat daher den Satz:

*Sollen die Integrale der Differentialgleichung* (12.) *der No. 4 in ihrem Ausdrucke in der Umgebung eines singulären Punktes* $a_i$ (*oder des Punktes* $\infty$) *keine Logarithmen enthalten, so darf die zugehörige Gleichung* (15.) (*oder* (17.)) *derselben Nummer keine gleichen Wurzeln haben.*

Aus dem Verfahren am Schlusse der vorigen Nummer ergiebt sich ferner leicht:

*Wenn die Differenzen der Wurzeln einer zum singulären Punkte* $a_i$ (*dem Punkte* $\infty$) *gehörigen Gleichung* (15.), ((17.)) *der No. 4 weder Null noch ganze Zahlen sind, so enthalten die Integrale der Differentialgleichung* (12.) *derselben Nummer in ihrem Ausdrucke in der Umgebung dieses Punktes keine Logarithmen.*

Sind dagegen einige dieser Differenzen ganze Zahlen, so *können* Logarithmen auftreten.

II. Ist ein Integral $y$ einer linearen Differentialgleichung eine *algebraische* Function, so hat dasselbe in der Umgebung eines singulären Punktes $a$ bekanntlich die Gestalt:

$$y = \sum_0^\infty {}_a c_a (x-a)^{-\nu+\frac{a}{\mu}},$$

wo $\mu$ die Anzahl der Elemente desjenigen Cyclus der Wurzeln der algebraischen Gleichung zwischen $x$ und $y$ ist, zu dem $y$ gehört, und $\nu$ eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet, je nachdem $y$ im Punkte $a$ unendlich oder endlich ist. (Vergl. *Puiseux* in *Liouvilles* Journal de mathématique t. XV und XVI.) Ein solches Integral wird daher, mit einer bestimmten Potenz von $x-a$ multiplicirt, für $x=a$ endlich. Hat daher eine lineare Differentialgleichung *nur* algebraische Integrale, so hat sie die Gestalt der Differentialgleichung (12.) in No. 4. Ferner ist ersichtlich, dass zu jedem singulären Punkte ein Fundamentalsystem von der Form (9.) in No. 3. gehört. Die Ele-

mente desselben gehören nach I. dieser Nummer zu verschiedenen Exponenten, welche Wurzeln der Gleichung (15.) oder (17.) der No. 4. sind. Da aber eine algebraische Function nach einer endlichen Anzahl von Umläufen um einen singulären Punkt ihren ursprünglichen Werth wieder annimmt, so müssen die Wurzeln dieser Gleichungen rationale Zahlen sein. Hieraus ergiebt sich der Satz:

*Wenn einer linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten in der ganzen Ebene eindeutig, und nur für eine endliche Anzahl von Punkten unstetig sind, nur algebraische Integrale genügen, so gehört sie zu der durch die Gleichung* (12.) *in No. 4. charakterisirten Klasse von Differentialgleichungen. In diesem Falle sind die Wurzeln der Gleichungen* (15.) *und* (17.) *von einander verschiedene rationale Zahlen.*

III. Nimmt man in der Differentialgleichung (12.) in No. 4 $\varrho = 1$ an, so reduciren sich sämmtliche Functionen $F_{\varrho-1}(x)$, $F_{2(\varrho-1)}(x), \ldots F_{m(\varrho-1)}(x)$ auf Constanten, und man erhält eine Differentialgleichung der Gestalt

$$(6.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{f_1}{x-a_1}\cdot\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{f_2}{(x-a_1)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{f_m}{(x-a_1)^m}y,$$

wo $f_1, f_2, \ldots f_m$ Constanten sind. — Die Exponenten der Elemente des zu dem Punkte $a_1$ gehörigen Fundamentalsystems $r_1, r_2, \ldots r_m$ sind die $m$ Wurzeln der Gleichung

$$(7.) \qquad \begin{cases} r(r-1)\cdots(r-m+1) - f_1 r(r-1)\cdots(r-m+2) \\ -f_2 r(r-1)\cdots(r-m+3) - \cdots - f_m = 0. \end{cases}$$

Setzt man $y = (x-a)^{r_a}.u$, so erhält man eine Differentialgleichung für $u$, in welcher der Coefficient von $u$ verschwindet, welcher also durch $u = \text{Const.}$ genügt wird; daraus folgt, wenn die Gleichung (7.) nur ungleiche Wurzeln hat, dass die Functionen

$$(8.) \qquad (x-a_1)^{r_1}, \quad (x-a_1)^{r_2}, \quad \ldots \quad (x-a_1)^{r_m}$$

selbst das zum singulären Punkte $a_1$ gehörige Fundamentalsystem constituiren, so dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung (6.), wie bekannt,

$$y = \sum_1^m c_a (x-a_1)^{r_a}$$

wird, wo $c_1, c_2, \ldots c_m$ Constanten sind.

Sind aber mehrere Wurzeln der Gleichung (7.) einander gleich, so seien $\lambda_1$ Wurzeln gleich $r_1$, $\lambda_2$ Wurzeln gleich $r_2$ etc. $\lambda_n$ Wurzeln gleich $r_n$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = m$. Es bilden alsdann die Gruppen von Functionen,

welche man erhält, wenn man in der Gruppe $(x-a_1)^{r_a}$, $(x-a_1)^{r_a}\log(x-a_1)$, $x-a_1)^{r_a}[\log(x-a_1)]^2, \ldots (x-a_1)^{r_a}[\log(x-a_1)]^{\lambda_a-1}$ für $a$ successive $1, 2, \ldots n$ setzt, zusammengenommen das zum singulären Punkt $a_1$ gehörige Fundamentalsystem, ganz mit unserer allgemeinen Theorie übereinstimmend.

(Vergl. *Cauchy*, Exercices vol. I, pag. 262).

## 7.

I. Die Differentialgleichung, welcher die durch die *Gauss*sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen genügen, gehört zu der in den Nummern 4. und 5. behandelten Klasse von Differentialgleichungen. Sie wird nämlich in der allgemeinsten Form aus der Differentialgleichung (12.) in No. 4 erhalten, wenn man $m=2$ und die Anzahl der singulären Punkte $\varrho=2$ annimmt, so dass sie die Gestalt hat:

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F_1(x)}{(x-a_1)(x-a_2)}\frac{dy}{dx} + \frac{F_2(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2}\cdot y,$$

wo $F_1(x)$ und $F_2(x)$ resp. ganze Functionen ersten und zweiten Grades von $x$ sind.

Um die specielle Form derselben, wie sie *Riemann* in der obenerwähnten Abhandlung (S. 19.) gegeben hat, zu erhalten, sei:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 1.$$

Setzt man

$$F_1(x) = f_0 + f_1 x; \quad F_2(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2,$$

so sind die Gleichungen, wodurch die Exponenten der zu den Punkten 0, 1, $\infty$ gehörigen Fundamentalsysteme bestimmt werden, resp.

$$\begin{aligned} &(a) \quad r(r-1) + f_0 r - g_0 = 0 \\ &(b) \quad r(r-1) - (f_0+f_1)r - (g_0+g_1+g_2) = 0 \\ &(c) \quad r(r-1) + (2+f_1)r - g_2 = 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man die Constanten $f_0$, $f_1$, $g_0$, $g_1$, $g_2$ dadurch, dass man die Wurzeln der Gleichung (a) gleich $\alpha$ und $\alpha'$, der Gleichung (b) gleich 0 und $\gamma'$, der Gleichung (c) gleich $\beta$ und $\beta'$ annimmt, wo

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma' = 1,$$

so geht die Differentialgleichung (1) über in:

$$(2.) \qquad (1-x)\frac{d^2y}{d\log x^2} - [\alpha+\alpha'+(\beta+\beta')x]\frac{dy}{d\log x} + (\alpha\alpha' - \beta\beta' x)y = 0,$$

welches die *Riemann*sche Form ist. Wird hierbei angenommen, dass die Grössen $\alpha'-\alpha$, $\beta'-\beta$, $\gamma'$ weder ganze Zahlen noch gleich Null sind, so gehört zu

jedem der Punkte 0, 1, $\infty$ ein Fundamentalsystem der Form (9) in No. 3. Von dieser Form der Integrale der Differentialgleichung (2.) ist *Riemann* ausgegangen.

II. Die Differentialgleichung (12.) in No. 4 enthält ausser den die Lage der singulären Punkte bestimmenden Constanten $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ im Allgemeinen noch $\frac{m(m+1)\varrho}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$ Constanten, nämlich die Coefficienten der ganzen Functionen $F_{\varrho-1}(x)$, $F_{2(\varrho-1)}(x), \ldots F_{m(\varrho-1)}(x)$. Zu jedem singulären Punkte gehören $m$ Exponenten (die den Elementen des bezüglichen Fundamentalsystems zuertheilt sind), also zu allen singulären Punkten (den Punkt $\infty$ mitgerechnet $m(\varrho+1)$ Exponenten. Von den letzteren sind nur $m(\varrho+1)-1$ willkürlich, da die Summe aller (nach No. 4) einer bestimmten ganzen Zahl gleich ist. — Die Anzahl der willkürlichen Exponenten ist der Anzahl der Constanten der Differentialgleichung gleich, wenn

$$\frac{m(m+1)\varrho}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = m(\varrho+1)-1,$$

oder

$$(3.) \qquad \varrho = 1+\frac{2}{m},$$

so dass *entweder*

$$m = 1 \text{ und } \varrho = 3,$$

*oder*

$$m = 2 \text{ und } \varrho = 2.$$

Hieraus folgt:

1) *Sind die Exponenten der Elemente der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme gegeben, so sind die Constanten der Differentialgleichung, welcher die durch die Gauss'sche Reihe darstellbaren Functionen genügen, folglich auch abgesehen von constanten Factoren die Elemente der Fundamentalsysteme selbst, vollständig bestimmt.*

Dieser Satz stimmt im Wesentlichen mit dem von *Riemann* in der angeführten Abhandlung No. IV Seite 11 sqq. gegebenen überein, welcher dort auf andere Weise hergeleitet ist.

Es folgt aus der Gleichung (3.)

2) *Den Fall einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit 3 singulären Punkten abgerechnet, ist die Differentialgleichung* (1.), *welcher die durch die Gauss'sche Reihe darstellbaren Functionen genügen, die einzige aus der Klasse der durch die Gleichung* (12.) *in No. 4 repräsentirten Differentialgleichungen, welcher die in* 1) *angegebene Eigenschaft zukommt.*

Berlin, October 1865.

# Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach *Laplace*schen Functionen höherer Ordnung.

(Von Herrn *F. G. Mehler* zu Danzig.)

Die beiden Sätze, auf welche man bei der Entwicklung einer Function von zwei Variablen nach Kugelfunctionen die Bestimmung des allgemeinen Gliedes zu gründen pflegt, sind von Herrn *Cayley* *) auf die von ihm definirten allgemeineren, von beliebig vielen Variablen abhängigen *Laplace*schen Functionen übertragen worden. Auf ganz anderem Wege sind diese Sätze später von Herrn *Heine* in der Arbeit „Die speciellen *Lamé*schen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung“ **) abgeleitet, worin man ausserdem eine Reihe von interessanten Eigenschaften der speciellen Functionen findet, welche in der allgemeinen Theorie die Stelle der Kugelfunction $P_n(\cos\gamma)$ und ihrer Zugeordneten vertreten. Schon vor dem Erscheinen der soeben genannten Arbeit war ich durch Uebertragung der Eigenschaften des Potentials einer Flächenbelegung auf ein vielfaches Integral zu einer Verallgemeinerung der *Laplace*schen Reihen gelangt. In dem zu Ostern 1864 ausgegebenen Programme der Realschule zu St. Johann in Danzig habe ich die Form der Reihen für beliebig viele Variablen aufgestellt und den Fall dreier Variablen einer speciellen Discussion unterworfen. Ich sprach dort zugleich meine Absicht aus, in einer späteren Bearbeitung auf die Erörterung der Convergenz der allgemeinen Reihenentwicklungen einzugehen, sowie auch auf die Betrachtung gewisser neuer Reihen, welche aus jenen dadurch hervorgehen, dass man die Zahl der Variablen unendlich gross werden, die zu entwickelnde Function aber nur von einer beschränkten Anzahl derselben in passender Weise abhängen lässt. Die letzteren Reihen, bei welchen die Variablen nicht auf ein bestimmtes Intervall beschränkt sind, sondern alle möglichen reellen Werthe annehmen können, erwiesen sich mir später als ein besonderer Fall der von Herrn *Hermite* ***) schon am Anfange des Jahres 1864 veröffentlichten Ent-

*) Sur les fonctions de *Laplace*. *Liouvilles* Journal Bd. 13.

**) Bd. 62, S. 110—141 dieses Journals.

***) Sur un nouveau développement en série des fonctions. Comptes Rendus, Bd. 58, S. 93—100 und 266—273.

wicklungen, indem sie sich aus denselben durch Specialisirung der darin auftretenden quadratischen Form ergeben. Da mir der Nachweis der Verwandtschaft der Reihen des Herrn *Hermite* mit den verallgemeinerten *Laplace*schen Reihen und die Untersuchung der Convergenz der letzteren nicht ohne Wichtigkeit zu sein scheint, so glaube ich, dass die nachfolgenden Mittheilungen auch neben den genannten Arbeiten noch Manches bieten werden, was der Beachtung werth ist. Verschiedene, ohne den gewünschten Erfolg gebliebene Versuche, den auftretenden Convergenzbedingungen allgemein eine einfachere Gestalt zu geben, haben mich von einer früheren Veröffentlichung zurückgehalten.

## §. 1.

### Definition der *Laplace*schen Functionen $n^{ter}$ Ordnung.

Die partielle Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n+1}^2} = 0$$

hat, wie bekannt, den reciproken Werth des Ausdruckes

$$R = [(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_{n+1}-a_{n+1})^2]^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

zum particulären Integral. Es genügt ihr also, wenn unter $K'$ eine beliebige endliche Function der $a$ verstanden wird, auch das $(n+1)$fache Integral

$$v = \int \frac{K' da_1 da_2 \ldots da_{n+1}}{R} = \int \frac{K' d\ell}{R},$$

vorausgesetzt, dass $R$ für keinen innerhalb der Integrationsgrenzen gelegenen Werth der $a$ verschwindet. Führt man nun statt der $x$ die Variablen $\rho$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\ldots$ $\varphi_n$ ein vermittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi_1,\\
x_2 &= \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n,\\
x_{n+1} &= \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}\sin\varphi_n,
\end{aligned}$$

so geht (1.) über in:

$$(2.) \qquad \frac{1}{\rho^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^n\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{q_s\sin^{n-s}\varphi_s}\frac{\partial}{\partial\varphi_s}\left(\sin^{n-s}\varphi_s\frac{\partial v}{\partial\varphi_s}\right) = 0,$$

worin $q_1 = 1$, und für $s > 1$:

$$q_s = (\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{s-1})^2;$$

und wenn man der obigen Substitution entsprechend

$$a_1 = l\cos\lambda_1,$$
$$a_2 = l\sin\lambda_1\cos\lambda_2, \quad \text{etc.}$$

und ausserdem

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{n+1}x_{n+1} = l\varrho\,.\cos\omega$$

setzt, so wird

$$R = (l^2-2l\varrho\cos\omega+\varrho^2)^{\frac{1}{2}(n-1)},$$
$$dl' = l^n\sin^{n-1}\lambda_1\ldots\sin^1\lambda_{n-1}\,dl\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1}\,d\lambda_n.$$

Die Function $v$ soll jetzt so specialisirt werden, dass sie für $n=2$ mit dem Potential einer auf einer Kugel vom Halbmesser 1 vertheilten Massenschicht zusammenfällt. Zu dem Zwecke verwandeln wir $K'$ in $k':\varepsilon$, verstehen unter $k'$ eine von $l$ unabhängige Function der $\lambda$, unter $\varepsilon$ eine unendlich kleine Grösse, integriren nach $l$ von 1 bis $1+\varepsilon$ und nehmen 0 und $\pi$ als Integrationsgrenzen von $\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}$, dagegen 0 und $2\pi$ als die von $\lambda_n$. Indem wir noch zur Abkürzung

$$r = (1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2)^{\frac{1}{2}(n-1)},$$
$$d\sigma' = \sin^{n-1}\lambda_1\ldots\sin^1\lambda_{n-1}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1}\,d\lambda_n$$

setzen, erhalten wir

$$(3.) \qquad v = \int\frac{k'\,d\sigma'}{r}.$$

Bezeichnet nun $R_m(\cos\omega)$ den Coefficienten von $\varrho^m$ in der Entwicklung von $r^{-1}$ nach aufsteigenden, oder, was dasselbe ist, den von $\varrho^{-m-n+1}$ in der Entwicklung von $r^{-1}$ nach absteigenden Potenzen von $\varrho$, und setzt man

$$(4.) \qquad X_m = \int k'R_m(\cos\omega)\,d\sigma',$$

dann gilt für $v$, je nachdem $\varrho<1$ oder $>1$, die erste oder die zweite der beiden folgenden Reihenentwicklungen:

$$(3'.) \qquad v = \sum_{m=0}^{m=\infty}\varrho^m X_m,$$

$$(3''.) \qquad v = \sum_{m=0}^{m=\infty}\varrho^{-m-n+1}X_m,$$

und durch Einführung der einen oder der anderen in (2.) ergiebt sich für $X_m$ die (schon von Herrn *Heine* aufgestellte) partielle Differentialgleichung

$$(5.) \qquad m(m+n-1)X_m+\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{q_s\sin^{n-s}\varphi_s}\frac{\partial}{\partial\varphi_s}\left(\sin^{n-s}\varphi_s\frac{\partial X_m}{\partial\varphi_s}\right) = 0.$$

Eine jede Lösung $Z_n$ dieser Differentialgleichung, welche, wie es mit $X_n$ der Fall ist, eine ganze rationale Function ($m^{ten}$ Grades) der Grössen $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1\cos\varphi_2$ etc. ist, möge eine *Laplace*sche Function $n^{ter}$ Ordnung heissen: unsere Aufgabe besteht dann darin, eine Function von $n$ Variablen $\varphi$, welche für alle Werthe von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ zwischen 0 und $\pi$ und für alle Werthe von $\varphi_n$ zwischen 0 und $2\pi$ gegeben ist, in eine Reihe $Z_0+Z_1+Z_2+\cdots$ von *Laplace*schen Functionen $n^{ter}$ Ordnung zu entwickeln.

## §. 2.

### Ableitung der Reihenentwicklungen.

Für $n=2$ kann die Form der Reihe bekanntlich sehr leicht durch Anwendung des Satzes erhalten werden, dass die zur Kugelfläche normale Attractionscomponente beim Durchgange durch die Fläche eine plötzliche Aenderung um eine Grösse erfährt, die der Dichtigkeit der Massenschicht an der Durchgangsstelle proportional ist. Dem analog suchen wir in dem allgemeinen Falle den Grenzwerth zu ermitteln, welchen die Differenz

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{(\varrho=1+\varepsilon)} - \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{(\varrho=1-\varepsilon)} = D$$

für ein unendlich kleines positives $\varepsilon$ annimmt. Diese Differenz stellt sich vermöge (3.) als der Unterschied zweier vielfachen Integrale dar, deren entsprechende Elemente sich unendlich wenig von einander unterscheiden, mit Ausnahme derjenigen, für welche $r$ der Null sehr nahe liegt. Da dies aber nur für kleine Werthe von $\omega$ stattfindet, so ist es zweckmässig, es so einzurichten, dass $\omega$ eine der Integrationsvariablen wird. Indem wir deshalb von den Variablen $\lambda$ für den Augenblick wieder zu den $a$ zurückgehen, ersetzen wir diese durch $n+1$ neue Variablen $b, b_1, \ldots b_n$ durch die folgende orthogonale Substitution:

$$(6.)\quad \begin{cases} a_1 = \cos\varphi_1 b - \sin\varphi_1 b_1 \\ a_2 = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 b + \cos\varphi_1\cos\varphi_2 b_1 - \sin\varphi_2 b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n = \sin\varphi_1 \ldots \cos\varphi_n b + \cdots\cdots\cdots\cdots - \sin\varphi_n b_n \\ a_{n+1} = \sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_n b + \cdots\cdots\cdots\cdots + \cos\varphi_n b_n, \end{cases}$$

worin die Coefficienten von $b_i$ aus denen von $b$ durch partielle Differentiation nach $\varphi_i$, unter Fortlassung des gemeinsamen Factors $\sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{i-1}$, hervor-

gehen. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$b = a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cdots = l\cos\omega,$$

und setzt man ausserdem

$$b_1 = l\sin\omega\cos\omega_1, \quad \ldots, \quad b_n = l\sin\omega \ldots \sin\omega_{n-1},$$

so wird (3.) transformirt in:

$$v = \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{2\pi} F(\varrho) \sin^{n-2}\omega_1 \ldots \sin^1\omega_{n-2}\, d\omega_1 \ldots d\omega_{n-1},$$

wenn

$$F(\varrho) = \int_0^{\pi} \frac{k' \sin^{n-1}\omega\, d\omega}{(1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}},$$

so dass es sich jetzt nur um die Werthbestimmung der Differenz $F'(1+\varepsilon)-F'(1-\varepsilon)$ handelt. Differentiirt man nun $F(\varrho)$ nach $\varrho$, setzt dann $\varrho = 1+\varepsilon$, und zugleich

$$\cos\omega = 1 - \tfrac{1}{2}z^2, \qquad \frac{1-n}{2}(1-\tfrac{1}{4}z^2)^{\frac{1}{2}n-1}.\, k' = h',$$

so erhält man:

$$F'(1+\varepsilon) = \int_0^2 \frac{h'\,dz}{\left(1+\frac{\varepsilon^2}{z^2}+\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}} + \int_0^2 \frac{2\varepsilon h'\,dz}{z^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{z^2}+\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

Das erste dieser Integrale ändert sich, wie leicht zu sehen, unendlich wenig, wenn $\varepsilon$ in $-\varepsilon$ verwandelt wird. Es kommt also nur das zweite in Betracht, welches wir in zwei Theilintegrale mit den Grenzen 0 und $\delta$, $\delta$ und 2 zerlegen, während wir $\delta$ mit $\varepsilon$ zugleich gegen Null hin abnehmen lassen, jedoch so, dass der Quotient $\varepsilon : \delta$ stets unendlich klein bleibt. Das zweite Theilintegral ist, wenn $H$ einen gewissen endlichen Werth bezeichnet, gleich

$$H\int_{\delta}^{2} \frac{2\varepsilon\,dz}{z^2} = H\left(\frac{2\varepsilon}{\delta} - \varepsilon\right),$$

verschwindet also zugleich mit $\varepsilon$, und das erste ist, wenn $(h')$ den Werth des $h'$ für einen gewissen zwischen 0 und $\delta$ gelegenen Werth $z_1$ des $z$ bedeutet, gleich

$$(h')\left(1+\frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon^2}{z_1^2}}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)} \cdot \int_0^{\delta} \frac{2\varepsilon\,dz}{z^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

Aber der Factor von $(h')$ vor dem Integralzeichen ist unendlich wenig von 1 verschieden, und das Integral geht durch die Substitution $z = \varepsilon t^{-1}$ über in:

$$\int_{\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2}^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}n-1}\,dt}{(1+t)^{\frac{1}{2}(n+1)}} = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}n-1}\,dt}{(1+t)^{\frac{1}{2}(n+1)}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}.$$

Das Doppelte dieses Werthes mit $(k')$ oder $\frac{1}{2}(1-n)(k')$ multiplicirt ist gleich der Differenz $F'(1+\varepsilon)-F'(1-\varepsilon)$, und daher ist:

$$(7.) \qquad D = -\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma\frac{1}{2}(n-1)}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{2\pi}(k')\sin^{n-2}\omega_1\ldots\sin^1\omega_{n-2}\,d\omega_1\ldots d\omega_{n-1}.$$

Es bedeutete $(k')$ den Werth des $k'$ für ein unendlich kleines $\omega$. Aber für $\omega=0$ folgt aus (6.), dass $\cos\lambda_1=\cos\varphi_1$, $\sin\lambda_1\cos\lambda_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2$ u. s. w., und hieraus gehen unter der Voraussetzung, dass die $\varphi$ keinen ihrer Grenzwerthe 0 und $\pi$ (resp. 0 und $2\pi$) besitzen, für die $\lambda$ die bestimmten Auflösungen $\lambda_1=\varphi_1$, $\lambda_2=\varphi_2$ u. s. w. hervor, von denen sich die für ein unendlich kleines $\omega$ geltenden nur unendlich wenig unterscheiden. Wenn also die Function $k'=f(\lambda_1,\ldots\lambda_n)$ für das besondere Werthsystem $\lambda_1=\varphi_1$, $\lambda_2=\varphi_2$ etc. nicht vieldeutig ist, so nähert sich $(k')$ der von $\omega_1$, $\omega_2$ etc. unabhängigen Grenze $k=f(\varphi_1,\ldots\varphi_n)$, und die Gleichung (7.) kann dann durch die folgende ersetzt werden:

$$(7'.) \qquad D=\left(\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right)_{1+\varepsilon}-\left(\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right)_{1-\varepsilon}=-\frac{4\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}}{\Gamma\frac{1}{2}(n-1)}k.$$

In Betreff der Grenzwerthe der Variablen wird die Bemerkung genügen, dass $D$ für $\varphi_i=0$ und $\varphi_i=\pi$ von $\varphi_{i+1}$, $\varphi_{i+2}$ etc. unabhängig, und dass für $\varphi_n=0$ und $\varphi_n=2\pi$ an Stelle von $k$ das arithmetische Mittel der diesen beiden Werthen entsprechenden Functionalwerthe zu setzen ist.

Indem man (7'.) mit (3''.) und (3'.) verbindet, darauf $\varrho=1$ und für $X_m$ den in (4.) befindlichen Werth setzt, erhält man:

$$(I.) \qquad k=\frac{\Gamma\frac{1}{2}(n-1)}{4\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}}\sum_{m=0}^{m=\infty}(2m+n-1)\int k'R_m(\cos\omega)\,d\sigma',$$

aber die Gültigkeit dieser Entwicklung bleibt zweifelhaft, weil ihre Ableitung auf der Annahme beruht, dass die angewandten nach Potenzen von $\varrho$ fortschreitenden Reihen, welche für $\varrho=1+\varepsilon$, resp. $\varrho=1-\varepsilon$, allerdings sicher convergent sind, ihre Convergenz auch noch für $\varrho=1$ beibehalten.

Die in dem allgemeinen Gliede auftretende specielle *Laplace*sche Function $R_m(\cos\omega)$ hat, je nachdem $n$ eine ungerade oder gerade Zahl ist, einen wesentlich verschiedenen Charakter; es ist nämlich, wenn man $s$ statt $\cos\omega$ schreibt,

für $n=2\mu+1$, $\mu>0$:

$$R_m(s)=\frac{1}{(m+\mu)2^{\mu-1}\Gamma(\mu)}\frac{d^\mu\cos(m+\mu)\omega}{ds^\mu},$$

und für $n = 2\mu+2$, $\mu \geqq 0$:

$$R_m(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\mu \Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \frac{d^\mu P_{m+\mu}(z)}{dz^\mu},$$

in Betreff welcher Ausdrücke ich auf die oben angeführte Arbeit des Herrn *Heine* verweise. Die Reihe in (I.) führt also auf die beiden folgenden Reihen:

$$(\mathrm{I}^a.) \quad S = \frac{2}{(2\pi)^{\mu+1}} \sum_{m=0}^{m=\infty} \int f(\lambda_1, \dots \lambda_{2\mu+1}) \frac{d^\mu \cos(m+\mu)\omega}{dz^\mu} d\tau,$$

$$d\tau = \sin^{2\mu}\lambda_1 \dots \sin^1 \lambda_{2\mu} d\lambda_1 \dots d\lambda_{2\mu+1},$$

$$z = \cos\omega = \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 + \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \cos\varphi_2 \cos\lambda_2 + \cdots$$
$$+ \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \dots \sin\varphi_{2\mu} \sin\lambda_{2\mu} \cos(\varphi_{2\mu+1} - \lambda_{2\mu+1}).$$

$$(\mathrm{I}^b.) \quad S = \frac{1}{(2\pi)^{\mu+1}} \sum_{m=0}^{m=\infty} (m+\mu+\tfrac{1}{2}) \int f(\lambda_1, \dots \lambda_{2\mu+2}) \frac{d^\mu P_{m+\mu}(z)}{dz^\mu} d\tau.$$

Die Ausdrücke für $d\tau$ und $z$ in der letzten Gleichung gehen aus den voranstehenden durch Verwandlung von $2\mu$ in $2\mu+1$ hervor.

## §. 3.

### Ueber die Convergenz der Reihenentwicklungen.

Die wichtigen Arbeiten *Dirichlets* über die trigonometrischen und die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen (im 4^ten^ und 17^ten^ Bande dieses Journals) bieten die hauptsächlichsten Hülfsmittel dar, um auch die erhaltenen allgemeineren Reihen zu untersuchen. Bezeichnet man durch $S_m$ die Summe der $m-\mu+1$ ersten Glieder der Reihe ($\mathrm{I}^a.$), in welcher die Function $f$ als endlich vorausgesetzt werde, und bemerkt man, dass

$$\cos(\mu\omega) + \cos(\mu+1)\omega + \cdots + \cos(m\omega) = \tfrac{1}{2} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega} - G,$$

wo $G$ eine ganze Function von $z$ vom $\mu-1^{\text{ten}}$ Grade, so findet man:

$$S_m = \frac{1}{(2\pi)^{\mu+1}} \int f(\lambda_1, \dots \lambda_{2\mu+1}) \frac{d^\mu}{dz^\mu} \left( \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega} \right) d\tau,$$

und wenn man dieses Integral durch die Substitution (6.) transformirt und

$$\Psi(\omega) = \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} f(\lambda_1, \dots \lambda_{2\mu+1}) \sin^{2\mu-1}\omega_1 \dots \sin^1 \omega_{2\mu-1} d\omega_1 \dots d\omega_{2\mu}$$

setzt, so wird:

$$(A.) \quad S_m = \frac{1}{(2\pi)^{\mu+1}} \int_0^\pi \Psi(\omega) \sin^{2\mu}\omega \frac{d^\mu}{dz^\mu} \left( \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega} \right) d\omega.$$

Wenn nun die Function $\Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega$ und ihre nach $s=\cos\omega$ genommenen $\mu-1$ ersten Differentialquotienten innerhalb der Integrationsgrenzen continuirlich bleiben und an den Grenzen selbst verschwinden, so ist es nicht allein erlaubt, $\mu$ mal hinter einander theilweise zu integriren, sondern es verschwinden auch die vom Integralzeichen freien Glieder, so dass man, indem man zur Abkürzung

$$X(\omega)=\frac{(-1)^{\mu-1}}{2(2\pi)^{\mu}}\frac{d}{d\omega}\left[\frac{d^{\mu-1}\Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega}{ds^{\mu-1}}\right]$$

setzt, für $S_m$ den Ausdruck erhält:

$$(B.)\qquad S_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}X(\omega)\,d\omega.$$

Für ein unendlich grosses $m$ nähert sich derselbe, wie *Dirichlet* gezeigt hat, sicher dann dem Werthe $X(+0)$, wenn dieser Werth endlich ist und $X(\omega)$ in dem Intervalle von 0 bis $\pi$ weder unendlich viele Stetigkeitsunterbrechungen erleidet noch unendlich viele Maxima und Minima besitzt *). Betrachtet man nun $\Psi(\omega)$ als den Quotienten von $\Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega$ und $\sin^{2\mu-1}\omega$, so ist, weil diese Grössen nebst ihren $\mu-1$ ersten nach $s$ genommenen Differentialquotienten für $\omega=0$ verschwinden, $\Psi(+0)$ gleich dem Quotienten der $\mu^{\text{ten}}$ Differentialquotienten beider für $\omega=0$, wodurch man leicht findet, dass

$$\Psi(+0)=\frac{X(+0)}{C},\quad\text{wenn}\quad C=\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{2\pi^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Es wird also $S_\infty=C\Psi(+0)$, und diese Grösse ist aus den schon bei Gelegenheit der Gleichung (7.) des vorigen Paragraphen angeführten Gründen gleich $f(\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_{2\mu+1})$, sofern dieser Werth nicht vieldeutig ist und keine der Variablen einen ihrer Grenzwerthe besitzt.

Wenn dagegen irgend eine der Functionen $\Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega$ und ihrer $\mu-1$ ersten Derivirten nach $s$ für einen oder mehrere Werthe $(c)$ der Variablen $\omega$ innerhalb der Integrationsgrenzen unstetig, aber nicht unendlich, wird, so kann man auf das Integral in $(A.)$, indem man es durch Einschaltung von Zwischengrenzen an den unstetigen Stellen in Theilintegrale zerlegt, noch immer das Verfahren der theilweisen Integration anwenden, aber es enthält alsdann $S_m$ ausser einer Anzahl von Integralen, deren Summe sich für $m=\infty$ wiederum auf $X(+0)$ reducirt, noch eine Anzahl von Gliedern, die vom In-

*) In Betreff der irregulären Functionen, für welche die letzteren Bedingungen nicht erfüllt sind, verweise ich auf eine Abhandlung des Herrn *Lipschitz*, in Bd. 63 dieses Journals (S. 296—308).

tegralzeichen frei sind, und weil sie je einen der Werthe von

$$\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega},\quad \frac{d}{dz}\left(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right),\quad \cdots\quad \frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}}\left(\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right)\quad (\text{für } \omega=c)$$

als Factor enthalten, bei unbegrenzt wachsendem $m$ unbestimmt oder unendlich werden. Es kann also hier von einer Convergenz der Reihe nicht die Rede sein, und eben so wenig wird dieselbe in dem Falle, wo die Derivirten von $\Psi(\omega)$ stellenweise unendlich grosse Werthe annehmen, stattfinden können, wenngleich sich dieser Fall nicht durch die nämlichen Schlüsse erledigen lässt.

Man darf übrigens nicht übersehen, dass wiewohl nach (6.) die $a$ stetige Functionen der $b$, d. h. (wenn wir $l=1$ setzen) die Grössen $\cos\lambda_1$, $\sin\lambda_1\cos\lambda_2$ etc. stetige Functionen von $\cos\omega$, $\sin\omega\cos\omega_1$ etc. sind, dennoch für die Variablen $\lambda$ selbst nicht durchweg das Gleiche stattfindet, indem insbesondere $\lambda_{2\mu+1}$ bei continuirlich sich änderndem $\omega$ plötzlich von einem der Grenzwerthe 0 und $2\pi$ auf den andern überspringen kann, und diesem Umstande ist es, wie ich beiläufig anführe, zuzuschreiben, dass für das specielle Werthsystem $\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_{2\mu+1}=\frac{1}{2}\pi$ die Function $\Psi(\omega)$ bei $\omega=\frac{1}{2}\pi$ im Allgemeinen eine plötzliche Aenderung erfährt und dadurch eine Divergenz der Reihe hervorbringt. Auf der anderen Seite aber ist das Folgende festzuhalten: Wenn die Function $f(\lambda_1,\ldots\lambda_{2\mu+1})$ als eine stetige Function $g$ der $2\mu+2$ Variablen $a_1=\cos\lambda_1$, $a_2=\sin\lambda_1\cos\lambda_2$ etc. betrachtet werden kann, und wenn auch die sämmtlichen nach den $a$ genommenen partiellen Differentialquotienten von $g$ bis zu denen der $\mu-1^{\text{sten}}$ Ordnung inclusive stetige Functionen der $a$ sind, so ist die Function $f$, so wie ihre $\mu-1$ ersten Derivirten nach $\omega$, auch in Bezug auf die Variablen $\omega$, $\omega_1$, ... durchweg stetig, woraus man leicht schliesst, dass dann die Bedingungen erfüllt sind, unter welchen die Transformation von (*A.*) in (*B.*) möglich ist.

Was die Reihe ($I^b$.) betrifft, so kann man dieselbe offenbar statt bei $m=0$ auch bei $m=-\mu$ beginnen lassen, und wenn man dann jedes Glied derselben durch die Substitution (6.) transformirt, so wird man, unter der Voraussetzung, dass eine $\mu$-malige theilweise Integration statthaft ist, auf ein Integral von der Form

$$S_m=\int_0^{\pi}F(\omega)(\tfrac{1}{2}P_0(z)+\tfrac{3}{2}P_1(z)+\cdots+\tfrac{1}{2}(2m+1)P_m(z))\sin\omega\,d\omega$$

geführt, dessen Werth, falls $F(\omega)$ endlich, sich nach *Dirichlet* für $m=\infty$ auf $F(+0)$ reducirt, d. h., wie man zufolge der Bedeutung von $F(\omega)$ finden wird, im Allgemeinen auf $f(\varphi_1,\ldots\varphi_{2\mu+2})$.

## §. 4.

Die Reihen beliebiger Ordnung für Functionen einer einzigen Variablen.

Wenn die Function $f$ nur von der ersten Variablen $\varphi_1$ abhängt, während $\mu$ beliebig bleibt, so darf man $\varphi_2 = \varphi_3 = \cdots = 0$ setzen, und die Reihe (I$^a$.) lässt sich durch Benutzung einer von Herrn *Heine* (a. a. O. S. 141) gegebenen Integralformel oder auch durch Benutzung der Differentialgleichung (5.) in die Form bringen:

$$S = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu}^{\infty} \frac{\Gamma(m-\mu+1)}{m\Gamma(m+\mu)} \frac{d^\mu \cos(m\varphi)}{(d\cos\varphi)^\mu} \cdot A_m,$$

$$A_m = \int_0^\pi d\lambda \sin^{2\mu}\lambda f(\lambda) \frac{d^\mu \cos(m\lambda)}{(d\cos\lambda)^\mu},$$

wobei $\varphi$, $\lambda$ statt $\varphi_1$, $\lambda_1$ und $m$ statt des früheren $m+\mu$ geschrieben worden ist. Die Function $\Psi(\omega)$ vereinfacht sich jetzt in

$$\Psi(\omega) = c\int_0^\pi f(\lambda) \sin^{2\mu-1}\omega_1 d\omega_1,$$

wo $c$ eine leicht angebbare Constante, und nach (6.) ist;

$$a = \cos\lambda = \cos\varphi\cos\omega - \sin\varphi\sin\omega\cos\omega_1.$$

Ist nun zunächst $\varphi = 0$, resp. $\varphi = \pi$, so wird $\lambda = \omega$, resp. $= \pi - \omega$, also von $\omega_1$ unabhängig, so dass $\Psi(\omega)$ sich nur durch einen constanten Factor von $f(\lambda)$, resp. $f(\pi-\lambda)$, unterscheidet. Die Reihe ist also für die Grenzwerthe 0 und $\pi$ divergent, wenn die Functionen $f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, ... $f^{(\mu-1)}(\lambda)$ innerhalb des Intervalles von 0 bis $\pi$ nicht sämmtlich stetig sind.

Wenn dagegen $\varphi$ von 0 und $\pi$ verschieden ist, so ist es für alle zwischen 0 und $\pi$ gelegenen Werthe von $\omega$ erlaubt, die Integrationsvariable $\omega_1$ durch $a$ auszudrücken, und es wird, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\sin^{1-2\mu}\varphi\,[\sin^2\varphi\sin^2\omega - (\cos\varphi\cos\omega - a)^2]^{\mu-1} = M,$$

$$\sin^{2\mu-1}\omega\,\Psi(\omega) = c\int_{\cos(\varphi+\omega)}^{\cos(\varphi-\omega)} f(\arccos a) M\,da.$$

Die wiederholte Differentiation dieser Gleichung nach $z = \cos\omega$ ergiebt mit Rücksicht darauf, dass $M$ und die $\mu-2$ ersten Derivirten von $M$ für $a = \cos(\varphi-\omega)$ und $a = \cos(\varphi+\omega)$ verschwinden:

$$\frac{d^\alpha \Psi(\omega)\sin^{2\mu-1}\omega}{dz^\alpha} = c\int_{\cos(\varphi+\omega)}^{\cos(\varphi-\omega)} f(\arccos a)\frac{d^\alpha M}{dz^\alpha}da, \quad (\alpha \leqq \mu-1).$$

Dieses Integral aber ist selbst dann eine stetige Function des Parameters $\omega$,

wenn $f(\arccos\alpha)$ oder $f(\lambda)$ stellenweise discontinuirlich ist, und es verschwindet ausserdem, wenn $\omega$ sich dem Werthe 0 oder $\pi$ unbegrenzt nähert. Diese Eigenschaften reichen hin, um die Umformung der Gleichung (*A.*) des vorigen Paragraphen in (*B.*) zu rechtfertigen, und die Reihe convergirt also, wenn $\varphi$ weder $=0$ noch $=\pi$, gegen den Werth von $X(\varepsilon)$ für ein unendlich kleines positives $\varepsilon$, d. h. gegen $\frac{1}{2}[f(\varphi-\varepsilon)+f(\varphi+\varepsilon)]$, wie man findet, wenn man in der vorangehenden Gleichung $\alpha=\mu-1$ nimmt und die entstehende Formel nach $\omega$ differentiirt.

Die Reihe ($I^b$.) nimmt für den Fall einer einzigen Variablen die Form an:

$$S = \sum_{\mu}^{\infty} \frac{(2m+1)\Gamma(m-\mu+1)}{2\Gamma(m+\mu+1)} \frac{d^\mu P_m(\cos\varphi)}{(d\cos\varphi)^\mu} \cdot B_m,$$

$$B_m = \int_0^\pi d\lambda \sin^{2\mu+1}\lambda f(\lambda) \frac{d^\mu P_m(\cos\lambda)}{(d\cos\lambda)^\mu}$$

und erweist sich dann als im Wesentlichen identisch mit der Entwicklung einer Function nach den Zugeordneten von $P_m(\cos\varphi)$. (Vergl. *Heine*, Handb. d. Kugelf. §. 52.) Wie ich einer gefälligen Mittheilung des Herrn *Heine* zu entlehnen mir erlaube, kann diese Reihe und zugleich der Beweis ihrer Convergenz für zwischen 0 und $\pi$ gelegene Werthe von $\varphi$ sehr leicht dadurch erhalten werden, dass man die Kugelfunctionenreihe, durch welche nach *Dirichlet* jede endliche Function zweier Variablen dargestellt werden kann, auf die specielle Function $F(\varphi,\psi)=f(\varphi)\sin^\mu\varphi\cos(\mu\psi)$ anwendet und die daraus entspringende Entwicklung von dem Factor $\sin^\mu\varphi\cos(\mu\psi)$ befreit. Aber für $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ ist die Division durch diesen Factor unstatthaft, und die Convergenz der Reihe bleibt zweifelhaft. Sie findet jedoch dann allerdings sicher statt, wenn die $\mu-1$ ersten nach $\cos\lambda$ genommenen Differentialquotienten von $f(\lambda)\sin^{2\mu}\lambda$, so wie auch diese Function selbst, stetig und an den Grenzen $=0$ sind, und wenn der $\mu^{te}$ Differentialquotient endlich ist.

## §. 5.

### Der Fall einer unendlich grossen Anzahl von Variablen.

Die Summe der unendlichen Reihe auf der rechten Seite von (I.) in §. 2 lässt sich, wenn man dem allgemeinen Gliede den Factor $\rho^m$ hinzufügt und $\rho<1$ nimmt, durch den folgenden geschlossenen Ausdruck darstellen:

$$S = \frac{(1-\rho^2)\Gamma\frac{1}{2}(n+1)}{2\pi^{\frac{1}{2}(n+1)}} \int k'(1-2\rho\cos\omega+\rho^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)} d\sigma'.$$

Es bezeichne nun $\nu$ eine ganze Zahl, die kleiner als $n-1$ ist, und es sei $k'$ von den Variablen $\lambda_{\nu+1}$, $\lambda_{\nu+2}$, ... $\lambda_n$ unabhängig, dann ist es erlaubt $\varphi_{\nu+1} = \varphi_{\nu+2} = \cdots = 0$ zu setzen, es wird

$$\cos\omega = \cos\varphi_1\cos\lambda_1 + \cdots + \sin\varphi_1\sin\lambda_1 \ldots \sin\varphi_\nu\sin\lambda_\nu\cos\lambda_{\nu+1},$$

und wenn man die Integrationen nach $\lambda_{\nu+2}$, $\lambda_{\nu+3}$, ... ausführt, $\cos\lambda_{\nu+1} = t$ und

$$J = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}(1-\varrho^2)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}(\nu+3)}\left(\frac{1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2}{1-t^2}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}dt$$

setzt, so ist:

$$S = \frac{\sqrt{\frac{2}{n}}\,\Gamma\tfrac{1}{2}(n+1)}{\pi^{\frac{1}{2}\nu}\,\Gamma\tfrac{1}{2}(n-\nu)}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}k'J\sin^{n-1}\lambda_1\ldots\sin^{n-\nu}\lambda_\nu\,d\lambda_1\ldots d\lambda_\nu.$$

Wir werden jetzt die bisherigen Variablen vermöge der Substitutionen

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\pi - x_1\sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \ldots \quad \varphi_\nu = \tfrac{1}{2}\pi - x_\nu\sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\pi - y_1\sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \ldots \quad \lambda_\nu = \tfrac{1}{2}\pi - y_\nu\sqrt{\frac{2}{n}}$$

durch neue ersetzen, ferner statt $k'$ die Function $F(y_1, \ldots y_\nu)$ einführen, und darauf die Zahl $n$ ins Unendliche wachsen lassen, während $\nu$ einen gegebenen endlichen Werth beibehält, dann geht $S$ über in:

$$(8.) \qquad S = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}\nu}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}F(y_1, \ldots y_\nu)J.e^{-Y}dy_1\ldots dy_\nu,$$

$$Y = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_\nu^2,$$

und für $J$ findet man, wenn man $t = \varrho + \vartheta\sqrt{\frac{2}{n}}$ macht, durch eine keiner besonderen Schwierigkeit unterworfene Rechnung den Ausdruck:

$$(9.) \qquad J = (1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}\nu}e^{\frac{2\varrho p - \varrho^2 q}{1-\varrho^2}},$$

worin:

$$p = \sum_{s=1}^{s=\nu}x_s y_s, \quad q = \sum_{s=1}^{s=\nu}(x_s^2 + y_s^2).$$

Es lässt sich nun $J$ auch in die Form bringen:

$$(9'.) \qquad J = \frac{e^Y e^{-Q}}{(\sqrt{1-\varrho^2})^\nu}, \quad \text{wenn:} \quad Q = \sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{\varrho x_s - y_s}{\sqrt{1-\varrho^2}}\right)^2,$$

und vermöge dieses Werthes von $J$ geht (8.) über in

$$(10.) \qquad S = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(y_1, \ldots y_\nu)}{(\sqrt{\pi}\sqrt{1-\varrho^2})^\nu}e^{-Q}dy_1\ldots dy_\nu,$$

und wenn man dieses Integral durch die Substitution

$$y_1 = \varrho x_1 + \sqrt{1-\varrho^2}\, z_1, \quad \ldots \quad y_\nu = \varrho x_\nu + \sqrt{1-\varrho^2}\, z_\nu$$

transformirt, so findet man, dass dasselbe, wie es auch nach der Art seiner Entstehung nicht anders zu erwarten war, sich für ein unendlich wenig von 1 verschiedenes $\varrho$ der Grenze $F(x_1, \ldots x_\nu)$ nähert, wenigstens sicher dann, wenn die Function $F$ für alle Werthe der Variablen endlich und $F(x_1, \ldots x_\nu)$ nicht vieldeutig ist.

Kehren wir jetzt zu (8.) und (9.) zurück und denken uns $J$ in die Reihe

$$J = J_0 + J_1\varrho + J_2\varrho^2 + \cdots$$

entwickelt, welche für $\varrho^2 < 1$ convergirt, so wird unter der Voraussetzung, dass die durch Einführung derselben in (8.) entstehende Entwicklung auch noch für $\varrho = 1$ convergent ist, die Function $F$ durch die Reihe

$$\text{(II.)} \qquad F(x_1, \ldots x_\nu) = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots$$

dargestellt, deren allgemeines Glied

$$X_m = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(y_1, \ldots y_\nu) J_m e^{-Y} dy_1 \ldots dy_\nu$$

eine ganze Function $m^{\text{ten}}$ Grades der Variablen $x_1, \ldots x_\nu$ ist und der Differentialgleichung genügt, die aus (5.) durch die Annahme $\varphi_s = \frac{1}{2}\pi - x_s\sqrt{\frac{2}{n}}$, $n = \infty$ hervorgeht:

$$\text{(11.)} \qquad 2mX_m + \sum_{s=1}^{s=\nu} e^{x_s^2} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(e^{-x_s^2} \frac{\partial X_m}{\partial x_s}\right) = 0.$$

Um nun $J_m$ in entwickelter Form darzustellen, zerlege man $J$ in das Product:

$$\text{(12.)} \qquad J = E(x_1, y_1) E(x_2, y_2) \ldots E(x_\nu, y_\nu),$$

wobei $E(x, y)$ definirt ist durch die Gleichung:

$$\text{(13.)} \qquad E(x, y) = \frac{e^{\frac{2\varrho xy - \varrho^2(x^2+y^2)}{1-\varrho^2}}}{\sqrt{1-\varrho^2}} = \frac{e^{y^2} e^{-\frac{(\varrho x - y)^2}{1-\varrho^2}}}{\sqrt{1-\varrho^2}}.$$

Bei der Entwicklung von $E$ kann man sich entweder der Differentialgleichung

$$\text{(14.)} \qquad 2\varrho \frac{\partial E}{\partial \varrho} - 2x \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$$

oder, wie ich es vorziehen werde, des folgenden bestimmten Integrales bedienen, worin $i$ die Bedeutung von $\sqrt{-1}$ hat:

$$\text{(15.)} \qquad E(x, y) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-yi)^2 - (x+\varrho ti)^2} dt.$$

Wenn man hierin die Exponentialgrösse mittels des *Taylor*schen Lehrsatzes nach Potenzen von $\varrho$ entwickelt und

$$(16.) \qquad x^{(\alpha)} = (-2)^{-\alpha} e^{x^2} \frac{d^\alpha e^{-x^2}}{dx^\alpha},$$

$$(17.) \qquad y^{(\alpha)} = \frac{i^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-yi)^2} t^\alpha dt$$

setzt, wobei $y^{(\alpha)}$ genau dieselbe Function von $y$, wie $x^{(\alpha)}$ von $x$, ist, so ergiebt sich:

$$(18.) \qquad E(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{2^\alpha \varrho^\alpha}{\Pi(\alpha)} x^{(\alpha)} y^{(\alpha)},$$

und hieraus folgt wegen (12.):

$$J_m = \Sigma \frac{2^{\alpha_1} x_1^{(\alpha_1)} y_1^{(\alpha_1)}}{\Pi(\alpha_1)} \frac{2^{\alpha_2} x_2^{(\alpha_2)} y_2^{(\alpha_2)}}{\Pi(\alpha_2)} \cdots \frac{2^{\alpha_\nu} x_\nu^{(\alpha_\nu)} y_\nu^{(\alpha_\nu)}}{\Pi(\alpha_\nu)},$$

wenn die Summe sich auf alle Werthe 0, 1, 2, 3 ... der $\alpha$ bezieht, für welche $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu = m$. Vermöge dieses Ausdruckes verwandelt sich die Reihe (II.) in

$$(III.) \qquad F(x_1, \ldots x_\nu) = \Sigma \frac{2^{\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu} \cdot A_{\alpha_1,\ldots\alpha_\nu}}{\pi^{\frac{1}{2}\nu} \Pi(\alpha_1) \ldots \Pi(\alpha_\nu)} x_1^{(\alpha_1)} \ldots x_\nu^{(\alpha_\nu)},$$

$$A_{\alpha_1,\ldots\alpha_\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(y_1, \ldots y_\nu) y_1^{(\alpha_1)} \ldots y_\nu^{(\alpha_\nu)} e^{-Y} dy_1 \ldots dy_\nu,$$

während für $\alpha_1, \ldots \alpha_\nu$ alle Zahlen der Reihe 0, 1, 2, 3, ... zu setzen sind.

In dieser Form erweist sich unsere Entwicklung leicht als ein specieller Fall der von Herrn *Hermite* gegebenen, auf welche in der Einleitung hingedeutet wurde. Um auch zu diesen allgemeineren Reihen in ähnlicher Weise zu gelangen, wie wir zu (III.) gelangt sind, müsste man auf (8.) und (10.) zurückgehen und in $Q$ statt der Summe der Quadrate der Grössen $\varrho x_1 - y_1$, $\varrho x_2 - y_2$, ... eine beliebige positive quadratische Form eben derselben Grössen einführen. Man wird dadurch zunächst auf eine *einzige*, der Reihe (II.) analoge Reihe geführt. Stellt man darauf das verallgemeinerte $J$ in (9'.), um es nach Potenzen von $\varrho$ entwickeln zu können, durch ein $\nu$-faches Integral dar, in ähnlicher Weise, wie in unserem speciellen Falle $J$ vermöge (12.) und (15.) durch ein Product von $\nu$ einfachen Integralen dargestellt wurde, so erhält man für $J_m$ eine Zerfällung in einfachere Bestandtheile, deren jeder das Product einer Function der $x$ in eine davon verschiedene Function der $y$ ist. Da aber der Entwicklungscoefficient $J_m$ in Wahrheit in Bezug auf

die $x$ und $y$ symmetrisch ist, so ergiebt sich durch die Vertauschung dieser Grössen noch eine zweite, von der ersten verschiedene Darstellungsform desselben, und auf diese Weise entstehen die *beiden* von Herrn *Hermite* gegebenen Entwicklungen, deren inniger Zusammenhang auch hierdurch aufs Deutlichste hervortritt.

Zum Schlusse mögen noch einige Notizen über die Function $x^{(\alpha)}$ Platz finden. Durch das Integral in (17.) erhält man sehr leicht die bekannten Relationen:

$$\frac{dx^{(\alpha)}}{dx} = \alpha x^{(\alpha-1)}, \quad xx^{(\alpha)} = x^{(\alpha+1)} + \frac{\alpha}{2} x^{(\alpha-1)}.$$

Die zweite ist ein specieller Fall der folgenden:

$$x^{(\alpha)} x^{(\beta)} = x^{(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha\beta}{2} x^{(\alpha+\beta-2)} + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{2.4} x^{(\alpha+\beta-4)} + \ldots.$$

Nach Potenzen von $x$ geordnet ist:

$$x^{(\alpha)} = x^{\alpha} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{1} \frac{x^{\alpha-2}}{2^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2} \frac{x^{\alpha-4}}{2^4} - \ldots.$$

Den Werth des Polynoms $x^{(\alpha)}$ für ein unendlich grosses $\alpha$ hat Herr *Hermite* mit Hülfe der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x^{(\alpha)}}{dx^2} - 2x\frac{dx^{(\alpha)}}{dx} + 2\alpha x^{(\alpha)} = 0$$

bestimmt. Um denselben vermittelst des bestimmten Integrales in (17.) abzuleiten, bringe man dasselbe in die Form:

$$(17'.) \qquad x^{(\alpha)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{\alpha} \cos(2tx - \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\, dt$$

und transformire es durch die Substitution $t = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \vartheta$, so wird:

$$x^{(\alpha)} = K \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}\alpha}}^{\infty} e^{-\vartheta^2 - \theta} \cos(2x\vartheta + x\sqrt{2\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\, d\vartheta,$$

$$K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}\alpha} e^{x^2}, \quad \theta = \vartheta\sqrt{2\alpha} - \alpha \log\left(1 + \vartheta\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right).$$

Das in $K$ multiplicirte Integral zerlege man in drei andere $T_1$, $T_2$, $T_3$ mit den Grenzen $-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ und $-m$, $-m$ und $m$, $m$ und $\infty$, wobei $m$ positiv und $< \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$. Da $\theta$ innerhalb der Integrationsgrenzen beständig positiv ist, so sind

$T_1$ und $T_3$ verschwindend klein, sofern nur $m$ mit $\alpha$ zugleich unendlich wird. Man kann aber $m$ so langsam zunehmen lassen, dass in $T_2$ beständig $\theta = \vartheta^2$ ist; es wird also:

$$T_2 = \cos(x\sqrt{2\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\int_{-m}^{m} e^{-2\vartheta^2}\cos(2x\vartheta)\,d\vartheta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos(x\sqrt{2\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha\pi),$$

und somit:

$$x^{(\alpha)} = \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}\alpha} e^{\frac{1}{2}x^2}\cos(x\sqrt{2\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha\pi).$$

Danzig, im Mai 1866.

# Ueber Theta-Functionen vielfacher Argumente.

(Von Herrn *G. Roch* in Halle.)

Die Methoden *Riemanns*, welche die Anzahl und Lage der Nullpunkte von $\vartheta(u_1-c_1, \ldots u_p-c_p)$ bestimmen, wenn $u_1, \ldots u_p$ gewisse endliche bleibende Integrale

$$\int \frac{\varphi_1 dz}{\frac{\partial F}{\partial s}} \cdots \int \frac{\varphi_p dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

mit gemeinschaftlicher oberer Grenze bedeuten, geben auch die Fundamentalsätze über das Verschwinden von

$$\vartheta(mu_1-c_1, \ldots mu_p-c_p),$$

wo $m$ eine ganze Zahl.

Diese Methoden lassen auch die Bedingungen der Transformationen erkennen, welche der complexen Multiplication elliptischer Functionen entsprechen; doch will ich mich jetzt auf ganzzahlige $m$ beschränken und die Sätze mittheilen, welche durch geometrische Interpretationen eine grosse Anschaulichkeit gewinnen. Diese geometrischen Anwendungen der Theorie *Abel*scher Integrale sind wesentlich von denen verschieden, welche Herr *Clebsch* (Bd. 64 dieses Journals) so wie ich (Ueber Doppeltangenten etc.) früher berührt haben.

Die zu Grunde liegende algebraische Gleichung $F(s,z)=0$ stelle, wenn $s$ und $z$ Cartesische Coordinaten sind, eine Curve $n^{\text{ten}}$ Grades dar. Ist $r$ die Anzahl der Doppelpunkte dieser Curve, so ist

$$(1.) \quad p = \frac{n-1.n-2}{2} - r.$$

Diese Curve werde von einer andern $q^{\text{ter}}$ Ordnung in $qn$ Punkten geschnitten. Man bilde die Summe der Integrale $u_1, \ldots u_p$, einzeln über diese $qn$ Punkte ausgedehnt. Sind dann, über $qn$ beliebige andere Punkte die analogen Summen ausgedehnt, diese letzteren gleichwerthig, so kann man immer durch $\vartheta$-Functionen eine rationale Function von $s$ und $z$ darstellen, welche in den ersten $qn$ Punkten unendlich, in den letzteren Null wird.

In Bezug auf die Darstellung dieser Function durch die Buchstaben $s$ und $z$ aber ist zweierlei möglich; entweder nämlich ist dieselbe ganz allgemein der Quotient zweier ganzen Functionen vom $q^{\text{ten}}$ Grade, oder dieses

Letztere ist nicht der allgemeinste Ausdruck. Ein Beispiel für das Letztere ist die Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Hier ist $p=1$. Seien $f=0$, $g=0$ zwei Gerade, so verschwindet $\frac{f}{g}$ in vier Punkten und wird in vier Punkten unendlich. Der allgemeinste Ausdruck aber einer Function, die in den vier Punkten unendlich ist, in denen $g$ gleich Null ist, enthält $4-1+1=4$ Constante, während in der Gleichung der Geraden $f=0$ nur drei willkürliche Constante enthalten sind. Man erkennt ohne Weiteres, dass $p$ eine gewisse Grösse haben muss, damit dies nicht eintritt.

In der Curve $q^{\text{ter}}$ Ordnung sind $(q<n)$

$$\frac{q+1.q+2}{2}$$

Constante enthalten, und dies muss der in meiner früheren Notiz (über die Anzahl willkürlicher Constanten etc. d. Journ. Bd. 64) gegebenen gleich sein.

Von den $qn$ Schnittpunkten einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung sind $qn-\frac{q.q+3}{2}$ durch die übrigen bestimmt. Dies wird, wie auch das Folgende ergeben wird, die untere Grenze für $p$ sein. Nehmen wir also

$$(2.) \qquad p = qn-\frac{q.q+3}{2}+i.$$

Durch Vergleich mit (1.) ergiebt sich dann

$$(3.) \qquad r = \frac{(n-q-1)(n-q-2)}{2}-i.$$

Die Functionen $\varphi$, welche die Zähler der endlich bleibenden Integrale bilden, sind vom Grade $n-3$. In den $r$ Doppelpunkten verschwinden aber $i$ ($i=0$ einschliesslich) linear von einander unabhängige Functionen vom Grade $n-q-3$; diese seien mit $f(s,z)$ bezeichnet. Sei $g(s,z)$ vom Grade $q$; so giebt es also $i$ Functionen $\varphi$, welche linear von einander unabhängig sind, nämlich die Functionen $f.g$, und in den $qn$ Nullpunkten von $g$ verschwinden. Die allgemeinste Function, welche in diesen Punkten unendlich wird, enthält daher

$$nq-p+i+1 = \frac{q.q+3}{2}+1$$

Constante; so viele enthält wirklich die Function vom Grade $q$.

Diese Betrachtungen sind geführt in der Voraussetzung, dass die Curve $q^{\text{ter}}$ Ordnung nicht durch Doppelpunkte geht. Sie beweisen, dass wirklich der Quotient zweier ganzen Functionen vom $q^{\text{ten}}$ Grade der allgemeinste Ausdruck einer Function ist, die in den $qn$ Schnittpunkten von $g=0$ unendlich ist; oder

sie beweisen: wenn die $p$ Summen der Integrale $u_1, \ldots u_p$ über $qn$ Punkte ausgedehnt die Werthe haben, wie sie $qn$ Schnittpunkten einer Curve $q^{ter}$ Ordnung zukommen, so liegen diese Punkte auch allemal auf einer Curve $q^{ter}$ Ordnung, sobald

$$p \geqq qn - \frac{q.q+3}{2}.$$

Wir müssen nun die Anzahl der Nullpunkte von $\vartheta(mu_1-c_1, \ldots mu_p-c_p)$ auffinden. Das Verfahren, welches *Riemann* im §. 22 d. Abhdlg. angiebt, führt auch hier zum Ziele; $d\log\vartheta$ ist zu beiden Seiten der Querschnitte $(a_\nu)$ gleich gross; zu beiden Seiten von $(b_\nu)$ hat es um

$$-2m^2 du_\nu$$

verschiedene Werthe; das Integral $\int d\lg\vartheta$, über die Begrenzung von $T$ ausgedehnt, giebt $p2m^2\pi i$, also $m^2p$ als Anzahl der Nullpunkte.

Dies ist das Theorem, dessen geometrische Anwendungen jetzt auseinander gesetzt werden sollen.

Betrachten wir zunächst Curven dritter Ordnung ohne Doppelpunkt, wo $p=1$. Die Summe der Werthe des Integrales $u$, über die drei Schnittpunkte einer Geraden ausgedehnt, sei $g$. Dann verschwindet

$$\vartheta\left(mu+\overset{3-m}{\Sigma}\alpha-g+\frac{\pi i}{2}+\frac{a}{2}\right)$$

in $m^2$ Punkten, in denen

$$mu+\overset{3-m}{\Sigma}\alpha = g.$$

Es giebt also 4 Gerade, welche durch einen Punkt $(\alpha)$ der Curve gehen und diese ausserdem berühren; und es giebt 9 Gerade, welche osculiren, die 9 Wendetangenten. Ferner kann man noch Kegelschnitte untersuchen; diese schneiden in 6 Punkten, die Summe der Integralwerthe über diese Punkte hat den Werth $2g$. Betrachten wir also

$$\vartheta\left(mu+\overset{6-m}{\Sigma}\alpha-2g+\frac{\pi i}{2}+\frac{a}{2}\right).$$

Dies verschwindet in $m^2$ Punkten; es giebt also $m^2$ Kegelschnitte, welche durch $6-m$ gegebene Punkte gehen und in einem dadurch bestimmten Punkte $m$-punktig berühren.

Im Folgenden nehmen wir immer für $p$ den untersten Grenzwerth

$$p = qn - \frac{q.q+3}{2}.$$

Den Grund hierfür werden diese Entwicklungen selbst enthalten. Betrachten wir

$$(4.) \quad \vartheta(mu+\overset{j}{\Sigma}\alpha-k)\ ^{*}),$$

$k$ die Summe der Integrale über die $qn$ Schnittpunkte einer Curve $q^{ter}$ Ordnung.

Dies $\vartheta$ verschwindet in $pm^2$ Punkten, in denen

$$(5.) \quad mu+\overset{j}{\Sigma}\alpha-k = -\overset{p-1}{\Sigma}\beta;$$

die $m+j+p-1$ Punkte $u$, $\alpha$, $\beta$ sollen auf einer Curve $q^{ter}$ Ordnung liegen und alle Schnittpunkte derselben sein, mithin muss

$$m+j+p-1 = qn$$

oder

$$m+j = \frac{(q+1)(q+2)}{2}$$

sein. Es giebt also $p.m^2$ Curven $q^{ter}$ Ordnung, welche durch $j$ Punkte $\alpha$ gehen und in einem dadurch bestimmten Punkte $m$-punktig berühren. Die Anzahl der durch diese Forderung gestellten Bedingungen ist in der That $\frac{q.q+3}{2}$, so dass dieselben im Allgemeinen zur Bestimmung der Curve $q^{ter}$ Ordnung hinreichen. Wäre $p$ grösser als unser Werth

$$p = qn-\frac{q.q+3}{2}+i,$$

so müsste $m+j = \frac{q+1.q+2}{2}-i$ sein. Dann wäre die Anzahl der Bedingungen zu klein, jeder Punkt $u$ würde die Gleichung (5.) befriedigen und die $\vartheta$-Function (4.) müsste identisch verschwinden. Ich werde hierauf nochmals später zurückkommen. Ist z. B. $n=4$, $q=1$, so muss $p=2$ sein. Die Curve vierter Ordnung hat dann einen Doppelpunkt. Jetzt ist

$$m+j = 3,$$

durch jeden gegebenen Punkt ($j=1$) gehen also $2.2^2=8$ Tangenten der Curve, und es giebt im Ganzen $2.3^2=18$ Wendetangenten ($j=0$).

Die hierdurch für jedes $p$ möglichen Multiplicatoren $m$, oder vielmehr die Zahlen $m+j$ stehen zu $p$ in einem interessanten Zusammenhange.

Zwischen $q$, $p$ und $n$ besteht die Gleichung

$$q^2-q(2n-3)+2p = 0,$$

*) Anstatt $\vartheta(v_1,\ldots v_p)$ soll, wenn keine Verwechslung möglich ist, $\vartheta(v)$ geschrieben werden.

mithin

$$q = \frac{2n-3 \pm \sqrt{(2n-3)^2-8p}}{2}.$$

Wenn $(2n-3)^2-8p=1$ ist, giebt dies

$$q = n-2,\ n-1,$$

$$m = \frac{n-1.n}{2},\ \frac{n.n+1}{2},\ \left(\text{in beiden Fällen } \frac{q+1.q+2}{2}\right)$$

und in beiden Fällen

$$p = \frac{n-1.n-2}{2},$$

also $r=0$.

Ist dagegen $(2n-3)^2-8p>1$, so muss es eine ungerade Quadratzahl sein, die wir schreiben

$$(2n-3)^2-8p=(2s-3)^2.$$

Dann ist für $q$ nur einer der Werthe zulässig:

$$q=n-s,\quad 2p=(n+s-3)(n-s).$$

Es muss also $2p$ auf alle Arten in einen geraden und einen ungeraden Factor zerlegt werden. Die Differenz der Factoren ist $2s-3$; ist diese gleich 1, so kann sowohl der grössere, als auch der kleinere von beiden als $q$ genommen werden. Beträgt die Differenz mehr, so muss $s>2$, also $n+s-3>n-s$ sein; dann darf nur der kleinere von beiden Factoren als $q$ genommen werden.

Hat man so die Werthe von $q$ für jedes $p$ gefunden, so ergeben sich die Werthe von $m+j$ vermöge

$$m+j = \frac{q+1.q+2}{2}.$$

Dies giebt folgende Zusammenstellung

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p=$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $m+j=$ | 3, 6 | 3 | 3, 6, 10 | 3 | 3, 6 | 3, 10, 15 |
| $p=$ | 7 | 8 | 9 | 10 | | 11 |
| $m+j=$ | 3, 6 | 3 | 3, 6, 10 | 3, 15, 21 | | 3, 6. |

Hat man $2p=q.t$ gesetzt, so ist $n=\frac{q+t+3}{2}$. Nehmen wir $p=3$, und setzen $q=2$, $t=3$, $n=4$, so können wir die Anzahl der Kegelschnitte bestimmen, welche durch $6-m$ gegebene Punkte gehen und in einem Punkte $m$-punktig berühren. Die Anzahl ist $3.m^2$, z. B. 27 für $m=3$. *Steiner* giebt in diesem

Falle (Bd. 49 dieses Journals) 30 Kegelschnitte an, während in dem speciellen Satze 5 daselbst die richtige Zahl 27 steht.

Da man immer $2p = 1.2p$ setzen kann, so wird immer $q = 1$, $m = 3$ möglich sein. Wir finden daher z. B. immer $4p$ von einem Curvenpunkte ausgehende Tangenten, $9p$ Wendetangenten; dies stimmt mit der sonst bekannten Zahl. Denn da die Curve $q^{\text{ter}}$ Ordnung wegen $p = n-2$ die Anzahl $r = \frac{n-3.n-2}{2}$ Doppelpunkte haben muss, so ergiebt sich die Anzahl Wendetangenten gleich

$$3n(n-2) - 6 \cdot \frac{n-3.n-2}{2} = 9(n-2)$$

(s. *Salmon,* higher plane curves p. 73).

Die jetzt entwickelten Anzahlen für berührende Curven sind die Anzahl der Lösungen von (5.); hat eine und dieselbe Curve $q^{\text{ter}}$ Ordnung die Eigenschaft, mehrere Punkte $u$ zu bestimmen, also in mehreren Punkten $m$-punktig zu berühren, so muss dieselbe sovielmal gezählt werden. Dies tritt immer ein für $m = 1$.

Nehmen wir z. B. $q = 1$, so lassen sich $(m+i = 3)$ durch 2 Punkte nicht $p$, sondern nur eine Gerade ziehen; diese schneidet aber noch in $n-2 = p$ Punkten, daher giebt unsere Bestimmung die Anzahl $p$.

Ferner giebt unsere Zahl an, wie oft

$$\vartheta(mu + \overset{j}{\Sigma}\alpha - k)$$

Null erster Ordnung wird.

Werde diese Function für ein Werthsystem von $u_1, \ldots u_p$ einmal Null zweiter Ordnung, so heisst dies, es verschwindet auch noch $\vartheta(mu + \overset{j}{\Sigma}\alpha - k)$, wenn man den Punkt $(s, z)$ oder $u$ um $dz$ vorwärts rückt; dies würde aussagen, dass die Curve $q^{\text{ter}}$ Ordnung $m+1$ punktig berührt. Dann muss einer der Punkte $\alpha$ einer der möglichen Berührungspunkte, sein und eine der möglichen Berührungen wäre $m+1$ punktig.

Die hier möglichen Fälle und die damit verbundene Verminderung der oben gegebenen Zahl zu discutiren hat keine Schwierigkeit. Es ist schon früher bemerkt worden, dass bei gegebenem $n$ die Annahme grösserer $p$ als des bis jetzt betrachteten zu identisch verschwindenden ϑ-Functionen führt.

Ich will bei dieser Discussion nur den allen $p$ gemeinschaftlichen Fall $q = 1$ betrachten. Dies liefert:

$$p = n-2+i, \quad m+j = 3-i.$$

Nehmen wir zunächst $i = 1$, so ist möglich

$$m = 2, \quad j = 0,$$

d. h. bei geeigneter Bestimmung der $p$ Constanten $k$ verschwindet

$$\vartheta(2u - k)$$

identisch für jede Lage des Punktes $u$; dies gilt für alle $p$ welche grösser als 2 sind. Um hier nämlich $p = 2$ zu erhalten, müssen wir von $p = 1$ ausgehen; dazu gehört $n = 3$, und für $n = 3$ kann nicht $p = 2$ werden.

Ferner ist $m = 1$, $j = 1$ möglich, d. h. für jedes $p$, welches $> 2$, ist

$$\vartheta(u + \alpha - k)$$

bei beliebiger Lage von $u$ und $\alpha$ Null.

Nehmen wir ferner $i = 2$, so erhalten wir $m = 1$, $j = 0$, d. h.

$$\vartheta(u - k)$$

verschwindet identisch für jede Lage des Punktes $u$.

Noch andere Sätze über das identische Verschwinden von $\vartheta$-Functionen erhält man, wenn man die Curve $q^{\text{ter}}$ Ordnung durch eine beliebige Anzahl $l$ der vorhandenen Doppelpunkte legt. Alsdann ist nämlich die Anzahl der Bedingungsgleichungen für die Lage der Curve $q^{\text{ter}}$ Ordnung nicht wie vorher $m+j$, sondern $m+j-l$, es tritt also dann der Fall ein, dass auch der Punkt $u$ zur Bestimmung der Lage der berührenden Curve hinzugenommen werden kann und die $\vartheta$ verschwinden dann auch, bei geeigneter Wahl der $k$, wenn man die Combinationen von $m+j$ und $p$ benutzt, bei denen bisher die $\vartheta$-Functionen nicht verschwanden.

Wir haben bis jetzt immer $q < n$ angenommen. Die Untersuchung von $q \geqq n$ führt noch zu ganz anderen Betrachtungen, weshalb ich dies einer anderen Mittheilung vorbehalte.

Ich will jetzt zu einer etwas anderen Form der Argumente der $\vartheta$-Function übergehen, die auch noch zu interessanten geometrischen Sätzen führt.

Betrachten wir, unter $\alpha$ und $\beta$ gegebene Punkte verstanden:

$$\vartheta(mu - \overset{p-m}{\Sigma}\alpha - \beta).$$

Dies verschwindet in $p.m^2$ Punkten, und dann muss allemal

$$mu + \overset{p-m}{\Sigma}\alpha - \beta = \overset{p-1}{\underset{1}{\Sigma}}\beta^{(i)}$$

oder

$$mu + \overset{p-m}{\Sigma}\alpha = \overset{p}{\Sigma}\beta$$

sein. Von den $p$ Punkten $\beta$ ist der eine, früher allein mit $\beta$ bezeichnete, willkürlich. Die $m$ Punkte $u$ und $\alpha$ müssen daher (s. *Riemann* §. 24) die Nullpunkte einer Function $\varphi$ sein. Nun ist, als Function des einen Punktes $\beta$ betrachtet,

$$\vartheta(\beta - mu - \overset{p-m}{\Sigma}\alpha)$$

in $u$ Null von $m^{\text{ter}}$ Ordnung, d. h. es hat dort die Form Const.$(z-b)^m$, wenn $b$ der zu $\beta$ gehörige Werth von $z$; daher ist diese Function auch als Function von $z$ betrachtet in $\beta$ Null $m^{\text{ter}}$ Ordnung und wird noch in $pm^2-m$ Punkten Null erster Ordnung. Es giebt also $pm^2-m$ Functionen $\varphi$, so dass die Curve $\varphi = 0$ durch $p-m$ gegebene Punkte $(\alpha)$ geht und in einem dadurch bestimmten Punkte $m$-punktig berührt.

Ist speciell $p = n-1$, $m = 3$, so giebt dies die Anzahl Wendetangenten einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit $\frac{n-4.n-1}{2}$ Doppelpunkten. Durch diese kann man nämlich eine Curve $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $f = 0$ legen, welche noch in $n-4$ Punkten schneidet. Nimmt man diese zu Punkten $\alpha$, und ist $g = 0$ die Gleichung einer Geraden, so sind alle durch die $p-3 = n-4$ Punkte gehenden Curven $\varphi = 0$ von der Form

$$f \cdot g,$$

und es giebt $q(n-1)-3$ solcher Functionen, für welche $f = 0$ dreipunktig berührt, also Wendetangente ist. Diese schneidet dann noch in je $n-3 = p-2$ Punkten $\beta$, so dass

$$3u + \overset{p-2}{\Sigma}\beta + \overset{p-3}{\Sigma}\alpha = 0.$$

Für $n = 4$, $p = 3$ giebt dies die Zahl 24.

Ist $n = 5$, $p = 6$, so ist $\varphi = 0$ ein beliebiger Kegelschnitt; es giebt $6m^2-m$ Kegelschnitte, welche durch $6-m$ Punkte gehen und in einem dadurch bestimmten Punkte $m$-punktig berühren, also z. B. 51 osculirende Kegelschnitte, welche durch drei gegebene Punkte gehen. *Steiner*, dieses Journal, Bd. 49, giebt in diesem Falle wiederum drei zu viel an, nämlich 54.

Halle a. S. im Febr. 1866.

# Beziehungen zwischen Theta-Producten.

(Von Herrn *Gordan* in Giessen.)

## §. 1.

*Jacobi* und *Hermite* haben die synektische Function

$$\theta(a, x) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n e^{i\pi(a n^2 + 2nx)}$$

durch die Functional-Gleichungen:

$$\theta(a, x) = \theta(a, x+1) = e^{i\pi(a+2x)}\theta(a, x+a)$$

bis auf einen von $x$ unabhängigen Factor bestimmt. Dieser Factor lässt sich *) mittelst der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\theta(a,x)}{\partial x^2} = 4i\pi\frac{\partial\theta(a,x)}{\partial a}$$

bis auf einen von $x$ und $a$ unabhängigen Factor bestimmen.

## §. 2.

Genügt umgekehrt die synektische Function $f(x)$ für eine gegebene Zahl $p$ den Relationen:

$$f(x) = f(x+p) = e^{i\pi(2x+a)}f(x+a),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4i\pi\frac{\partial f}{\partial a},$$

dann ist nach dem vorigen Satze:

$$\sum_0^{p-1}{}_n f(x+n) = c\theta(a, x),$$

wobei $c$ eine von $a$ und $x$ unabhängige Constante bedeutet. (Vergleiche Zahlentheorie von *Lejeune Dirichlet* pag. 317.)

## §. 3.

Der in §. 1 gegebene Satz kann leicht auf $\theta$ Producte ausgedehnt werden. Das Product

$$\psi(u_k) = \theta(a, u_1)\theta(a, u_2)\ldots\theta(a, u_n) = \prod_1^n{}_k \theta(a, u_k)$$

genügt für jede der Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$ den Relationen:

$$\psi(u_k) = \psi(u_k+1) = e^{i\pi(2u_k+a)}\psi(u_k+a)$$

*) Siehe *Riemann, Abel*sche Functionen §. 25.

und der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial u_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2\psi}{\partial u_n^2} = 4i\pi\frac{\partial\psi}{\partial a},$$

wodurch es bis auf einen von den Argumenten $u$ und dem Modulus $a$ unabhängigen Factor bestimmt wird.

## §. 4.

Genügt umgekehrt die synektische Function $f(u_1, u_2, u_3 \dots u_n)$, welche wir der Kürze wegen mit $f(u_k)$ bezeichnen wollen, für gegebene Zahlen:

$$p_1, \quad p_2, \quad \cdots \quad p_n$$

den Relationen:

$$f(u_k) = f(u_k+p_k) = e^{i\pi(2u_k+a)}f(u_k+a)$$

und der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial u_n^2} = 4i\pi\frac{\partial f}{\partial a},$$

dann ist nach §. 3:

$$\sum_0^{p_1-1}\sum_0^{p_2-1}\cdots\sum_0^{p_n-1} f(u_1+m_1, u_2+m_2, \dots u_n+m_n) = \sum_1^{p_\nu-1} f(u_\nu+m_\nu) = c\prod_1^n \theta(a, u_k),$$

wobei $c$ eine von den Grössen $a$, $u_1$, $u_2$, $\dots$ $u_n$ unabhängige Constante ist.

## §. 5.

Wir wollen nun zu $\theta$ Producten übergehen, in denen die einzelnen Factoren verschiedene Moduli haben, welche indess ganze Multipla von $a$ sein mögen.

Das Product:

$$\psi(\omega_k) = \theta(q_1 a, \omega_1)\theta(q_2 a, \omega_2)\theta(q_3 a, \omega_3)\dots\theta(q_n a, \omega_n)$$

genügt den Relationen:

$$\psi(\omega_k) = \psi(\omega_k+1) = e^{i\pi(2\omega_k+q_k a)}\psi(\omega_k+q_k a)$$

und der partiellen Differentialgleichung

$$q_1\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega_1^2}+q_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega_2^2}+\cdots+q_n\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega_n^2} = 4i\pi\frac{\partial\psi}{\partial a},$$

wodurch es bis auf einen von den Grössen $a$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\dots$ $\omega_n$ unabhängigen Factor bestimmt wird.

## §. 6.

Genügt die synektische Function $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \omega_n) = f(\omega_k)$ für gegebene Zahlen:

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_n$$

den Relationen:

$$f(\omega_k) = f(\omega_k + p_k) = e^{i\pi(2\omega_k + q_k a)} f(\omega_k + q_k a)$$

und der partiellen Differentialgleichung:

$$q_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_1^2} + q_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_2^2} + \cdots + q_n \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_n^2} = 4i\pi \frac{\partial f}{\partial a},$$

dann ist nach §. 5:

$$\sum_0^{p_r - 1} m_r f(\omega_r + m_r) = c \prod_1^n{}_k \theta(q_k a, \omega_k),$$

wobei $c$ eine von den Grössen $a$, $\omega_1$, $\omega_2$, ... $\omega_n$ unabhängige Constante ist.

## §. 7.

Wir führen nun $n$ Variable:

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n$$

und $n$ andere Variable:

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots \quad \omega_n$$

ein, welche von den ersteren durch $n$ Gleichungen der Form:

$$\text{(I.)} \qquad \omega_\lambda = a_{\lambda 1} u_1 + a_{\lambda 2} u_2 + \cdots + a_{\lambda n} u_n$$

abhängen mögen.

Ausserdem möge noch die Identität:

$$\text{(II.)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial u_n^2} = q_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_1^2} + q_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_2^2} + \cdots + q_n \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_n^2}$$

bestehen; es finden dann zwischen den Substitutionscoefficienten, welche wir ganzzahlig annehmen wollen, $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen der Form statt:

$$\text{(III.)} \qquad a_{\lambda 1} a_{\mu 1} + a_{\lambda 2} a_{\mu 2} + \cdots + a_{\lambda n} a_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu \gtrless \lambda, \\ q_\mu & - \quad \mu = \lambda. \end{cases}$$

## §. 8.

Durch Auflösung der Formeln (I.) erhält man $n$ Gleichungen der Form:

$$\text{(IV.)} \qquad u_\nu = A_{1\nu} \omega_1 + A_{2\nu} \omega_2 + A_{3\nu} \omega_3 + \cdots + A_{n\nu} \omega_n.$$

Um die Coefficienten $A_{\mu\nu}$ zu berechnen, bedienen wir uns folgendes Verfahrens.

Wir setzen in Formel (I.):

$$\text{(V.)} \qquad u_\nu = a_{\mu\nu},$$

es wird dann:

$$\text{(VI.)} \qquad \omega_\lambda = a_{\lambda 1}a_{\mu 1} + a_{\lambda 2}a_{\mu 2} + \cdots + a_{\lambda n}a_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mu \gtrless \lambda, \\ q_\mu & - \quad \mu = \lambda, \end{cases}$$

und wenn wir statt $u_\nu$ und $\omega_\lambda$ diese Werthe in Formel (IV.) eintragen:

$$a_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} q_\mu,$$

mithin

$$\text{(VII.)} \qquad u_\nu = a_{1\nu}\frac{\omega_1}{q_1} + a_{2\nu}\frac{\omega_2}{q_2} + \cdots + a_{n\nu}\frac{\omega_n}{q_n}.$$

## §. 9.

Die Function:

$$f(u_\nu) = \theta(a, u_1)\theta(a, u_2)\ldots\theta(a, u_n)$$

genügt nach §. 3 den Relationen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial u_n^2} = 4i\pi\frac{\partial f}{\partial a},$$

$$f(u_\nu) = f(u_\nu + a_{\mu\nu}) =$$

$$e^{i\pi\{2(a_{\mu 1}u_1 + a_{\mu 2}u_2 + \cdots + a_{\mu n}u_n) + a(a_{\mu 1}^2 + a_{\mu 2}^2 + \cdots + a_{\mu n}^2)\}} f(u_1 + a_{\mu 1}a, u_2 + a_{\mu 2}a, \ldots u_n + a_{\mu n}a)$$

mithin, als Function der $\omega$ angesehen, den Relationen:

$$q_1\frac{\partial^2 f}{\partial \omega_1^2} + q_2\frac{\partial^2 f}{\partial \omega_2^2} + \cdots + q_n\frac{\partial^2 f}{\partial \omega_n^2} = 4i\pi\frac{\partial f}{\partial a}, \qquad \text{(s. F. (II))},$$

$$f(\omega_\mu) = f(\omega_\mu + q_\mu) = e^{i\pi(2\omega_\mu + q_\mu a)} f(\omega_\mu + q_\mu a), \qquad \text{(s. F. (I.) u. (III.))}.$$

Wir können daraus nach §. 6 den Schluss ziehen, dass

$$\sum_0^{q_1-1}\sum_0^{q_2-1}\cdots\sum_0^{q_n-1} \theta\Big(a, a_{11}\frac{\omega_1+m_1}{q_1} + a_{21}\frac{\omega_2+m_2}{q_2} + \cdots + a_{n1}\frac{\omega_n+m_n}{q_n}\Big)$$

$$\times\theta\Big(a, a_{12}\frac{\omega_1+m_1}{q_1} + a_{22}\frac{\omega_2+m_2}{q_2} + \cdots + a_{n2}\frac{\omega_n+m_n}{q_n}\Big)\ldots\theta\Big(a, a_{1n}\frac{\omega_1+m_1}{q_1} + \cdots + a_{nn}\frac{\omega_n+m_n}{q_n}\Big)$$

$$= c\theta(q_1 a, \omega_1)\theta(q_2 a, \omega_2)\ldots\theta(q_n a, \omega_n).$$

Die Grösse $c$ bedeutet hier eine von den Grössen $a$, $\omega_1$, $\omega_2$, ... $\omega_n$ unabhängige Constante, welche wir bestimmen, indem wir $a = i\infty$ setzen.

In diesem Falle ist nämlich:

$$\theta(pa, x) = 1,$$

mithin:

$$q_1 q_2 \ldots q_n = c$$

und:

$$\sum_{1}^{q_r-1}\prod_1^n \theta\Big(a, \sum_1^n a_{s\lambda}\frac{\omega_s+m_s}{q_s}\Big) = \prod_1^k q_k\theta(q_k a, \omega_k)$$

oder, wenn man die Formel (VII.) anwendet:

$$\text{(VIII.)}\quad \sum_{1}^{q_r-1}{}_{m_r}\prod_{1}^{n}{}_{\lambda}\,\theta\Big(a, u_\lambda+\sum_{1}^{n}{}_{s}\,a_{s\lambda}\frac{m_s}{q_s}\Big) = \prod_{1}^{n}{}_{k}\,q_k\,\theta(q_k a, \sum_{1}^{n}{}_{l}\,a_{kl}u_l).$$

## §. 10.

Diese Formel kann leicht durch folgendes Verfahren eine allgemeinere Form annehmen.

Man vermehre $u_\lambda$ um $\mu_\lambda a$, wo $\mu_\lambda$ irgend eine ganze Zahl bedeutet, und wende dann die Formel an:

$$\theta\Big(a, u_\lambda+\sum_{1}^{n}{}_{s}\,\frac{a_{s\lambda}m_s}{q_s}\Big) = e^{i\pi\left\{2\mu_\lambda\left(u_\lambda+\sum_{1}^{n}{}_{s}\,\frac{a_{s\lambda}m_s}{q_s}\right)+\mu_\lambda^2 a\right\}}\theta\Big(a, u_\lambda+\mu_\lambda a+\sum_{1}^{n}{}_{s}\,\frac{a_{s\lambda}m_s}{q_s}\Big).$$

Wir erhalten dann die Formel

$$\sum_{1}^{q_r-1}{}_{m_r}\prod_{1}^{n}{}_{\lambda}\,e^{-i\pi\left\{2\mu_\lambda u_\lambda+2\sum_{1}^{n}{}_{s}\,\mu_\lambda\frac{a_{s\lambda}m_s}{q_s}+\mu_\lambda^2 a\right\}}\theta\Big(a, u_\lambda+\sum_{1}^{n}{}_{s}\,\frac{a_{s\lambda}m_s}{q_s}\Big)$$
$$= \prod_{1}^{n}{}_{k}\,q_k\,\theta(q_k a, \sum_{1}^{n}{}_{l}\,a_{kl}(u_l+\mu_l a)),$$

$$\sum_{1}^{q_r-1}{}_{m_r}\,e^{-2i\pi\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\sum_{1}^{n}{}_{s}\frac{a_{s\lambda}m_s}{q_s}}\prod_{1}^{n}{}_{\lambda}\,\theta\Big(a, u_\lambda+\sum_{1}^{n}{}_{s}\,\frac{a_{s\lambda}m_s}{q_s}\Big)$$
$$= e^{i\pi\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\{2\mu_\lambda u_\lambda+\mu_\lambda^2 a\}}\prod_{1}^{n}{}_{k}\,q_k\,\theta(q_k a, \sum_{1}^{n}{}_{l}\,a_{kl}(u_l+\mu_l a)).$$

## §. 11.

Vertauschen wir in der Doppelsumme

$$\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\sum_{1}^{n}{}_{s}\,\frac{a_{s\lambda}m_s}{q_s}$$

die Summationsbuchstaben und setzen wir in der Summe:

$$\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\{2\mu_\lambda u_\lambda+\mu_\lambda^2 a\}$$

$k$ statt $\lambda$, dann gelangen wir zu der Formel:

$$\sum_{1}^{q_r-1}{}_{m_r}\prod_{1}^{n}{}_{\lambda}\,e^{-2i\pi\sum_{1}^{n}{}_{s}\mu_\lambda\frac{a_{\lambda s}m_\lambda}{q_\lambda}}\theta\Big(a, u_\lambda+\sum_{1}^{n}{}_{s}\,\frac{a_{s\lambda}m_s}{q_s}\Big) = \prod_{1}^{n}{}_{k}\,e^{i\pi\{2\mu_k u_k+\mu_k^2 a\}}\,q_k\,\theta(q_k a, \sum_{1}^{n}{}_{l}\,a_{kl}(u_l+\mu_l a))$$

und, wenn wir:

$$e^{-\frac{2i\pi}{q_\lambda}} = \varepsilon_\lambda$$

setzen:

$$\sum_{1}^{q_r-1}{}_{m_r} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}^{m_\lambda \sum_{1}^{n}{}_{\nu} a_{\lambda\nu}\mu_\nu} \theta\left(a, u_\lambda + \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{a_{\lambda\nu} m_\nu}{q_\nu}\right) = \prod_{1}^{n}{}_{k} q_k e^{i\pi\{2\mu_k u_k + \mu_k^2 a\}} \theta\left(q_k a, \sum_{1}^{n}{}_{l} a_{kl}(u_l + \mu_l a)\right).$$

## §. 12.

Diese Formel ist eine Relation zwischen $\theta$ Functionen, deren Argumente lineare Functionen der Variabeln:

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n$$

sind.

Auf der linken Seite haben sämmtliche $\theta$ Functionen den Modul $a$, während auf der rechten Seite die $\theta$ Functionen der Reihe nach die Moduli:

$$q_1 a, \quad q_2 a, \quad \ldots \quad q_n a$$

haben.

Ausser diesen Grössen kommen noch die $n$ Zahlen $\mu_\lambda$ und die $n^2$ Zahlen $a_{ik}$ vor. Die ersteren sind völlig willkürlich, während die letzteren den $\frac{n.n-1}{2}$ Relationen (III.) genügen müssen.

## §. 13.

Je nach den ganzzahligen Werthen, welche man den Grössen $a_{ik}$ zuertheilt, wird man der Reihe nach alle nur denkbaren Beziehungen zwischen $\theta$ Producten erhalten. Wir sparen uns die zahlreichen Anwendungen unserer Formel auf Zahlentheorie und Modulargleichungen für spätere Untersuchungen auf und wollen uns hier auf einige wenige Beispiele beschränken, welche dazu dienen mögen, die Fruchtbarkeit der Methode darzuthun.

## §. 14.

Beginnen wir mit dem einfachsten Falle.

Es möge nur eine einzige Variable $u$ existiren; es ist dann:

$$q_k = a_{kk}^2$$

und daher

$$\sum_{1}^{q_k-1}{}_{m} \theta\left(a, u + \frac{m}{a_{kk}}\right) = a_{kk}^2 \theta(a_{kk}^2 a, a_{kk} u).$$

Setzen wir hier

$$m = n a_{kk} + h,$$

dann wird

$$\sum_0^{a_{11}-1}{}_u \sum_0^{a_{11}-1}{}_h \theta\Big(a, u+\frac{h}{a_{11}}\Big) = a_{11}^2 \theta(a_{11}^2 a, a_{11} u),$$

$$\sum_0^{a_{11}-1}{}_h \theta\Big(a, u+\frac{h}{a_{11}}\Big) = a_{11} \theta(a_{11}^2 a, a_{11} u).$$

## §. 15.

Wir wenden uns nun zu dem Falle, wo zwei Variable vorhanden sind. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2, \\ \omega_2 &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2, \\ a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} &= 0, \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 &= q_1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= q_2. \end{aligned}$$

Ohne der Allgemeinheit der Untersuchung grossen Eintrag zu thun, wollen wir die Annahme machen, dass sowohl die Zahlen $a_{11}$, $a_{12}$ als auch die Zahlen $a_{21}$, $a_{22}$ relative Primzahlen sind. — Die Formel

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0$$

zeigt, dass bei dieser Annahme:

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{22} = -a_{11}$$

sein muss, so dass die obigen Relationen in folgende übergehen:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2, \\ \omega_2 &= a_{12} u_1 - a_{11} u_2, \\ q &= a_{11}^2 + a_{12}^2. \end{aligned}$$

Tragen wir diese Werthe in Formel (VIII.) ein, dann erhalten wir die Gleichung:

$$\sum_0^{q-1}{}_{m_1} \sum_0^{q-1}{}_{m_2} \theta\Big(a, u_1 + \frac{a_{11} m_1 + a_{12} m_2}{q}\Big) \theta\Big(a, u_2 + \frac{a_{12} m_1 - a_{11} m_2}{q}\Big)$$
$$= q^2 \theta(qa, a_{11} u_1 + a_{12} u_2) \theta(qa, a_{12} u_1 - a_{11} u_2).$$

## §. 16.

Auf der linken Seite dieser Formel befindet sich eine Summe von $q^2$ Gliedern; wir wollen die Reihenfolge der Art verändern, dass sich je $q$ Glieder in ein einziges zusammenziehen lassen, und wir daher nur $q$ Glieder zu summiren haben. Um diesen Zweck zu erreichen, bestimmen wir zwei Zahlen $\alpha_{11}$ und $\alpha_{12}$ so, dass:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{vmatrix} = 1$$

wird, und führen 2 neue Summationsbuchstaben $n_1$ und $n_2$ mittelst der Formeln ein:

$$\begin{aligned} n_1 &= a_{11} m_1 + a_{12} m_2, \\ n_2 &= \alpha_{11} m_1 + \alpha_{12} m_2. \end{aligned}$$

Die Summen:

$$\sum_0^{q-1}\sum_0^{q-1} \theta\left(a, u_1+\frac{a_{11}m_1+a_{12}m_2}{q}\right)\theta\left(a, u_2+\frac{a_{12}m_1-a_{11}m_2}{q}\right)$$

und:

$$\sum_0^{q-1}\sum_0^{q-1} \theta\left(a, u_1+\frac{n_1}{q}\right)\theta\left(a, u_2+n_1\frac{a_{11}a_{11}+a_{12}a_{12}}{q}+n_2\right)$$

$$= q\sum_0^{q-1} \theta\left(a, u+\frac{n_1}{q}\right)\theta\left(a, u_2+n_1\frac{a_{11}a_{11}+a_{12}a_{12}}{q}\right)$$

enthalten dann dieselben Glieder und haben daher gleiche Werthe. Mithin erhalten wir die Gleichung

$$\sum_0^{q-1} \theta\left(a, u_1+\frac{n}{q}\right)\theta\left(a, u_2+n\frac{a_{11}a_{11}+a_{12}a_{12}}{q}\right) = q\theta(qa, a_{11}u_1+a_{12}u_2)\theta(qa, a_{12}u_1-a_{11}u_2).$$

## §. 17.

Je nach den ganzzahligen Werthen, welche man den Elementen der Determinante:

$$\Delta = 1$$

zuertheilt, erhält man Transformationsformeln der $q^{ten}$ Ordnung.

Für

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ist

$$q = 2,$$

$$\sum_0^1 \theta\left(a, u_1+\frac{n}{2}\right)\theta\left(a, u_2+\frac{n}{2}\right) = 2\theta(2a, u_1+u_2)\theta(2a, u_1-u_2).$$

Für

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ist

$$q = 5,$$

$$\sum_0^4 \theta\left(a, u_1+\frac{n}{5}\right)\theta\left(a, u_2+\frac{3n}{5}\right) = 5\theta(5a, 2u_1+u_2)\theta(5a, u_2-2u_2).$$

Für

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ist

$$q = 5,$$

$$\sum_0^4 \theta\left(a, u_1+\frac{n}{5}\right)\theta\left(a, u_2+\frac{2n}{5}\right) = 5\theta(5a, u_1+2u_2)\theta(5a, 2u_1-u_2).$$

Giessen, den 20. März 1865.

# Ueber singuläre Auflösungen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Von Herrn *H. Weber* zu Heidelberg.)

Während seiner Vorlesungen über Variationsrechnung im Wintersemester 1864/1865 hat mein hochverehrter Lehrer, Herr Prof. *Richelot* zu Königsberg, mich auf eine gewisse Art von Problemen aufmerksam gemacht, und mir dieselben zu einer weiteren Verfolgung empfohlen, von welchen *Lagrange* in der „Théorie des fonctions analytiques“ handelt, welche der Theorie der Maxima und Minima angehören, deren Lösung aber auf die Bestimmung der singulären Lösung einer Differentialgleichung hinausläuft.

Das Problem, welches von *Lagrange* a. a. O. behandelt ist, lässt sich geometrisch so ausdrücken: Es soll eine Curve bestimmt werden, welche die Eigenschaft hat, dass eine gegebene Function der Abscisse, der Ordinate und deren Differentialquotienten an jedem Punkt der Curve ein Maximum oder Minimum wird. In dieser allgemeinen Fassung ist, wie man sofort erkennt, das Problem überbestimmt. Daher dürfen die Variationen der Ordinate und der Differentialquotienten nicht von einander unabhängig sein, und zwar behandelt *Lagrange* die Aufgabe so, dass er den höchsten der in der gegebenen Function enthaltenen Differentialquotienten allein variirt. Ein besonderer Fall dieser Probleme ist namentlich von Interesse, nämlich der, wo der gesuchte grösste oder kleinste Werth der gegebenen Function eine Constante wird, weil sich alsdann die Ordnung der aufzulösenden Differentialgleichung um eine Einheit erniedrigt. Es ist dies der Fall, welcher auf die singuläre Lösung einer Differentialgleichung führt, nämlich derjenigen Differentialgleichung, welche man erhält, wenn man die gegebene Function gleich einer Constanten setzt.

Ich überzeugte mich bald, dass die ganze Theorie der singulären Lösungen auf diese Betrachtungsweise gegründet werden könne; denn die singulären Lösungen werden immer dadurch erhalten, dass man gewisse partielle Differentialquotienten Null setzt, was also auch als Bestimmung eines Maximums oder Minimums gedeutet werden kann.

Ins Besondere lässt sich die Aufgabe der Bestimmung der singulären Lösung immer so fassen, dass unter allen Werthen, welche die abhängige

Variable für ein constantes Werthsystem der unabhängigen Variablen der gegebenen Differentialgleichung gemäss annehmen kann, der grösste oder kleinste gesucht werden soll.

Dies geschieht dadurch, dass man entweder die Werthe der willkürlichen Constanten in der vollständigen Lösung, oder die Werthe der Differentialquotienten in der gegebenen Differentialgleichung variirt. In dem Fall einer Gleichung mit drei Variablen führt diese Betrachtungsweise, geometrisch gedeutet, wenn ein wirkliches Maximum oder Minimum stattfindet, zu der Enveloppe einer Schaar von Oberflächen, d. h. zu einer Oberfläche, über welche keine der durch die Differentialgleichung dargestellten Oberflächen hinausreicht. Wenn kein wirkliches Maximum oder Minimum stattfindet, so wird die Enveloppe von den Oberflächen, welche sie einhüllt, gleichzeitig berührt und geschnitten, so dass sich zu beiden Seiten der Enveloppe Individuen der Oberflächenschaar vorfinden.

Eine Untersuchung, welche Aehnlichkeit hat mit den Untersuchungen der zweiten Variation, führt zu dem Beweis, dass in gewissen Fällen die aus der Differentialgleichung erhaltene Lösung immer eine singuläre ist, und ferner zu einer Eintheilung der verschiedenen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung, die gewissen Bedingungen unterworfen ist, wie ich dies in den §§. 9 ff. gezeigt habe.

Ich glaubte diese wenigen Bemerkungen über die singulären Lösungen als Maxima oder Minima vorausschicken zu müssen, da diese Betrachtungsweise anfänglich den Ausgangspunkt meiner Untersuchungen bildete, den ich aber später verlassen habe, weil mir derselbe keine wesentlichen Vortheile zu bieten schien. Der Weg, den ich in der vorliegenden Abhandlung befolgt habe, ist übrigens weder in den Resultaten noch in den Methoden wesentlich verschieden von dem, der auf die Theorie des Maximums oder Minimums zu gründen wäre.

Der Gang meiner Untersuchungen ist folgender:

Im ersten Theil wird über die Form der Differentialgleichung nichts vorausgesetzt, als dass sie einen willkürlichen Parameter abgesondert enthält; für diese Gleichungen wird dann aus den bekannten Principien über die Lösungen der Differentialgleichungen Begriff und Bestimmungsweise der singulären Lösung abgeleitet. Im zweiten Theil nehme ich an, dass die Differentialgleichung in Bezug auf die abhängige Variable aufgelöst sei, wodurch die Resultate etwas an Allgemeinheit gewinnen. Auf Grund dieser Form

wird dann die Natur der durch Differentiation erhaltenen Lösung mit Hülfe der der Differentialgleichung genügenden Werthe der zweiten Differentialquotienten einer eingehenden Untersuchung unterworfen, wodurch man zugleich einige, wie es mir scheint, nicht uninteressante Einblicke in den Charakter der verschiedenen Arten von Lösungen überhaupt gewinnt. Endlich bin ich noch eingegangen auf die singulären Lösungen der linearen Differentialgleichungen, welche in den vorangegangenen Untersuchungen nicht einbegriffen waren.

## §. 1.

Es liege eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variablen vor:

$$(1.) \qquad f_0(z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = h_0,$$

worin $z$ die abhängige, $x_1 \ldots x_n$ die unabhängigen Variablen bedeuten, und $p_1 \ldots p_n$ wie gewöhnlich die Bedeutung haben:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n,$$

$h_0$ ist ein Parameter, welcher in der Function $f_0$ nicht vorkommen soll, und von welchem ich ausdrücklich hervorhebe, dass ich ihn als wesentlich willkürlich betrachte; die zunächst zu entwickelnden Sätze gelten nur für willkürliche constante Werthe von $h_0$ und können für specielle Werthe dieser Grösse Ausnahmen erleiden.

Auf die Form der hier betrachteten Gleichungen können alle Differentialgleichungen gebracht werden, die eine unbestimmte Constante enthalten, durch Auflösung nach dieser Constanten. Gleichungen ohne willkürlichen Parameter behalte ich einer späteren Untersuchung vor.

Ich bemerke endlich noch, dass ich, aus später anzugebenden Gründen, solche Differentialgleichungen ganz von meinen Betrachtungen ausschliesse, in welchen die abhängige Variable $z$ selbst nicht vorkommt.

Unter einer vollständigen Lösung der Gleichung (1.) versteht man bekanntlich einen Ausdruck für $z$ in den unabhängigen Variablen $x_1 \ldots x_n$ und $n$ willkürlichen Constanten $h_1 \ldots h_n$, welcher die Eigenschaft hat, dass wenn man ihn und seine partiellen Differentialquotienten für $z$ und $p_1 \ldots p_n$ in die gegebene Differentialgleichung (1.) substituirt, dieselbe identisch befriedigt wird, jedoch so, dass zwischen dem Ausdruck $z$ und seinen Differen-

tialquotienten keine andere, von den willkürlichen Constanten befreite identische Gleichung besteht.

Aus dieser Definition ergiebt sich unmittelbar Folgendes:

Zunächst dass eine vollständige Lösung den willkürlichen Parameter $h_0$ enthalten muss; ferner dass die Gleichungen, wodurch $z$, $p_1$, $p_2 \ldots p_n$ als Functionen von $x_1$, $x_2 \ldots x_n$, $h_0$, $h_1 \ldots h_n$ dargestellt sind, in Bezug auf die Grössen $h_0$, $h_1 \ldots h_n$ auflösbar sein müssen, und der dadurch gewonnene Ausdruck für $h_0$ gerade die gegebene Function $f_0$ sein muss. Es ergeben sich demnach durch dieses Verfahren Gleichungen von folgender Form:

$$(2.) \quad \begin{cases} h_0 = f_0(z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n), \\ h_1 = f_1(z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ h_n = f_n(z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n), \end{cases}$$

wo umgekehrt diese Gleichungen wieder nach $z$, $p_1 \ldots p_n$ auflösbar sein müssen, so dass man aus ihnen die vollständige Lösung auf algebraischem Wege wiederherstellen kann. Die Aufgabe, die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung zu finden, ist daher vollständig aequivalent mit der Aufgabe der Bestimmung der Functionen $f_1$, $f_2 \ldots f_n$.

Dies ist die Art, wie *Jacobi* die Aufgabe der Integration der partiellen Differentialgleichungen angreift*), und es sei mir erlaubt, soviel für die folgenden Untersuchungen nothwendig erscheint, aus den *Jacobi*schen Betrachtungen in etwas veränderter Form wiederzugeben.

## §. 2.

Damit in den Gleichungen (2.) des vorigen Paragraphen die vollständige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung enthalten sei, ist erforderlich, dass die Functionen $f_1 \ldots f_n$ gewisse Bedingungen erfüllen.

Zunächst müssen die Grössen $z, p_1 \ldots p_n$ vermöge der Functionen $f_0, f_1 \ldots f_n$ durch diese Functionen selbst und durch die unabhängigen Variablen ausdrückbar sein, und umgekehrt müssen aus diesen Ausdrücken die Functionen $f_0, f_1 \ldots f_n$ wieder hergestellt werden können, mit andern Worten, es darf keine

*) Vgl. dieses Journal Bd. 17 und Bd. 60.

der beiden Determinanten:

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial z}, & \frac{\partial f_0}{\partial p_1}, & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial p_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}, & \frac{\partial f_1}{\partial p_1}, & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z}, & \frac{\partial f_n}{\partial p_1}, & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial f_0}, & \frac{\partial z}{\partial f_1}, & \cdots & \frac{\partial z}{\partial f_n} \\ \frac{\partial p_1}{\partial f_0}, & \frac{\partial p_1}{\partial f_1}, & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial f_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial f_0}, & \frac{\partial p_n}{\partial f_1}, & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden.

Die andern Bedingungen, denen die Functionen $f_1 \ldots f_n$ zu genügen haben, ergeben sich daraus, dass die aus den Gleichungen (2.) des vorigen Paragraphen bestimmten Werthe von $p_1 \ldots p_n$ die partiellen Differentialquotienten des aus denselben Gleichungen bestimmten Werthes von $z$ nach den Variablen $x_1 \ldots x_n$ sein müssen, wenn $h_0$, $h_1 \ldots h_n$ als constant angesehen werden. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist in den Gleichungen (2.) jedenfalls eine vollständige Lösung der gegebenen Differentialgleichung enthalten.

Diese Bedingungen für $z$, $p_1 \ldots p_n$ lassen sich vollständig ersetzen durch ein System von partiellen Differentialgleichungen, denen die Functionen $f_1 \ldots f_n$ genügen müssen. Diese Gleichungen bilden das Fundament meiner folgenden Betrachtungen, weshalb ich dieselben hier auf einem möglichst kurzen Wege entwickeln werde, wiewohl dieselben in der posthumen Abhandlung von *Jacobi*, Band 60 dieses Journals, für den Fall, wo $z$ in der gegebenen Differentialgleichung fehlt, vollständig abgeleitet sind.

Um die Formeln in übersichtlicherer und kürzerer Form schreiben zu können will ich die Ausdrücke $z$, $p_1 \ldots p_n$, wie sie sich aus den Gleichungen (2.) des vorigen Paragraphen ergeben, durch $p_{00}$, $p_{10} \ldots p_{n0}$ bezeichnen, ferner die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial p_{00}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial p_{10}}{\partial x_i} \ldots \frac{\partial p_{n0}}{\partial x_i}$ durch $p_{0i}$, $p_{1i} \ldots p_{ni}$.

Die Bedingungsgleichungen, um welche es sich handelt, und welche umzuformen sind, werden alsdann:

$$(4.)\quad p_{\varkappa\lambda} = p_{\lambda\varkappa},$$

wo für $\varkappa$ und $\lambda$ alle möglichen Combinationen der Zahlen $0, 1, 2 \ldots n$ zu setzen sind.

Die Gleichungen (2.) werden durch Substitution der Ausdrücke $p_{00}$, $p_{10} \ldots p_{n0}$ für $z$, $p_1 \ldots p_n$ identisch, und durch Differentiation derselben nach $x_h$ erhält man die gleichfalls identischen Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} f'_\varrho(x_h) = -\sum_0^n{}_i f'_\varrho(p_{i0})p_{ih}, \\ \qquad\qquad\qquad \varrho = 0, 1, 2 \ldots n, \\ \qquad\qquad\qquad h = \quad 1, 2 \ldots n. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $f'_\sigma(p_{h0})$ und nimmt die Summe in Bezug auf alle Indices $h$, so ergiebt sich:

$$\sum_1^n{}_h f'_\sigma(p_{h0})f'_\varrho(x_h) = -\sum_0^n{}_i \sum_1^n{}_h f'_\sigma(p_{h0})f'_\varrho(p_{i0})p_{ih}.$$

Wenn man zu beiden Seiten dieser Gleichung das Glied:

$$-\sum_0^n{}_i f'_\sigma(p_{\omega 0})f'_\varrho(p_{i0})p_{i0}$$

hinzufügt, so kann man dieselbe auch so schreiben:

$$(6.)\quad \begin{cases} \sum_1^n{}_h\{f'_\sigma(p_{h0})f'_\varrho(x_h) - f'_\sigma(p_{\omega 0})f'_\varrho(p_{h0})p_{h0}\} = -\sum_0^n{}_i \sum_0^n{}_h f'_\sigma(p_{h0})f'_\varrho(p_{i0})p_{ih}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varrho = 0, 1, 2 \ldots n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma = 0, 1, 2 \ldots n. \end{cases}$$

Eine entsprechende Gleichung erhält man, wenn man hierin $\varrho$ und $\sigma$ mit einander vertauscht, und durch Abziehen der so gebildeten Gleichung von (6.)

$$(7.)\quad \begin{cases} \sum_1^n{}_h\{f'_\sigma(p_{h0})(f'_\varrho(x_h) + p_{h0}f'_\varrho(p_{\omega 0})) - f'_\varrho(p_{h0})(f'_\sigma(x_h) + p_{h0}f'_\sigma(p_{\omega 0}))\} \\ \qquad = -\sum_0^n{}_i \sum_0^n{}_h f'_\varrho(p_{i0})f'_\sigma(p_{h0})(p_{ih} - p_{hi}). \end{cases}$$

Daraus folgt nun zunächst, dass wenn die Bedingungen (4.) erfüllt sind, die linken Seiten der Gleichungen (7.) verschwinden müssen. Umgekehrt folgt aber auch, dass wenn die linken Seiten von (7.) verschwinden die Bedingungen (4.) erfüllt sind, was sich unmittelbar aus der Voraussetzung ergiebt, dass die erste Determinante (3.) des vorigen Paragraphen nicht identisch verschwinden soll; denn diese Determinante kann dann auch nicht durch Substitution der Werthe von $z, p_1 \ldots p_n$ aus den Gleichungen (2.) verschwinden, weil durch diese Substitution ebensoviel neue willkürliche Constanten eingeführt werden, von denen $z, p_1 \ldots p_n$ unabhängige Functionen sind. Mit anderen Worten es kann die Determinante

$$\begin{vmatrix} f'_0(p_{\omega 0}) & f'_0(p_{\omega 0}) & \ldots & f'_0(p_{\omega 0}) \\ f'_1(p_{\omega 0}) & f'_1(p_{10}) & \ldots & f'_1(p_{\omega 0}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_n(p_{\omega 0}) & f'_n(p_{10}) & \ldots & f'_n(p_{\omega 0}) \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden.

Es können demnach die Bedingungen (4.) vollständig ersetzt werden durch folgende:

Es müssen die Gleichungen:

$$(8.) \quad \sum_1^n{}_i \{f'_\varrho(p_i)(f'_\sigma(x_i)+p_i f'_\sigma(z))-f'_\sigma(p_i)(f'_\varrho(x_i)+p_i f'_\varrho(z))\} = 0$$

durch Substitution der Werthe von $z$, $p_1 \ldots p_n$ aus den Gleichungen (2.) des vorigen Paragraphen identisch werden.

Da aber wiederum durch diese Substitution $n+1$ neue willkürliche Constanten in die Gleichungen (8.) eingeführt werden, von welchen die Grössen $z$, $p_1 \ldots p_n$ unabhängige Functionen sind, so folgt, dass die Gleichungen (8.) auch schon vor dieser Substitution identisch sein müssen, dass sie also als partielle Differentialgleichungen angesehen werden können, aus welchen die Grössen $f_1$, $f_2 \ldots f_n$ als Functionen von $z$, $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$ zu bestimmen sind.

Aus diesen Betrachtungen nun ergeben sich einige wichtige Folgerungen:

Angenommen, es seien die Functionen $f_1$, $f_2 \ldots f_n$ den Bedingungen (8.) gemäss bestimmt, und zwar, was ebenfalls erforderlich ist, von einander und von $f_0$ unabhängig in Bezug auf $z$, $p_1 \ldots p_n$, so können auch umgekehrt die Grössen $z$, $p_1$, $p_2 \ldots p_n$ ausgedrückt werden durch die Functionen $f_0$, $f_1 \ldots f_n$, in welchen Ausdrücken ausserdem noch die unabhängigen Variablen $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ vorkommen werden.

Wenn wir in den so gebildeten Ausdrücken für $z$, $p_1 \ldots p_n$ für die Functionszeichen $f_0$, $f_1 \ldots f_n$ ihre Ausdrücke durch $z$, $x_1$, $x_2 \ldots x_n$, $p_1$, $p_2 \ldots p_n$ zurücksubstituiren, so müssen wir identische Gleichungen erhalten, nämlich: $z = z$, $p_1 = p_1$, $\ldots$ $p_n = p_n$. Durch Differentiation der ersten dieser Gleichungen nach allen darin vorkommenden Grössen ergiebt sich das System identischer Gleichungen:

$$(9.) \quad \begin{cases} 0 = -1+\sum_0^n{}_i \frac{\partial z}{\partial f_i} f'_i(z), \\ 0 = \sum_0^n{}_i \frac{\partial z}{\partial f_i} f'_i(p_\varrho), \\ 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x_\varrho}\right)+\sum_0^n{}_i \frac{\partial z}{\partial f_i} f'_i(x_\varrho). \end{cases}$$

Hierin hat $\left(\frac{\partial z}{\partial x_\varrho}\right)$ folgende Bedeutung: es ist der Differentialquotient nach $x_\varrho$ des Ausdrucks für $z$ durch die Functionen $f_0$, $f_1 \ldots f_n$, sowie $x_\varrho$ in diesem Ausdruck explicite vorkommt.

Nach den Bedingungen aber, welchen die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ unter-

worfen sind, muss der Ausdruck $\left(\frac{\partial z}{\partial x_\varrho}\right)$ identisch sein mit dem Ausdruck für $p_\varrho$, und demnach nimmt das System (9.) die Gestalt an:

$$(10.)\quad \begin{cases} 0 = -1+\sum_0^n{}_i \frac{\partial z}{\partial f_i} f_i'(z), \\ 0 = \sum_0^n{}_i \frac{\partial z}{\partial f_i} f_i'(p_\varrho), \\ 0 = p_\varrho+\sum_0^n{}_i \frac{\partial z}{\partial f_i} f_i'(x_\varrho). \end{cases}$$

Wenn wir dieses System der Reihe nach mit $dz$, $dp_\varrho$, $dx_\varrho$ multipliciren und alles addiren, so ergiebt sich die identische Gleichung:

$$(11.)\quad dz-p_1dx_1-\cdots-p_ndx_n = \frac{\partial z}{\partial f_0}df_0+\frac{\partial z}{\partial f_1}df_1+\cdots+\frac{\partial z}{\partial f_n}df_n.$$

Diese Gleichung wird identisch, mag man nun auf der linken Seite für $z, p_1 \ldots p_n$ ihre Ausdrücke durch $f_0, f_1 \ldots f_n$ setzen, oder auf der rechten Seite für $f_0, f_1 \ldots f_n$ ihre Ausdrücke durch $z, p_1 \ldots p_n$.

Der Gleichung (11.) muss jede vollständige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung genügen. Es lässt sich aber auch leicht umgekehrt nachweisen, dass, wenn man $n$ von einander und von $f_0$ unabhängige Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ hat, welche die Gleichung:

$$(12.)\quad dz-p_1dx_1-\cdots-p_ndx_n = \Phi_0df_0+\Phi_1d\varphi_1+\cdots+\Phi_nd\varphi_n$$

zu einer identischen machen, die Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$, willkürlichen Constanten gleichgesetzt, eine vollständige Lösung geben.

Die Gleichung (12.) ist nämlich äquivalent mit folgendem System

$$\begin{aligned} 0 &= -1+\sum_1^n{}_i \Phi_i\varphi_i'(z) + \Phi_0f_0'(z), \\ 0 &= \sum_1^n{}_i \Phi_i\varphi_i'(p_\varrho)+\Phi_0f_0'(p_\varrho), \\ 0 &= p_\varrho+\sum_1^n{}_i \Phi_i\varphi_i'(x_\varrho)+\Phi_0f_0'(x_\varrho), \qquad \varrho = 1, 2 \ldots n. \end{aligned}$$

Andererseits aber ergiebt sich, wenn man sich wieder wie oben die Grössen $z, p_1 \ldots p_n$ durch $f_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ ausgedrückt denkt, und dann differentiirt, das System identischer Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= -1+\sum_1^n{}_i \frac{\partial z}{\partial \varphi_i}\varphi_i'(z) + \frac{\partial z}{\partial f_0}f_0'(z), \\ 0 &= \sum_1^n{}_i \frac{\partial z}{\partial \varphi_i}\varphi_i'(p_\varrho)+\frac{\partial z}{\partial f_0}f_0'(p_\varrho), \\ 0 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x_\varrho}\right)+\sum_1^n{}_i \frac{\partial z}{\partial \varphi_i}\varphi_i'(x_\varrho)+\frac{\partial z}{\partial f_0}f_0'(x_\varrho), \qquad \varrho = 1, 2 \ldots n. \end{aligned}$$

die Vergleichung dieses Systems mit dem System (13.) ergiebt:

$$\Phi_0 = \frac{\partial z}{\partial f_0}, \quad \Phi_1 = \frac{\partial z}{\partial f_1}, \quad \cdots \quad \Phi_n = \frac{\partial z}{\partial f_n},$$

$$(14.) \quad p_\varrho = \left(\frac{\partial z}{\partial x_\varrho}\right),$$

die Gleichung (14.) ist aber, wie wir oben gesehen haben, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$, Constanten gleich gesetzt, eine vollständige Lösung der Gleichung $f_0 = h_0$ werden.

## §. 3.

Ich werde nun zur Untersuchung des Zusammenhanges übergehen, der zwischen zwei verschiedenen vollständigen Lösungen der Gleichung $f_0 = h_0$ besteht. Ich will annehmen, es würden zwei solche Lösungen erhalten, wenn man respective die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ und $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ willkürlichen Constanten gleichsetzt.

Es sollen dann wie oben die Grössen $z, p_1 \ldots p_n$ ausgedrückt werden: einmal durch:

$$x_1, x_2 \ldots x_n, f_0, f_1 \ldots f_n,$$

dann durch:

$$x_1, x_2 \ldots x_n, f_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n,$$

und ich will zur Unterscheidung die beiden so erhaltenen Ausdrücke für $z$ durch $z'$ und $z''$ bezeichnen.

Wir haben dann nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen

$$(15.) \quad \begin{cases} dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_n dx_n \\ = \frac{\partial z'}{\partial f_0} df_0 + \frac{\partial z'}{\partial f_1} df_1 + \cdots + \frac{\partial z'}{\partial f_n} df_n \\ = \frac{\partial z''}{\partial f_0} df_0 + \frac{\partial z''}{\partial \varphi_1} d\varphi_1 + \cdots + \frac{\partial z''}{\partial \varphi_n} d\varphi_n. \end{cases}$$

Denkt man sich nun in $f_1, f_2 \ldots f_n$ an die Stelle von $z, p_1 \ldots p_n$ ihre Ausdrücke durch $x_1, x_2 \ldots x_n, f_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ substituirt, und bezeichnet man den Differentialquotienten von $f_\varrho$ nach $x_i$, so genommen, wie $x_i$ nach dieser Substitution noch explicite in $f_\varrho$ vorkommt, durch $[f'_\varrho(x_i)]$ und gebraucht in analogem Sinne die Zeichen: $[f'_\varrho(f_0)]$, $[f'_\varrho(\varphi_1)] \ldots [f'_\varrho(\varphi_n)]$, so erhält man:

$$df_\varrho = \Sigma_i [f'_\varrho(x_i)] dx_i + [f'_\varrho(f_0)] df_0 + \Sigma_i [f'_\varrho(\varphi_i)] d\varphi_i,$$
$$\varrho = 1, 2, \ldots n.$$

Dieser Ausdruck, in die Gleichung (15.) eingesetzt, muss dieselbe identisch

machen. Man erhält also durch Vergleichung der Coefficienten von $df_0$, $d\varphi_i$, $dx_i$

$$(16.)\quad \begin{cases} \frac{\partial z''}{\partial f_0} = \frac{\partial z'}{\partial f_0} + \Sigma_\varrho \frac{\partial z'}{\partial f_\varrho}[f_\varrho'(f_0)], \\ \frac{\partial z''}{\partial \varphi_i} = \Sigma_\varrho \frac{\partial z'}{\partial f_\varrho}[f_\varrho'(\varphi_i)], \\ 0 = \Sigma_\varrho \frac{\partial z'}{\partial f_\varrho}[f_\varrho'(x_i)]. \end{cases}$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen sind von selbst erfüllt, weil durch die hier vorausgesetzte Substitution $z'$ und $z''$ mit einander identisch werden.

Die letzte Gleichung aber ergiebt den gesuchten Zusammenhang zwischen den beiden vorliegenden Lösungen.

Da nämlich die Grössen $\frac{\partial z}{\partial f_\varrho}$ nicht identisch verschwinden können, so folgt die identische Gleichung

$$(17.)\quad \begin{vmatrix} [f_1'(x_1)][f_1'(x_2)]\dots[f_1'(x_n)] \\ [f_2'(x_1)][f_2'(x_2)]\dots[f_2'(x_n)] \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ [f_n'(x_1)][f_n'(x_2)]\dots[f_n'(x_n)] \end{vmatrix} = 0,$$

diese Gleichung sagt aus, dass zwischen den Functionen $f_1$, $f_2 \dots f_n$, nachdem in denselben $z, p_1 \dots p_n$ durch $f_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ ausgedrückt worden sind, eine identische Gleichung bestehen muss, welche von den $x_1 \dots x_n$ frei ist, also eine Gleichung von der Form:

$$(18.)\quad 0 = \Pi(f_0, f_1 \dots f_n, \varphi_1 \dots \varphi_n)$$

oder auch eine Anzahl $m$ solcher Gleichungen:

$$(19.)\quad \begin{cases} 0 = \Pi_1(f_0, f_1 \dots f_n, \varphi_1 \dots \varphi_n), \\ 0 = \Pi_2(f_0, f_1 \dots f_n, \varphi_1 \dots \varphi_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = \Pi_m(f_0, f_1 \dots f_n, \varphi_1 \dots \varphi_n), \end{cases}$$

worin $m < n$ sein muss. Zunächst ergab sich allerdings nur, dass diese Gleichungen identisch sein müssen, wenn in $f_1, f_2 \dots f_n$ $z, p_1 \dots p_2$ durch $f_0, \varphi_1 \dots \varphi_n$ ausgedrückt wurden; da aber der Voraussetzung gemäss $f_0, \varphi_1 \dots \varphi_n$ von einander unabhängige Functionen von $z, p_1 \dots p_n$ sind, so folgt, dass die Gleichungen (18.) oder (19.) auch dann noch identisch sein müssen, wenn man für $f_0, f_1 \dots f_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ ihre Ausdrücke durch $x_1$, $x_2 \dots x_n$, $z$, $p_1 \dots p_n$ einsetzt.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich nun unmittelbar das bekannte

Verfahren zur Bestimmung einer beliebigen vollständigen Lösung $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ aus einer gegebenen $f_1 \ldots f_n$.

Es folgt nämlich aus der letzten Gleichung (16.) mittelst der Gleichungen (19.):

$$(20.)\quad \begin{cases} \frac{\partial z'}{\partial f_1} = \lambda_1 \Pi_1'(f_1) + \lambda_2 \Pi_2'(f_1) + \cdots + \lambda_m \Pi_m'(f_1), \\ \frac{\partial z'}{\partial f_2} = \lambda_1 \Pi_1'(f_2) + \lambda_2 \Pi_2'(f_2) + \cdots + \lambda_m \Pi_m'(f_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z'}{\partial f_n} = \lambda_1 \Pi_1'(f_n) + \lambda_2 \Pi_2'(f_n) + \cdots + \lambda_m \Pi_m'(f_n), \end{cases}$$

welche Gleichungen zusammen mit den Gleichungen (19.) genügen, um die unbekannten Grössen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ zu bestimmen.

Hat man auf diese Weise die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ ausgedrückt durch $x_1, x_2 \ldots x_n, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$, so werden durch Substitution dieser Ausdrücke die Gleichungen (19.) identisch. Die Differentiation dieser Gleichungen ergiebt daher:

$$0 = \Pi_1'(f_1)[f_1'(\varphi_\varrho)] + \Pi_1'(f_2)[f_2'(\varphi_\varrho)] + \cdots + \Pi_1'(f_n)[f_n'(\varphi_\varrho)] + \Pi_1'(\varphi_\varrho),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \Pi_m'(f_1)[f_1'(\varphi_\varrho)] + \Pi_m'(f_2)[f_2'(\varphi_\varrho)] + \cdots + \Pi_m'(f_n)[f_n'(\varphi_\varrho)] + \Pi_m'(\varphi_\varrho).$$

Wenn man also demnach die Gleichungen (20.) der Reihe nach mit $[f_1'(\varphi_\varrho)]$, $[f_2'(\varphi_\varrho)] \ldots [f_n'(\varphi_\varrho)]$ multiplicirt und addirt, so erhält man mittelst der zweiten Gleichung (16.)

$$\frac{\partial z''}{\partial \varphi_\varrho} = -\lambda_1 \Pi_1'(\varphi_\varrho) - \lambda_2 \Pi_2'(\varphi_\varrho) - \cdots - \lambda_m \Pi_m'(\varphi_\varrho).$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form wie die Gleichungen (20.) und bestehen gleichzeitig mit denselben.

Daraus ergiebt sich der Satz: Wenn man zwischen den willkürlichen Constanten $f_1, f_2 \ldots f_n$ der vollständigen Lösung $z'$ die Relationen (19.) festsetzt, und man dadurch zu der vollständigen Lösung $z''$ gelangt, so erhält man umgekehrt aus der vollständigen Lösung $z''$ die vollständige Lösung $z'$, wenn man zwischen den Constanten der beiden vollständigen Lösungen dieselben Relationen (19.) obwalten lässt.

Zu bemerken ist aber noch, dass diese Reciprocität nicht nothwendig eine eindeutige ist. Man kann auf dem angegebenen Wege aus der vollständigen Lösung $z''$ unter Umständen neben der vollständigen Lösung $z'$ noch andere erhalten.

## § 4.

Nehmen wir nun an, es sei irgend eine Lösung der Differentialgleichung $f = k$ gefunden, so sind durch diese $z$, $p_1$, $p_2 \ldots p_n$ als Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ bestimmt. Ob diese Functionen willkürliche Constanten enthalten oder nicht, darauf kommt es vorläufig nicht an. Unter allen Umständen müssen diese Functionen folgende Eigenschaften haben: sie müssen die Gleichung $f = k$, also auch $df = 0$ identisch machen. Ferner muss, da $p_1 \ldots p_n$ die partiellen Differentialquotienten von $z$ sind:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_n dx_n$$

identisch verschwinden.

Verstehen wir also unter $f_1, f_2 \ldots f_n$ die oben definirten Functionen, welche durch Substitution der vorliegenden Lösung in Functionen der $x_1, x_2 \ldots x_n$ allein übergehen, so müssen diese Functionen vermöge der identischen Gleichung 11 § 2 der Bedingung

$$21. \qquad 0 = \frac{\partial z}{\partial f} df - \frac{\partial z}{\partial f_1} df_1 - \cdots - \frac{\partial z}{\partial f_n} df_n$$

identisch genügen.

Hierin sind die $f_1, f_2 \ldots f_n$ als Functionen der $x_1 \ldots x_n$ allein anzusehen.

Bezeichnen wir also die in diesem Sinne genommenen Differentialquotienten dieser Functionen durch $\frac{df_i}{dx_k}$, so löst sich die Gleichung (21.) in folgendes System auf:

$$22. \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial f}\frac{df}{dx_1} - \frac{\partial z}{\partial f_1}\frac{df_1}{dx_1} - \cdots - \frac{\partial z}{\partial f_n}\frac{df_n}{dx_1} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial f}\frac{df}{dx_2} - \frac{\partial z}{\partial f_1}\frac{df_1}{dx_2} - \cdots - \frac{\partial z}{\partial f_n}\frac{df_n}{dx_2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z}{\partial f}\frac{df}{dx_n} - \frac{\partial z}{\partial f_1}\frac{df_1}{dx_n} - \cdots - \frac{\partial z}{\partial f_n}\frac{df_n}{dx_n} = 0. \end{cases}$$

Dieses System gewährt die Mittel um aus einer vollständigen Lösung der Gleichung $f = k$ alle übrigen Lösungen zu finden. Vermöge der vollständigen Lösung sind nämlich die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ durch $x_1, x_2 \ldots x_n$ $z$, $p_1 \ldots p_n$ ausgedrückt. Aus dem System 22. aber ergeben sich dieselben Functionen ausgedrückt durch $x_1 \ldots x_n$ allein; daraus erhält man Gleichungen, welche zur Bestimmung der Grössen $z$, $p_1 \ldots p_n$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$ ausreichen.

Wenn wir die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ den Gleichungen (22.) gemäss bestimmt haben, so erhalten wir daraus unter allen Umständen eine Lösung. Diese Bestimmung kann aber auf verschiedene Arten geschehen. Nehmen wir zunächst an, dass die Ausdrücke $\frac{\partial z}{\partial f_1}, \frac{\partial z}{\partial f_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial f_n}$ nicht alle zugleich verschwinden, so folgt aus dem System (22.) die Gleichung:

$$(23.) \quad \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1}, & \frac{df_2}{dx_1}, & \ldots & \frac{df_n}{dx_1} \\ \frac{df_1}{dx_2}, & \frac{df_2}{dx_2}, & \ldots & \frac{df_n}{dx_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{df_1}{dx_n}, & \frac{df_2}{dx_n}, & \ldots & \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass zwischen den $f_1 \ldots f_n$, wenn dieselben als Functionen der $x_1, x_2 \ldots x_n$ allein dargestellt sind, eine oder mehrere identische Gleichungen bestehen müssen.

Diese Gleichungen, welche beliebig angenommen werden können, und deren Anzahl $m \gtreqless n$ sein muss, seien:

$$(24.) \quad \begin{cases} \Pi_1(f_1, f_2 \ldots f_n) = 0, \\ \Pi_2(f_1, f_2 \ldots f_n) = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \\ \Pi_m(f_1, f_2 \ldots f_n) = 0. \end{cases}$$

Ist $m = n$, so erhalten in Folge der Gleichungen (24.) die $f_1 \ldots f_n$ constante Werthe, und zwar, da die Functionen $\Pi_1 \ldots \Pi_m$ beliebig sind, willkürliche constante Werthe. Diese Annahme führt also zurück zu derselben vollständigen Lösung, von welcher wir ausgingen.

Ist aber $m < n$, so werden die $f_1 \ldots f_n$ als Functionen von $x$ bestimmt, nachdem man über die Functionen $\Pi_1 \ldots \Pi_m$ irgend eine willkürliche Annahme gemacht hat, mittelst der folgenden Gleichungen, die sich unmittelbar aus dem System (22.) ergeben:

$$(25.) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial f_1} = \lambda_1 \Pi_1'(f_1) + \lambda_2 \Pi_2'(f_1) + \cdots + \lambda_m \Pi_m'(f_1), \\ \frac{\partial z}{\partial f_2} = \lambda_1 \Pi_1'(f_2) + \lambda_2 \Pi_2'(f_2) + \cdots + \lambda_m \Pi_m'(f_2), \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \frac{\partial z}{\partial f_n} = \lambda_1 \Pi_1'(f_n) + \lambda_2 \Pi_2'(f_n) + \cdots + \lambda_m \Pi_m'(f_n), \end{cases}$$

welche Gleichungen zusammen mit den Gleichungen (24.) ausreichen, um die Grössen $f_1 \ldots f_n$, $\lambda_1$, $\lambda_2 \ldots \lambda_m$ als Functionen von $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ zu bestimmen.

Man kann die Bestimmung der Functionen $f$ noch auf einem etwas anderen Wege ausführen, welcher in vielen Fällen vor diesem den Vorzug verdient. Man fügt zu den Gleichungen (24.) noch die folgenden hinzu:

$$(26.) \quad \begin{cases} \Pi_{m+1}(f_1, f_2 \ldots f_n) = \xi_{m+1}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Pi_n(f_1, f_2 \ldots f_n) = \xi_n, \end{cases}$$

wo die $\Pi_{m+1} \ldots \Pi_n$ gleichfalls willkürliche Functionen, die $\xi_{m+1} \ldots \xi_n$ neue Variable bedeuten.

Denkt man sich nun die Gleichungen (24.), (26.) in Bezug auf die $f_1 \ldots f_n$ aufgelöst, so erhält man ein System Gleichungen von folgender Form:

$$(27.) \quad \begin{cases} f_1 = \psi_1(\xi_{m+1}, \xi_{m+2} \ldots \xi_n), \\ f_2 = \psi_2(\xi_{m+1}, \xi_{m+2} \ldots \xi_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n = \psi_n(\xi_{m+1}, \xi_{m+2} \ldots \xi_n). \end{cases}$$

Da die $\Pi$ willkürliche Functionen waren, so werden es auch die $\psi$ sein, und man kann sich daher auch die Aufgabe so stellen: die Grössen $\xi_{m+1} \ldots \xi_n$ als Functionen der $x_1 \ldots x_n$ so zu bestimmen, dass man aus den Gleichungen (27.) eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung erhält, d. h. so, dass die Functionen $f_1 \ldots f_n$ den Gleichungen (22.) genügen. Zu dieser Bestimmung erhält man sofort die nöthige Anzahl von Gleichungen, nachdem man über die Functionen $\psi_1 \ldots \psi_n$ sowie über die Zahl $m$ in irgend einer Weise verfügt hat, wenn man die Ausdrücke (27.) in die Gleichungen (22.) substituirt.

Es ergiebt sich daraus folgendes System von $n-m$ Gleichungen:

$$(28.) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial z}{\partial f_1}\psi_1'(\xi_{m+1}) + \frac{\partial z}{\partial f_2}\psi_2'(\xi_{m+1}) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial f_n}\psi_n'(\xi_{m+1}), \\ 0 = \frac{\partial z}{\partial f_1}\psi_1'(\xi_{m+2}) + \frac{\partial z}{\partial f_2}\psi_2'(\xi_{m+2}) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial f_n}\psi_n'(\xi_{m+2}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = \frac{\partial z}{\partial f_1}\psi_1'(\xi_n) + \frac{\partial z}{\partial f_2}\psi_2'(\xi_n) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial f_n}\psi_n'(\xi_n), \end{cases}$$

aus diesen Gleichungen sind die $\xi$ als Functionen der $x_1 \ldots x_n$ zu bestimmen.

## §. 5.

Es bleibt noch eine Möglichkeit übrig, den Gleichungen (22.) des vorigen Paragraphen zu genügen, ohne dass die Gleichung (23.) erfüllt zu sein braucht; es ist nämlich die, wenn die Functionen $f_1 \ldots f_n$ so bestimmt werden können, dass die Gleichungen:

$$(29.) \qquad \frac{\partial z}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial f_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial z}{\partial f_n} = 0$$

erfüllt werden.

Die daraus entspringende Lösung ist ganz bestimmt und enthält keine willkürlichen Functionen oder Constanten. Im Allgemeinen ist es die singuläre Lösung; es ist jedoch nicht nothwendig, dass, wenn in den Gleichungen (29.) eine Lösung enthalten ist, diese immer singulär sein muss.

Ich verstehe nämlich unter einer singulären Lösung eine Lösung von folgender Beschaffenheit:

Es sei:

$$(30.) \qquad z = \psi(x_1, x_2 \ldots x_n, f_1, f_2 \ldots f_n)$$

ein Ausdruck, welcher dadurch, dass man für $f_1, f_2 \ldots f_n$ willkürliche Constanten setzt, in eine vollständige Lösung übergeht. Man erhält daraus alle übrigen Lösungen, wenn man für die $f$ gewisse Functionen der $x$ einsetzt. Ist es nun möglich, ohne dass (30.) aufhört eine Lösung zu sein, für die $f$ solche Functionen von $x_1 \ldots x_n$ zu setzen, dass die Functionaldeterminante der $f$ nach den $x$ nicht verschwindet, so ist dies die singuläre Lösung.

Damit eine singuläre Lösung existirt, ist es nur erforderlich, dass diese Eigenschaft stattfinde für irgend ein System der Functionen $f$. Wie sich die Sache verhält, wenn man von verschiedenen vollständigen Lösungen ausgeht, darauf komme ich weiter unten zurück.

Aus dieser Definition folgt, dass die singuläre Lösung nie von einer willkürlichen Constante, also noch weniger von einer willkürlichen Function abhängen kann. Denn aus den Gleichungen (22.) ergiebt sich, dass für die singuläre Lösung jederzeit die Gleichungen (29.) erfüllt sein müssen. Wenn nun auch diese Gleichungen zu solchen Werthen von $f_1 \ldots f_n$ führen können, die eine willkürliche Constante $c$ enthalten, was etwa dadurch geschehen könnte, dass die Gleichungen (29.) gemeinschaftliche Factoren haben, so muss sich diese Constante aus der Verbindung, in welcher die $f$ in $z$ enthalten sind, herausheben, denn durch Differentiation nach dieser willkürlichen Constanten

erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial c} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial c} = 0.$$

Daraus ergiebt sich auch, dass eine Differentialgleichung, in welcher die unabhängige Variable selbst nicht vorkommt, keine singuläre Lösung haben kann, denn zu jeder beliebigen Lösung einer solchen Gleichung kann immer eine additive Constante hinzugefügt werden, ohne dass sie aufhört eine Lösung zu sein: deshalb schliesse ich solche Gleichungen ganz von der Betrachtung aus.

## §. 6.

Die singuläre Auflösung einer partiellen Differentialgleichung, die ich im vorigen Paragraphen definirt habe, hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie immer aus der gegebenen Differentialgleichung selbst, ohne Kenntniss der vollständigen Lösung durch Differentiation gefunden werden kann, und zwar auf folgende Weise:

Wenn man in die gegebene Differentialgleichung

$$f(z, x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = h_0$$

irgend eine Lösung substituirt, so muss dieselbe identisch erfüllt sein. Setzt man also zur Abkürzung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\varrho \partial x_\sigma} = p_{\varrho\sigma},$$

so müssen auch noch die durch Differentiation der gegebenen Gleichung erhaltenen Gleichungen identisch erfüllt sein, nämlich:

$$(31.)\quad \begin{cases} f_0(z, p_1) - f_0(x_1) + \Sigma_k f_0'(p_k) p_{k1} = 0, \\ f_0(z, p_2) - f_0(x_2) + \Sigma_k f_0'(p_k) p_{k2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_0(z, p_n) - f_0(x_n) + \Sigma_k f_0'(p_k) p_{kn} = 0. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun wieder mit $f_1, f_2 \ldots f_n$ solche Functionen von $z, x_1, x_2 \ldots x_n$, $p_1, p_2 \ldots p_n$, welche willkürlichen Constanten gleichgesetzt, eine vollständige Lösung ergeben, so müssen diese wegen der Bedingungen (8.) §. 2 folgende Gleichungen identisch erfüllen:

$$(32.)\quad \Sigma_k f_0(p_k)\{f_\varrho(x_k) + p_k f_\varrho(z)\} - f_\varrho(p_k)\{f_0(x_k) + p_k f_0(z)\} = 0, \qquad \varrho = 1, 2, \ldots n,$$

und wenn man nun in (31.) für $f_0(x_k) + p_k f_0(z)$ die Werthe in (32.) substituirt,

so ergiebt sich folgendes System

$$(33.)\qquad \left\{\sum_1^n{}_i f_0'(p_i)\{f_\varrho'(x_i)+p_i f_\varrho'(z)+\Sigma_h f_\varrho'(p_h)p_{hi}\} = 0, \quad \varrho = 1, 2, \ldots n\right.$$

welches System durch Substitution irgend einer Lösung identisch werden muss.

Es ist aber:

$$f_\varrho'(x_i)+p_i f_\varrho'(z)+\Sigma_h f_\varrho'(p_h)p_{hi} = \frac{df_\varrho}{dx_i},$$

wonach das System (33.) in folgendes übergeht:

$$(34.)\qquad \begin{cases} f_0'(p_1)\frac{df_1}{dx_1}+f_0'(p_2)\frac{df_1}{dx_2}+\cdots+f_0'(p_n)\frac{df_1}{dx_n} = 0, \\ f_0'(p_1)\frac{df_2}{dx_1}+f_0'(p_2)\frac{df_2}{dx_2}+\cdots+f_0'(p_n)\frac{df_2}{dx_n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_0'(p_1)\frac{df_n}{dx_1}+f_0'(p_2)\frac{df_n}{dx_2}+\cdots+f_0'(p_n)\frac{df_n}{dx_n} = 0. \end{cases}$$

War also die Lösung, welche wir substituirt haben, eine singuläre, dann giebt es ein System von Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ der Art, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1}, & \frac{df_1}{dx_2}, & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1}, & \frac{df_2}{dx_2}, & \cdots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{df_n}{dx_1}, & \frac{df_n}{dx_2}, & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Es folgt dann aus den Gleichungen (34.), dass für die singuläre Lösung die Gleichungen

$$(35.)\qquad f_0'(p_1) = 0, \quad f_0'(p_2) = 0, \quad \ldots \quad f_0'(p_n) = 0$$

erfüllt sein müssen.

Die Aufsuchung der singulären Lösung ist also auf die algebraische Aufgabe zurückgeführt, aus den Gleichungen (35.) die Werthe von $p_1, p_2 \ldots p_n$ zu bestimmen, dieselben in die gegebene Gleichung $f_0 = k_0$ zu substituiren, und daraus den Werth von $z$ zu ermitteln. Die nächste Bedingung der Existenz einer singulären Lösung ist also die, dass dieses Verfahren überhaupt zu einer Lösung führt, mit andern Worten, dass die auf die angedeutete Weise bestimmten Werthe von $p_1 \ldots p_n$, $z$ den Gleichungen genügen

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n.$$

Diese Bedingung kann auch noch anders ausgedrückt werden:

Denkt man sich auf die angegebene Weise $z$, $p_1$, $p_2 \ldots p_n$ bestimmt und diese Werthe in die Gleichung $f_0 = h_0$ substituirt, so wird dieselbe identisch, und durch Differentiation derselben erhält man:

$$f_0'(x_\varrho) + \frac{\partial z}{\partial x_\varrho} f_0'(z) = 0,$$

da aber $\frac{\partial z}{\partial x_\varrho} = p_\varrho$ sein soll, so muss auch

$$(36.) \qquad f_0'(x_\varrho) + p_\varrho f_0'(z) = 0$$

sein. Diese Gleichung braucht zunächst nur erfüllt zu sein durch Substitution der Werthe von $p_1 \ldots p_n$, $z$; da aber der Werth von $z$ die willkürliche Constante $h_0$ enthält, welche explicite weder in den Gleichungen (35.) noch in den Gleichungen (36.) vorkommt, so folgt, dass die Gleichung (36.) erfüllt sein muss, wenn man nur aus (35.) die Werthe der $p_1 \ldots p_n$ einsetzt. Umgekehrt wenn die Gleichungen (35.), (36.) für irgend ein System von Werthen der $p$ erfüllt sind, so ergiebt dieses System eine Lösung der Gleichung, vorausgesetzt, dass nicht für dasselbe System $f_0'(z)$ verschwindet, denn aus (36.) und der vorangehenden Gleichung folgt:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_\varrho} - p_\varrho\right) f_0'(z) = 0,$$

also $\frac{\partial z}{\partial x_\varrho} = p_\varrho$. Verschwindet aber $f_0'(z)$ für das den Gleichungen (35.) und (36.) genügende Werthsystem der $p$, dann kommt nach dessen Substitution $z$ in der Function $f_0$ gar nicht mehr vor, und die Gleichung $f_0 = h_0$ kann nicht mehr befriedigt werden.

Man erhält also, vorausgesetzt, dass eine singuläre Lösung existirt, dieselbe dadurch, dass man ein System von Werthen der $p$ aufsucht, welches die Gleichungen (35.), (36.) befriedigt, und dies in die gegebene Gleichung $f_0 = h_0$ einsetzt. Existirt kein solches System, so kann man sicher sein, dass auch keine singuläre Lösung existirt.

Eine weit schwierigere Frage ist aber die umgekehrte, ob nämlich eine auf diese Weise bestimmte Lösung wirklich singulär ist, oder ob sie nur particulär ist. Ich komme auf diese Frage weiter unten noch eingehender zurück, und werde, wenigstens für eine gewisse Classe von Gleichungen nachweisen, dass diese Lösung wirklich singulär ist.

Das Resultat, zu welchem wir gelangt sind, dass nämlich die singuläre Lösung immer durch Differentiation der gegebenen Differentialgleichung nach

den Differentialquotienten erhalten wird, könnte paradox erscheinen, da offenbar viele Formen von Differentialgleichungen denkbar sind, bei denen die Differentialquotienten nach den $p$ unmöglich alle verschwinden können, und die gleichwohl singuläre Lösungen zulassen, z. B. wenn eine oder einige der Grössen $p$ nur linear in der Gleichung vorkommen. Dieser scheinbare Widerspruch hebt sich aber, wenn man die Annahme beachtet, dass in der Differentialgleichung der willkürliche Parameter $h_0$ abgesondert sei, und dass die Richtigkeit der angestellten Betrachtungen wesentlich auf der Willkürlichkeit dieses Parameters beruht. Es ist also auch nur von solchen singulären Lösungen die Rede, welche für alle Werthe dieses Parameters singulär bleiben, während auch solche Fälle möglich sind, dass gewisse Lösungen nur für specielle Werthe des Parameters überhaupt Lösungen, oder wenigstens singuläre Lösungen sind. Das Beispiel der linearen partiellen Differentialgleichungen ist sehr geeignet, diesen Umstand ins Licht zu setzen. Um die singuläre Lösung einer solchen Gleichung zu bestimmen, hat *Jacobi* ein Mittel angegeben (Bd. 27, p. 239 dieses Journals). Setzt man aber auf der rechten Seite einer solchen Gleichung an die Stelle von Null die willkürliche Grösse $h_0$, so gelangt man durch die *Jacobi*sche Methode zu einem von $h_0$ ganz unabhängigen Ausdruck, der also offenbar nur für einen speciellen Werth von $h_0$ eine Lösung sein kann.

Ich werde daher im Folgenden noch einen anderen Weg zur Behandlung der Frage nach den singulären Lösungen einschlagen, worin die Beschränkung, die in der Annahme des willkürlichen Parameters liegt, aufgegeben wird, freilich nur durch die Annahme einer anderen speciellen Form der Differentialgleichung.

## §. 7.

In den folgenden Untersuchungen gehe ich von der Annahme aus, dass die gegebene Differentialgleichung in Bezug auf die unabhängige Variable $z$ aufgelöst sei, was, da unserer früheren Annahme zufolge $z$ in der Differentialgleichung nicht fehlen soll, jederzeit geschehen kann.

Es sei also die gegebene Differentialgleichung:

$$(1.) \qquad z = \psi(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n).$$

Ich will ferner annehmen, in den folgenden Gleichungen sei eine vollständige Lösung enthalten:

$$(2.)\quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = c_1, \\ f_2(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = c_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = c_n. \end{cases}$$

Auf diese Form kann jede vollständige Lösung gebracht werden, denn wenn man auch eine vollständige Lösung hätte, welche $z$ noch enthielte, so könnte man immer durch Substitution des Ausdrucks für $z$, aus der gegebenen Differentialgleichung dasselbe aus den Gleichungen der vollständigen Lösung entfernen. Von den Gleichungen (2.) wird die Eigenschaft vorausgesetzt, dass sie in Bezug auf die $p$ auflösbar seien, dass also die beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} f_1'(p_1), & f_1'(p_2), & \ldots & f_1'(p_n) \\ f_2'(p_1), & f_2'(p_2), & \ldots & f_2'(p_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n'(p_1), & f_n'(p_2), & \ldots & f_n'(p_n) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial c_1}, & \frac{\partial p_1}{\partial c_2}, & \ldots & \frac{\partial p_1}{\partial c_n} \\ \frac{\partial p_2}{\partial c_1}, & \frac{\partial p_2}{\partial c_2}, & \ldots & \frac{\partial p_2}{\partial c_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial p_n}{\partial c_1}, & \frac{\partial p_n}{\partial c_2}, & \ldots & \frac{\partial p_n}{\partial c_n} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinden. Die andern Bedingungen für die Functionen $f$, welche den Bedingungen (8.) im §. 2 entsprechen, und die aus jenen sofort abgeschrieben werden können, lauten hier:

$$(3.)\quad \begin{cases} \sum_i \{\psi'(p_i) f_\varrho'(x_i) - f_\varrho'(p_i)(\psi'(x_i) - p_i)\} = 0, \\ \sum_i \{f_\varrho'(x_i) f_\sigma'(p_i) - f_\sigma'(x_i) f_\varrho'(p_i)\} = 0. \end{cases}$$

Wiewohl hier in der gegebenen Differentialgleichung der willkürliche Parameter $h_0$ nicht vorkommt, so müssen die Gleichungen (3.) doch identisch erfüllt sein, weil hier statt des willkürlichen Parameters in der Gleichung (1.) die Grösse $z$ auftritt, welche in den Gleichungen (3.) nicht vorkommt, so dass die Gleichung (1.) nichts zur Erfüllung der Gleichungen (3.) beitragen kann. Daraus ergiebt sich sofort:

Wenn $z$ irgend eine Lösung der Gleichung $z - \psi = 0$ ist, so ist $z - h_0$ eine Lösung der Gleichung $z - \psi = h_0$.

Ferner:

Die Gleichungen (2.) können ebensowohl als vollständige Lösung der Gleichung $z - \psi = 0$, wie der Gleichung $z - \psi = h_0$ angesehen werden.

Wenn wir aber, um von einer vollständigen Lösung zu einer beliebigen anderen überzugehen, die $f$ als Functionen der $x$ allein bestimmen, nach den

Methoden des §. 4, so ist auch diese Bestimmung dieselbe, ob wir die Gleichung $z-\psi=0$ oder die Gleichung $z-\psi=h_0$ zu Grunde legen, und daraus folgt:

Wenn $z$ eine singuläre Lösung der Gleichung $z-\psi=0$ ist, so ist $z-h_0$ eine singuläre Lösung der Gleichung $z-\psi=h_0$.

Diese Bemerkungen setzen uns in den Stand, die früher gefundenen Resultate unmittelbar auf die Gleichung (1.) anzuwenden.

Wenn die Gleichung (1.) eine singuläre Lösung besitzt, so muss dieselbe enthalten sein in den Gleichungen:

$$(4.) \qquad \psi'(p_1)=0, \quad \psi'(p_2)=0, \quad \ldots \quad \psi'(p_n)=0,$$

und die Bedingung dafür, dass in den Gleichungen (4.) überhaupt eine Lösung der Gleichung (1.) enthalten ist, nimmt hier die Form an, dass es ein System der $p$ giebt, welches gleichzeitig die Gleichungen (4.) und die Gleichungen

$$(5.) \qquad \begin{cases} p_1-\psi'(x_1) = 0, \\ p_2-\psi'(x_2) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_n-\psi'(x_n) = 0 \end{cases}$$

befriedigt. Diese Bedingung ist hier nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend, weil hier $f_0'(z)=1$ ist.

Es folgen aber aus den Gleichungen (4.), (5.) eine Reihe von andern Bedingungen, die ich, weil ich später von ihnen Gebrauch machen muss, hier ableiten werde.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial p_\varrho}{\partial x_\sigma} = p_{\varrho\sigma},$$

wo unter $p_\varrho$ die den Gleichungen (4.), (5.) gemäss bestimmten Functionen zu verstehen sind, so muss:

$$p_{\varrho\sigma} = p_{\sigma\varrho}$$

werden.

Differentiirt man also die Gleichungen (4.) in Bezug auf $x_h$, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\psi''(p_\varrho x_h)+\Sigma_i\psi''(p_\varrho p_i)p_{ih} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\psi''(p_\sigma p_h)$ und summirt in Bezug auf $h$, so erhält man:

$$\Sigma_h\psi''(p_\sigma p_h)\psi''(p_\varrho x_h) = -\Sigma_i\Sigma_h\psi''(p_\varrho p_i)\psi''(p_\sigma p_h)p_{ih}.$$

Die rechte Seite ändert sich nicht durch Vertauschung der Indices $\varrho$ und $\sigma$; es muss also auch die linke Seite ungeändert bleiben, und daraus schliesst man die erste der oben erwähnten Bedingungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Sigma_h\{\psi''(p_\sigma p_h)\psi''(p_\varrho x_h)-\psi''(p_\varrho p_h)\psi''(p_\sigma x_h)\} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varrho = 1, 2, \ldots n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma = 1, 2, \ldots n. \end{cases}$$

Die zweite Bedingung erhält man in ähnlicher Weise aus den Gleichungen (5.); diese ergeben nämlich durch Differentiation nach $x_\sigma$ und $x_\varrho$:

$$(7.)\quad \begin{cases} p_{\varrho\sigma}-\psi''(x_\varrho x_\sigma) = \Sigma_h\psi''(x_\varrho p_h)p_{h\sigma}, \\ p_{\sigma\varrho}-\psi''(x_\sigma x_\varrho) = \Sigma_h\psi''(x_\sigma p_h)p_{h\varrho}. \end{cases}$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab, so erhält man:

$$0 = \Sigma_h\{\psi''(x_\varrho p_h)p_{h\sigma}-\psi''(x_\sigma p_h)p_{h\varrho}\},$$

und wenn man hierin für $p_{h\sigma}$ und $p_{h\varrho}$, oder was dasselbe ist, für $p_{\sigma h}$ und $p_{\varrho h}$ aus (7.) ihre Werthe einsetzt:

$$\Sigma_h\{\psi''(x_\varrho p_h)\psi''(x_h x_\sigma)-\psi''(x_\sigma p_h)\psi''(x_h x_\varrho)\}$$
$$= -\Sigma_h\Sigma_i\{\psi''(x_\varrho p_h)\psi''(x_\sigma p_i)p_{hi}-\psi''(x_\sigma p_h)\psi''(x_\varrho p_i)p_{ih}\}.$$

Die letzte Doppelsumme aber verschwindet identisch, so dass man die gesuchte Bedingung erhält:

$$(8.)\quad \Sigma_h\{\psi''(x_\varrho p_h)\psi''(x_h x_\sigma)-\psi''(x_\sigma p_h)\psi''(x_h x_\varrho)\} = 0.$$

Die letzte Bedingung dieser Art erhält man durch die Combination der Gleichungen (4.) und (5.) nämlich durch Elimination der $p_{\varrho\sigma}$ aus den beiden Gleichungen:

$$(9.)\quad \begin{cases} \psi''(p_h x_\varrho)+\Sigma_i\psi''(p_h p_i)p_{i\varrho} = 0, \\ \psi''(x_h x_\varrho)+\Sigma_i\psi''(x_h p_i)p_{i\varrho} = p_{h\varrho}. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit $\psi''(p_\sigma x_h)$ und $\psi''(p_\sigma p_h)$, zieht beide von einander ab, und summirt in Bezug auf $h$, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung (6.)

$$\Sigma_h\{\psi''(x_\varrho p_h)\psi''(p_\sigma x_h)-\psi''(x_\varrho x_h)\psi''(p_\sigma p_h)\} = -\Sigma_h\psi''(p_\sigma p_h)p_{h\varrho}$$

oder wegen der ersten Gleichung (9.)

$$(10.)\quad \begin{cases} \psi''(p_\sigma x_\varrho) = \Sigma_h\{\psi''(x_\varrho p_h)\psi''(p_\sigma x_h)-\psi''(x_\varrho x_h)\psi''(p_\sigma p_h)\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varrho = 1, 2, \ldots n, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma = 1, 2, \ldots n. \end{cases}$$

Die Gleichungen (6.), (8.), (10.) sind die drei Klassen der oben erwähnten Bedingungen, welche identisch erfüllt sein müssen, wenn man für die $p$ solche Functionen der $x$ setzt, welche den Gleichungen (4.), (5.) gleichzeitig genügen, die also immer erfüllt sein müssen, wenn die $p$ die Differentialquotienten einer singulären Lösung sind.

## §. 8.

Ehe ich auf eine genauere Untersuchung der in den Gleichungen (4.), (5.) enthaltenen Lösung eingehe, ist es erforderlich, einige allgemeine Betrachtungen über die Beziehungen der verschiedenen Lösungen überhaupt voraus zu schicken.

Wenn irgend eine vollständige Lösung der gegebenen Differentialgleichung bekannt ist, die ich jetzt in der Form schreiben will:

$$(1.) \qquad z = \chi(x_1, x_2 \ldots x_n, c_1, c_2 \ldots c_n),$$

worin $c_1$, $c_2 \ldots c_n$ die willkürlichen Constanten bedeuten, so erhält man daraus alle anderen Lösungen dadurch, dass man an die Stelle der $c$ nach den früher angegebenen Methoden bestimmte Functionen von $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ setzt. Diese Functionen, welche ich jetzt zum Unterschied von den Constanten mit $\gamma_1$, $\gamma_2 \ldots \gamma_n$ bezeichnen will, genügen nach §. 4 den folgenden Gleichungen identisch:

$$(2.) \qquad \chi'(\gamma_1)\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_i} + \chi'(\gamma_2)\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_i} + \cdots + \chi'(\gamma_n)\frac{\partial \gamma_n}{\partial x_i} = 0.$$

Daraus geht hervor, dass die Differentialquotienten $p_1$, $p_2 \ldots p_n$ sowohl für die vollständige Lösung (1.) als auch für jede andere Lösung den Ausdruck haben:

$$(3.) \qquad p_1 = \chi'(x_1), \quad p = \chi'(x_2), \quad \ldots \quad p_n = \chi'(x_n)$$

nur mit dem Unterschied, dass bei der vollständigen Lösung die $c$ als Constante zu betrachten sind, während bei der anderen Lösung an deren Stelle die Functionen $\gamma_1$, $\gamma_2 \ldots \gamma_n$ zu setzen sind.

Betrachtet man nun irgend ein System von Werthen der unabhängigen Variablen, $x_1^0$, $x_2^0 \ldots x_n^0$ und setzt man für die willkürlichen Constanten der vollständigen Lösung:

$$c_1 = \gamma_1^0, \quad c_2 = \gamma_2^0, \quad \ldots \quad c_n = \gamma_n^0,$$

wo $\gamma_1^0$, $\gamma_2^0 \ldots \gamma_n^0$ die Werthe der Functionen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ für $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$ $x_n = x_n^0$ bedeuten, so hat man dadurch eine bestimmte Lösung aus dem System vollständiger Lösungen (1.) festgesetzt, welche die Eigenschaft hat, dass für das

Werthsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ nicht nur die Werthe von $z$, sondern auch die Werthe von $p_1, p_2 \ldots p_n$ für die beiden Lösungen

$$z = \chi(x_1, x_2 \ldots x_n, \gamma_1 \ldots \gamma_n) \quad \text{und} \quad z = \chi(x_1, x_2 \ldots x_n, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n)$$

übereinstimmen.

Daraus entspringt der Satz:

Wenn man irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung hat, so stimmen für jedes Werthsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Werthe von $z$, $p_1$, $p_2 \ldots p_n$ für die vorliegende Lösung und unendlich viele andere Lösungen überein. Insbesondere wird unter jedem System vollständiger Lösungen immer ein Individuum angetroffen werden, welches für ein beliebiges Werthsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ mit der gerade vorliegenden Lösung die Werthe von $z$, $p_1 \ldots p_n$ gemein hat.

## §. 9.

Auf diesen Satz gestützt werde ich nun die Eigenschaften der in den Gleichungen:

$$\begin{aligned} &1. \quad z = \psi(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n), \\ &2. \quad \psi'(p_1) = 0, \quad \psi'(p_2) = 0, \quad \ldots \quad \psi'(p_n) = 0, \\ &3. \quad p_1 - \psi'(x_1) = 0, \quad p_2 - \psi'(x_2) = 0, \quad \ldots \quad p_n - \psi'(x_n) = 0, \end{aligned}$$

enthaltenen Lösung eingehender untersuchen. Diese Lösung, deren Existenz also hier vorausgesetzt wird, hat dem vorigen Paragraphen zufolge die Eigenschaft, dass es für jedes Werthsystem $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, $\ldots$ $x_n = \xi_n$ unendlich viele andere Lösungen giebt, welche mit ihr die Werthe von $z$, $p_1 \ldots p_n$ gemein haben. Diese gemeinschaftlichen Werthe will ich mit $\zeta$, $\pi_1$, $\pi_2 \ldots \pi_n$ bezeichnen, so dass diese Grössen, als Functionen von $\xi_1$, $\xi_2 \ldots \xi_n$ angesehen, den Gleichungen identisch genügen:

$$\begin{aligned} &4. \quad \zeta = \psi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n, \pi_1, \pi_2 \ldots \pi_n), \\ &5. \quad \psi'(\pi_1) = 0, \quad \psi'(\pi_2) = 0, \quad \ldots \quad \psi'(\pi_n) = 0, \\ &6. \quad \pi_1 - \psi'(\xi_1) = 0, \quad \pi_2 - \psi'(\xi_2) = 0, \quad \ldots \quad \pi_n - \psi'(\xi_n) = 0. \end{aligned}$$

Ich setze nun wieder zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \pi_\varrho}{\partial \xi_\sigma} = \pi_{\varrho\sigma}, \quad \frac{\partial p_\varrho}{\partial x_\sigma} = p_{\varrho\sigma}$$

und will nun untersuchen, welche Werthe die Grössen $p_{\varrho\sigma}$ annehmen können,

wenn man darin

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad \ldots \quad x_n = \xi_n$$

setzt.

Die Grössen $p_1, p_2 \ldots p_n$ genügen der Gleichung (4.) identisch. Wenn man dieselben daher nach einander in Bezug auf $x_\varrho$ und $x_\sigma$ differentiirt, und nach der Differentiation für $x_1, x_2 \ldots x_n$, $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ setzt, so erhält man, weil durch diese Substitution $z$ in $\zeta$, $p_1$ in $\pi_1, \ldots p_n$ in $\pi_n$ übergehen, mit Rücksicht auf (6.)

$$(7.) \quad \begin{cases} p_{\varrho\sigma} = \psi''(\xi_\varrho, \xi_\sigma) + \Sigma_h \psi''(\xi_\varrho, \pi_h) p_{h\sigma} \\ + \Sigma_h \psi''(\xi_\sigma, \pi_h) p_{h\varrho} + \Sigma_h \Sigma_i \psi''(\pi_h, \pi_i) p_{h\varrho} p_{i\sigma}; \end{cases}$$

die Grössen $\pi_{\varrho\sigma}$ dagegen genügen in Folge der Gleichungen (6.) den Gleichungen:

$$(8.) \quad \begin{cases} \pi_{\varrho\sigma} = \psi''(\xi_\varrho, \xi_\sigma) + \Sigma_h \psi''(\xi_\varrho, \pi_h) \pi_{h\sigma}, \\ 0 = \psi''(\xi_\varrho, \pi_\sigma) + \Sigma_h \psi''(\pi_\sigma, \pi_h) \pi_{h\varrho}. \end{cases}$$

Den Gleichungen (7.) müssen alle zweiten Differentialquotienten $p_{\varrho\sigma}$ für das Werthsystem $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ genügen, welche solchen Lösungen angehören, für die gleichzeitig $z = \zeta$, $p_1 = \pi_1$, $p_2 = \pi_2$, $\ldots$ $p_n = \pi_n$ wird.

Umgekehrt wird man aber auch schliessen können, wenn man irgend ein Werthsystem der $p_{\varrho\sigma}$ gefunden hat, welches den Gleichungen (7.) genügt, dass dieses Werthsystem als das System der zweiten partiellen Differentialquotienten irgend einer Lösung für $(x_1, x_2 \ldots x_n) = (\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$ angesehen werden kann, für welche Lösung gleichzeitig $z = \zeta$, $p_1 = \pi_1$, $\ldots$ $p_n = \pi_n$ wird. Denn in der gegebenen Differentialgleichung ist durchaus keine andere Beschränkung für dies System der zweiten Differentialquotienten enthalten, als die durch die Gleichung (7.) dargestellte (weil die Bedingung (7.) die Bedingung $p_{\varrho\sigma} = p_{\sigma\varrho}$ schon involvirt). Da aber der Inbegriff aller Lösungen der Differentialgleichung denselben Umfang haben muss, wie die Differentialgleichung selbst, so folgt, dass unter den Lösungen immer solche getroffen werden müssen, welche für ein gegebenes Werthsystem:

$$\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$$

irgend ein mit der Differentialgleichung verträgliches Werthsystem von

$$z, p_1, p_2 \ldots p_n, p_{11}, p_{12} \ldots p_{nn}$$

ergeben.

Es ist daher zunächst erforderlich, die Gleichungen (7.) auf eine über-

sichtlichere Form zu bringen, aus welcher auf die Eigenschaften der ihnen genügenden Werthe von $p_{\varrho\sigma}$ geschlossen werden kann.

Hier ist es nun aber nothwendig, eine beschränkende Voraussetzung über die gegebene Differentialgleichung zu machen, welche ich während der folgenden Untersuchung festhalten muss. Diese Voraussetzung ist die, dass die Determinante:

$$(9.)\qquad \begin{vmatrix} \psi''(p_1,p_1), & \psi''(p_1,p_2), & \dots & \psi''(p_1,p_n) \\ \psi''(p_2,p_1), & \psi''(p_2,p_2), & \dots & \psi''(p_2,p_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi''(p_n,p_1), & \psi''(p_n,p_2), & \dots & \psi''(p_n,p_n) \end{vmatrix}$$

weder identisch verschwinde, noch auch durch Einsetzen der Werthe von $p_1 \dots p_n$ aus den Gleichungen (5.); und ferner dass auch keine der Grössen $\psi''(p_\varrho, p_\sigma)$ durch Einsetzen der Werthe von $p_1$, $p_2 \dots p_n$ aus den Gleichungen (5.) unendlich werde. Ueber die Natur und den Umfang der dadurch ausgeschlossenen Fälle werde ich später noch Einiges anführen. Unter dieser Voraussetzung also werde ich jetzt zunächst die Gleichung (7.) umformen.

Ich führe zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein:

$$(10.)\qquad \begin{cases} v_{\varrho\sigma} = -p_{\varrho\sigma} + \psi''(\xi_\varrho, \xi_\sigma) + \Sigma_h \psi''(\xi_\varrho, \pi_h) p_{h\sigma}, \\ u_{\varrho\sigma} = \psi''(\xi_\sigma, \pi_\varrho) + \Sigma_h \psi''(\pi_\varrho, \pi_h) p_{h\sigma}, \end{cases}$$

so dass die Gleichung (7.) die Form annimmt:

$$(11.)\qquad v_{\varrho\sigma} + \Sigma_h p_{h\varrho} u_{h\sigma} = 0.$$

Zwischen den Grössen $v_{\varrho\sigma}$ und $u_{\varrho\sigma}$ bestehen nun gewisse identische Gleichungen, welche sich aus den im §. 7 abgeleiteten Bedingungen (6.), (8.), (10.) ergeben. Multiplicirt man nämlich die erste Gleichung (10.) mit $\psi''(\pi_\varrho, \pi_\lambda)$, die zweite mit $\psi''(\xi_\varrho, \pi_\lambda)$, zieht beide von einander ab und summirt in Bezug auf $\varrho$, so erhält man mit Rücksicht auf (6.), (10.) des §. 7:

$$\Sigma_\varrho \{ v_{\varrho\sigma} \psi''(\pi_\varrho, \pi_\lambda) - u_{\varrho\sigma} \psi''(\xi_\varrho, \pi_\lambda) \}$$
$$= -\Sigma_\varrho p_{\varrho\sigma} \psi''(\pi_\varrho, \pi_\lambda) - \psi''(\xi_\sigma, \pi_\lambda)$$

oder wegen der zweiten Gleichung (10.)

$$(12.)\qquad \Sigma_\varrho v_{\varrho\sigma} \psi''(\pi_\varrho, \pi_\lambda) = \Sigma_\varrho u_{\varrho\sigma} \psi''(\xi_\varrho, \pi_\lambda) - u_{\lambda\sigma}.$$

Mittelst dieser Relation nimmt die Gleichung (11.) eine höchst einfache Gestalt an. Multiplicirt man dieselbe nämlich mit $\psi''(\pi_\varrho, \pi_\lambda)$ und summirt in Bezug auf $\varrho$, so erhält man

$$\Sigma_h \Sigma_\varrho u_{h\sigma} \psi''(\pi_\varrho, \pi_\lambda) p_{h\varrho} + \Sigma_\varrho u_{\varrho\sigma} \psi''(\xi_\varrho, \pi_\lambda) - u_{\lambda\sigma} = 0.$$

Ersetzt man in der zweiten Summe $\varrho$ durch $k$, so ergiebt sich schliesslich wegen der zweiten Gleichung (10.)

$$(13.) \qquad \Sigma_k u_{k\sigma} u_{\lambda k} = u_{\lambda\sigma}.$$

Diese Gleichungen ersetzen vollständig die Gleichungen (7.), von denen wir ausgingen, was unmittelbar aus der Voraussetzung folgt, dass die Determinante (3.) nicht verschwinden und nicht unendlich werden soll.

Die Gleichungen (13.) repräsentiren ein System von $n^2$ quadratischen Gleichungen, aus dem die $n^2$ unbekannten Grössen $u_{\varrho\sigma}$ auf algebraischem Wege zu bestimmen sind. Die Grössen $u_{\varrho\sigma}$ sind ihrerseits wieder lineare Functionen der eigentlich gesuchten Grössen $p_{\varrho\sigma}$.

Die vollständige Auflösung der Gleichungen (13.) ist ein nicht uninteressantes algebraisches Problem. Es liegt in der Natur der Sache, dass die Anzahl der Auflösungen unendlich sein muss, es scheint aber, dass sich die verschiedenen Lösungen in gewisse Gruppen zertheilen, nach der Anzahl der zwischen den $u_{\varrho\sigma}$ sich ergebenden Relationen, welche Gruppen den Classen der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung analog sind. Mir kommt es hier aber nur auf die Kenntniss von zwei bestimmten Lösungen an: die erste dieser Lösungen ist:

$$u_{\varrho\sigma} = 0, \qquad \varrho = 1, 2 \ldots n, \qquad \sigma = 1, 2 \ldots n,$$

woraus sich ergiebt:

$$p_{\varrho\sigma} = \pi_{\varrho\sigma}.$$

Die andere Lösung, von der ich Gebrauch machen will, ist gleichfalls eine ganz bestimmte, und ergiebt sich auf folgendem Wege:

Bildet man die Determinante $D$ der Grössen $u_{\varrho\sigma}$ aus den Gleichungen (13.), so ergiebt sich unmittelbar:

$$D = D^2,$$

also:

$$D = 0 \quad \text{oder} \quad D = 1.$$

Die Annahme $D = 1$ führt zu einer ganz bestimmten Auflösung, die man sofort erkennt, wenn man die Gleichungen (13.) in der Form schreibt:

$$\begin{aligned}
&u_{11}(u_{11}-1) + u_{12}u_{21} + \cdots + u_{1n}u_{n1} = 0,\\
&u_{21}(u_{11}-1) + u_{22}u_{21} + \cdots + u_{2n}u_{n1} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_{n1}(u_{11}-1) + u_{n2}u_{21} + \cdots + u_{nn}u_{n1} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Daraus ersieht man, dass wenn $D = 1$ ist:

$$(14.) \qquad u_{\varrho\sigma} = 0, \quad u_{\varrho\varrho} = 1$$

sein muss, wo im ersten Fall für $\varrho$ und $\sigma$ nur verschiedene Indices zu setzen sind.

Alle andern Annahmen führen nur zu gewissen Relationen zwischen den $u_{\varrho\sigma}$, nicht zu bestimmten Werthen derselben.

## §. 10.

Die zuletzt entwickelten Resultate führen nun zu dem Beweis, dass unter den hier gemachten Voraussetzungen die in den Gleichungen (5.) enthaltene Lösung immer eine singuläre ist.

Aus den Gleichungen (14.) folgt, dass es für jedes Werthsystem $\xi_1$, $\xi_2 \ldots \xi_n$ eine oder mehrere Lösungen giebt, welche den Gleichungen genügt:

$$(15.) \qquad \begin{cases} z = \zeta, \; p_1 = \pi_1, \; \ldots \; p_n = \pi_n, \\ 0 = \psi''(x_\sigma, p_\varrho) + \Sigma_h \psi''(p_\varrho, p_h) p_{h\sigma}, \\ 1 = \psi''(x_\sigma, p_\sigma) + \Sigma_h \psi''(p_\sigma, p_h) p_{h\sigma}, \end{cases}$$

wenn darin an die Stelle von $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ gesetzt wird $\xi_1$, $\xi_2 \ldots \xi_n$. Sollte es mehrere solcher Lösungen geben, so ziehe ich für jedes System $\xi_1$, $\xi_2 \ldots \xi_n$ nur eine derselben in Betracht und untersuche nun den Complex dieser Lösungen für alle Werthe $\xi_1$, $\xi_2 \ldots \xi_n$. Dieser Complex bildet ein System von Lösungen, welches höchstens von $n$ willkürlichen Constanten abhängt, nämlich von den Grössen $\xi_1$, $\xi_2 \ldots \xi_n$; wohl aber kann dieser Complex von weniger Constanten abhängen. Wir können also diesen Complex entweder als eine vollständige Lösung oder doch als einen Theil einer vollständigen Lösung ansehen, und diese vollständige Lösung will ich als gegeben annehmen durch die Gleichungen

$$(16.) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = c_1, \\ f_2(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = c_n. \end{cases}$$

Unter diesen Lösungen sollen also der Voraussetzung nach immer diejenigen gefunden werden, welche den Bedingungen (15) genügen.

Setzt man in den Gleichungen (16.) an die Stelle der Constanten $c_1$, $c_2 \ldots c_n$ gewisse Functionen von $x_1$, $x_2 \ldots x_n$, die ich mit $\gamma_1$, $\gamma_2 \ldots \gamma_n$ bezeichnen will, so müssen die Gleichungen (16.) dieselbe Lösung ergeben,

wie die Gleichungen:

$$(17.)\quad \begin{cases} \psi'(p_1)=0, & \psi'(p_2)=0, \quad \ldots & \psi'(p_n)=0, \\ p_1-\psi'(x_1)=0, & p_2-\psi'(x_2)=0, \quad \ldots & p_n-\psi'(x_n)=0. \end{cases}$$

Denkt man sich nun die Grössen $p_1, p_2 \ldots p_n$ ausgedrückt durch die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ und $x_1, x_2 \ldots x_n$ und in $\psi'(p_1), \psi'(p_2), \ldots \psi'(p_n)$ substituirt, so lassen sich die Gleichungen (15.) auch so schreiben:

$$(18.)\quad \begin{cases} \left[\frac{\partial\psi'(p_\varrho)}{\partial x_\sigma}\right] = 0, \\ \left[\frac{\partial\psi'(p_\varrho)}{\partial x_\varrho}\right] = 1, \\ \qquad\qquad (x_1, x_2 \ldots x_n) = (\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) \end{cases}$$

wo durch die eckigen Klammern angedeutet ist, dass die Differentiation nach $x$ so auszuführen ist, als ob die Grössen $f_1, f_2 \ldots f_n$ Constanten wären.

Das in den Gleichungen (18.) enthaltene Resultat lässt sich so ausdrücken: die Functionen $\psi'(p_\varrho)$ müssen auf die Form gebracht werden können:

$$(19.)\quad \psi'(p_\varrho) = x_\varrho + \varphi_\varrho(x_1, x_2 \ldots x_n, f_1, f_2 \ldots f_n),$$

worin die Functionen $\varphi_\varrho$ die Eigenschaft haben, dass ihre partiellen Differentialquotienten $\varphi'_\varrho(x_\sigma)$ verschwinden, wenn man darin an die Stelle von $x_h$ setzt $\xi_h$ und an die Stelle von $f_1, f_2 \ldots f_n$ solche Constanten, welche die vollständige Lösung (16.) so specialisiren, dass sie den Bedingungen (15.) genügt. Diese Eigenschaft der Functionen $\varphi_\varrho$ lässt sich auch folgendermassen ausdrücken: die Differentialquotienten $\varphi'_\varrho(x_\sigma)$ müssen identisch verschwinden, wenn man an die Stelle der $f_1, f_2 \ldots f_n$ die oben definirten Functionen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ setzt. Daraus folgt weiter, dass die Functionen $\varphi_\varrho(x_1, x_2 \ldots x_n, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n)$ durch die Functionen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ allein ausdrückbar sein müssen, denn man erhält vermöge der oben erwähnten Eigenschaft der Functionen $\varphi_\varrho$

$$d\varphi_\varrho = A_1^\varrho d\gamma_1 + A_2^\varrho d\gamma_2 + \cdots + A_n^\varrho d\gamma_n,$$

d. h. die Variationen von $\varphi_\varrho$ sind allein abhängig von den Variationen der Functionen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$; es können also auch die Functionen $\varphi_\varrho$ allein durch die Functionen $\gamma_\varrho$ ausgedrückt werden, welche Ausdrücke ich mit $\chi_\varrho(\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n)$ bezeichnen will.

Nun ist aber der Voraussetzung (17.) zufolge, wenn man an die Stelle der $f_1, f_2 \ldots f_n$ die Functionen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ setzt, $\psi'(p_\varrho) = 0$, und demnach erhält man aus den Gleichungen (19.) die identischen Gleichungen:

$$(20.)\quad \begin{cases} x_1+\chi_1(\gamma_1,\gamma_2\ldots\gamma_n) = 0, \\ x_2+\chi_2(\gamma_1,\gamma_2\ldots\gamma_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n+\chi_n(\gamma_1,\gamma_2\ldots\gamma_n) = 0. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist der Beweis enthalten, dass die hier in Frage stehende Lösung unter den gemachten Voraussetzungen immer eine singuläre Lösung ist. Die Gleichungen (20.) sagen nämlich aus, dass die Functionen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ in Bezug auf die darin enthaltenen Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ auflösbar sind, und dies ist nur dann möglich, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial\gamma_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial\gamma_n}{\partial x_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial\gamma_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial\gamma_2}{\partial x_n}, & \ldots & \frac{\partial\gamma_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Nach §. 5 ist aber das die Definition der singulären Lösung, dass ein solches Functionensystem $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ existirt, deren Functionaldeterminante nicht verschwindet.

Hinsichtlich dieses Beweises ist zu bemerken, dass derselbe hätte erspart und durch einen weit einfacheren ersetzt werden können, wenn man sich der Principien bedienen wollte, welche zuerst *Euler* *) bei der Untersuchung der entsprechenden Frage für gewöhnliche Differentialgleichungen angewandt hat, und von denen nach ihm *Laplace* **), *Lagrange* ***) und *Poisson* †) Gebrauch gemacht haben.

Diese Principien enthalten aber die sehr missliche Voraussetzung der Entwickelbarkeit einer Lösung mit einer willkürlichen Constanten nach positiven Potenzen dieser Constanten, eine Voraussetzung, deren Zulässigkeit nicht ohne Kenntniss der betreffenden Lösung beurtheilt werden kann, so dass die darauf gebauten Beweise streng genommen weiter nichts leisten, als dass

---

*) *Euler*, Calculus integralis. Bd. 1. Problema 72.

**) *Laplace*, Mémoires de l'Académie de Paris 1772.

***) *Lagrange*, Leçons sur le calcul des fonctions, leçon quinzième und an anderen Orten.

†) *Poisson*, Sur les solutions particulières etc. Journal de l'école polytechnique. Bd. 6.

sie eine gewisse Wahrscheinlichkeit gewähren, dass die aus der Differentialgleichung selbst ohne Integration abgeleiteten Lösungen singuläre Lösungen sind*).

Der im Vorhergehenden von mir entwickelte Beweis ist zwar auch nicht ganz allgemein; die dabei gemachten Voraussetzungen beziehen sich aber nur auf die Differentialgleichung, und ihre Zulässigkeit kann erkannt werden aus der Differentialgleichung selbst ohne Integration.

## §. 11.

Der im Vorhergehenden gelieferte Beweis der Singularität unserer Lösung ist nicht der einzige Vortheil, der aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen gezogen werden kann. Es ergeben sich daraus noch eine Reihe anderer merkwürdiger Eigenschaften derjenigen Differentialgleichungen, bei denen die im §. 9 gemachten Voraussetzungen erfüllt sind.

Zunächst ergiebt sich unmittelbar, dass die vollständige Lösung (16.) durch die Annahme (15.) vollständig erschöpft wird, d. h. die durch die Bedingung (15.) charakterisirten Lösungen bilden zusammen ein vollständiges System von Lösungen. Denn vermöge der Gleichungen (20.) erhält man für jedes beliebige Werthsystem der Constanten $c_1, c_2 \ldots c_n$, wenn man dieselben an die Stelle der $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ setzt, ein Werthsystem $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, welches die Bedingungen (15.) befriedigt.

Wenn wir also in den Gleichungen (20.) an die Stelle der $x_1, x_2 \ldots x_n$ setzen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, an die Stelle der $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ wieder die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ (16.), so kann das System von Gleichungen:

$$(21.) \quad \begin{cases} \xi_1 + \chi_1(f_1, f_2 \ldots f_n) = 0, \\ \xi_2 + \chi_2(f_1, f_2 \ldots f_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n + \chi_n(f_1, f_2 \ldots f_n) = 0, \end{cases}$$

als eine andere Form der Lösung (16.) angesehen werden, in welcher an die Stelle der willkürlichen Constanten $c_1, c_2 \ldots c_n$ jetzt die willkürlichen Constanten $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ getreten sind. Aus dieser Form der vollständigen Lösung erhalten wir unmittelbar die singuläre Lösung, wenn wir setzen:

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \ldots \quad \xi_n = x_n;$$

---

*) Einen Zweifel an der Gültigkeit dieses Beweises hat meines Wissens zuerst *Jacobi* ausgesprochen, da wo er von den singulären Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen handelt, dieses Journal Bd. 27, pag. 240.

und bezeichnet man wieder die partiellen Differentialquotienten der vollständigen Lösung mit $p_\varrho$, die der singulären Lösung mit $\pi_\varrho$, mit $z$ die vollständige Lösung, mit $\zeta$ die singuläre Lösung selbst, so wird:

$$(22.) \qquad p_1 = \pi_1, \quad p_2 = \pi_2, \quad \ldots \quad p_n = \pi_n, \quad z = \zeta$$

für: —

$$(23.) \qquad x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad \ldots \quad x_n = \xi_n.$$

Ich werde nun nachweisen, dass die Gleichungen (22.) nicht etwa bloss zu Relationen führen können zwischen den $x_1, x_2 \ldots x_n$, welche durch (23.) befriedigt werden, sondern dass die Werthe (23.) ein ganz bestimmtes System von Wurzeln der Gleichungen (22.) sind.

Wenn nämlich die Gleichungen (22.) durch weniger als $n$ Relationen zwischen den Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ erfüllt werden, so kann man die Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ durch eine Anzahl unabhängiger Variablen $t_1, t_2 \ldots$ ausdrücken, so dass die Gleichungen (22.) identisch erfüllt werden, und dass zugleich die Gleichungen (23.) für gewisse constante Werthe der $t_1, t_2 \ldots$ erfüllt sind.

Wenn man nun die identischen Gleichungen (22.) nach einer der Grössen $t$ differentiirt, so erhält man unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung für die zweiten partiellen Differentialquotienten das System von Gleichungen:

$$(24.) \quad \begin{cases} (p_{11}-\pi_{11})\dfrac{\partial x_1}{\partial t} + (p_{12}-\pi_{12})\dfrac{\partial x_2}{\partial t} + \cdots + (p_{1n}-\pi_{1n})\dfrac{\partial x_n}{\partial t} = 0, \\ (p_{21}-\pi_{21})\dfrac{\partial x_1}{\partial t} + (p_{22}-\pi_{22})\dfrac{\partial x_2}{\partial t} + \cdots + (p_{2n}-\pi_{2n})\dfrac{\partial x_n}{\partial t} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (p_{n1}-\pi_{n1})\dfrac{\partial x_1}{\partial t} + (p_{n2}-\pi_{n2})\dfrac{\partial x_2}{\partial t} + \cdots + (p_{nn}-\pi_{nn})\dfrac{\partial x_n}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen müssen identisch sein, wenn man in den Coefficienten für $x_1, x_2 \ldots x_n$ ihre Ausdrücke durch die $t$ setzt. Aus den Gleichungen (24.) folgt aber, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\pi_{11}, & p_{12}-\pi_{12}, & \ldots & p_{1n}-\pi_{1n} \\ p_{21}-\pi_{21}, & p_{22}-\pi_{22}, & \ldots & p_{2n}-\pi_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ p_{n1}-\pi_{n1}, & p_{n2}-\pi_{n2}, & \ldots & p_{nn}-\pi_{nn} \end{vmatrix}$$

verschwinden muss für dieselben Ausdrücke der $x$ durch $t$, also auch für die

Werthe $x_1 = \xi_1, \ldots x_n = \xi_n$. Dies ist aber nicht möglich, denn zufolge der Gleichungen (8.) und (15.) haben wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \psi''(\xi_\varrho, \pi_\sigma) + \Sigma_h \psi''(\pi_\sigma, \pi_h)\pi_{h\varrho}, \\ 0 &= \psi''(\xi_\varrho, \pi_\sigma) + \Sigma_h \psi''(\pi_\sigma, \pi_h)p_{h\varrho}, \\ 1 &= \psi''(\xi_\varrho, \pi_\varrho) + \Sigma_h \psi''(\pi_\varrho, \pi_h)p_{h\varrho}, \\ & \qquad\qquad (x_1, x_2 \ldots x_n) = (\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma_h \psi''(\pi_\sigma, \pi_h)(p_{h\varrho} - \pi_{h\varrho}), \\ 1 &= \Sigma_h \psi''(\pi_\varrho, \pi_h)(p_{h\varrho} - \pi_{h\varrho}), \end{aligned}$$

und daraus folgt:

$$1 = \begin{vmatrix} \psi''(\pi_1, \pi_1), & \psi''(\pi_1, \pi_2), & \ldots & \psi''(\pi_1, \pi_n) \\ \psi''(\pi_2, \pi_1), & \psi''(\pi_2, \pi_2), & \ldots & \psi''(\pi_2, \pi_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi''(\pi_n, \pi_1), & \psi''(\pi_n, \pi_2), & \ldots & \psi''(\pi_n, \pi_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{11} - \pi_{11}, & p_{12} - \pi_{12}, & \ldots & p_{1n} - \pi_{1n} \\ p_{21} - \pi_{21}, & p_{22} - \pi_{22}, & \ldots & p_{2n} - \pi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} - \pi_{n1}, & p_{n2} - \pi_{n2}, & \ldots & p_{nn} - \pi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Und da den Voraussetzungen des §. 9 zufolge der erste Factor nicht unendlich ist, so kann der zweite Factor nicht verschwinden.

Daraus folgt, dass die Werthe $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ für die $x_1, x_2 \ldots x_n$ nicht einem System von weniger als $n$ Relationen zwischen den $x$ angehören können, durch welche die Gleichungen (22.) identisch erfüllt werden.

Dadurch ist nicht ausgeschlossen, dass die Gleichungen (22.) unter Umständen auch noch ausser durch die bestimmten Werthe $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, durch andere bestimmte Werthe der $x$, oder selbst durch Relationen zwischen den $x$ befriedigt werden können, wenn nämlich die Gleichungen (22.) gewisse gemeinschaftliche Factoren haben; die Werthe $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ ergeben sich aber als bestimmte constante Werthe nach Unterdrückung der gemeinschaftlichen Factoren und können den aus den gemeinschaftlichen Factoren gezogenen Relationen nicht genügen.

## §. 12.

In den folgenden Untersuchungen lege ich die vollständige Lösung (21.) zu Grunde, die ich als bekannt voraussetze. Aus derselben soll sich durch Elimination der $p_1, p_2 \ldots p_n$ der Ausdruck von $z$ ergeben:

$$(25.) \qquad z = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n),$$

worin also $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ die willkürlichen Constanten sind. Wir erhalten aus

dieser Lösung die singuläre Lösung unmittelbar:

$$(26.) \qquad z = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Es müssen also die Gleichungen:

$$(27.) \qquad \frac{\partial z}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial z}{\partial \xi_n} = 0$$

identisch erfüllt sein für:

$$(28.) \qquad \xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \ldots \quad \xi_n = x_n$$

und zwar so, dass die Werthe (28.) nicht durch Specialisirung von weniger als $n$ Relationen zwischen den $x$ und $\xi$ erhalten werden können, sondern sich als ein ganz bestimmtes Wurzelsystem der Gleichungen (27.) ergeben; denn wenn die Gleichungen (27.) durch weniger als $n$ Relationen befriedigt werden könnten, so würden durch dieselben Relationen die Gleichungen $p_\varrho = \pi_\varrho$ erfüllt, was, wie ich oben bewiesen habe, nicht möglich ist.

Zu einer bemerkenswerthen Deutung der willkürlichen Functionen, von welchen die allgemeine Lösung abhängt, gelangt man, wenn man von der vollständigen Lösung (25.) ausgeht, um daraus alle übrigen Lösungen abzuleiten.

Man hat dann nach §. 4. die Grössen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ so als Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ zu bestimmen, dass zwischen ihnen die willkürlichen Relationen bestehen:

$$(29.) \qquad \begin{cases} \Pi_1(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = 0, \\ \Pi_2(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Pi_m(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = 0. \end{cases}$$

Oder indem man die neuen Variablen $v_{m+1}, v_{m+2} \ldots v_n$ durch die Gleichungen einführt:

$$(30.) \qquad \begin{cases} \Pi_{m+1}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = v_{m+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Pi_n(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = v_n, \end{cases}$$

so kann man die Functionen $\xi$ auch durch folgende willkürliche Gleichungen verbunden annehmen:

$$(31.) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \psi_1(v_{m+1}, v_{m+2} \ldots v_n), \\ \xi_2 = \psi_2(v_{m+1}, v_{m+2} \ldots v_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n = \psi_n(v_{m+1}, v_{m+2} \ldots v_n). \end{cases}$$

Dann werden die $v_{m+1} \ldots v_n$ als Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ bestimmt

vermittelst der Gleichungen:

$$(32.)\quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \xi_1}\psi_1'(v_{m+1}) + \frac{\partial z}{\partial \xi_2}\psi_2'(v_{m+1}) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial \xi_n}\psi_n'(v_{m+1}) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial \xi_1}\psi_1'(v_{m+2}) + \frac{\partial z}{\partial \xi_2}\psi_2'(v_{m+2}) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial \xi_n}\psi_n'(v_{m+2}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z}{\partial \xi_1}\psi_1'(v_n) + \frac{\partial z}{\partial \xi_2}\psi_2'(v_n) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial \xi_n}\psi_n'(v_n) = 0. \end{cases}$$

Hat man die $v$ diesen Gleichungen gemäss bestimmt, so ergiebt sich die gesuchte Lösung:

$$(33.)\quad z = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, \psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n).$$

Ich werde im Folgenden der Kürze halber sagen: zwei Lösungen berühren sich, wenn für ein Werthsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ für beide Lösungen die Werthe $z, p_1, p_2 \ldots p_n$ übereinstimmen. Ich werde ferner ein Gebiet der $q$ten Ordnung den Inbegriff aller Werthe von $x_1, x_2 \ldots x_n$ nennen, welche $n-q$ Gleichungen genügen, so dass ein constantes Werthsystem der $x_1, x_2 \ldots x_n$ ein Gebiet der nullten Ordnung ist, während, wenn die $x_1, x_2 \ldots x_n$ ganz unabhängig von einander sind, sie ein Gebiet der $n^{\text{ten}}$ Ordnung bilden.

Betrachten wir nun irgend ein Individuum der vollständigen Lösung (25.), dessen Constanten $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ den Relationen (29.) genügen sollen. Diese Lösung wird die Lösung (33.) berühren, wenn man die $x_1, x_2 \ldots x_n$ so bestimmen kann, dass sie den Gleichungen:

$$\xi_1 = \psi_1, \quad \xi_2 = \psi_2, \quad \ldots \quad \xi_n = \psi_n$$

genügen. Diese Gleichungen werden aber identisch erfüllt, wenn wir die $x$ den Gleichungen (30.) gemäss bestimmen, worin die $\xi$ Constanten, die $v$ gegebene Functionen der $x$ sind.

Die Lösungen (25.) und (33.) berühren sich also, falls die Constanten der ersteren den Gleichungen (29.) gemäss bestimmt sind, in einem Gebiet der $m^{\text{ten}}$ Ordnung, welches dargestellt ist durch die Gleichungen (30.).

Von der vollständigen Lösung (25.) habe ich früher schon nachgewiesen, dass jedes Individuum derselben die singuläre Lösung (26.) in einem Gebiet der nullten Ordnung berührt. Es bleibt also noch übrig, das Gebiet der Berührung der singulären Lösung (26.) mit der Lösung (33.) zu untersuchen.

Die Lösungen (26.) und (33.) berühren sich für solche Werthe der $x_1, x_2 \ldots x_n$, welche den Gleichungen genügen:

$$x_1 = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2 \quad \ldots \quad x_n = \psi_n.$$

Daraus folgt zunächst, dass nur für solche Werthe der $x$ eine Berührung stattfinden kann, welche den Gleichungen genügen:

$$(34.)\quad \begin{cases} \Pi_1\,(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0, \\ \Pi_2\,(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Pi_m\,(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0. \end{cases}$$

Ferner aber werden die Gleichungen (32.) durch die Annahme $\psi_1 = x_1$, $\psi_2 = x_2$, $\ldots$ $\psi_n = x_n$ identisch befriedigt, wegen der Gleichungen (27.), die durch (28.) identisch befriedigt werden, so dass sich ausser den Gleichungen (34.) für die $x$ keine anderen Bedingungen ergeben.

Daraus folgt, dass sich die Lösungen (26.), (33.) in einem Gebiet der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung berühren, welches dargestellt ist durch die Gleichungen (34.), also gerade durch die angenommenen willkürlichen Functionen.

Die vollständige Lösung, von der wir ausgingen, kann ausser in dem Gebiet der nullten Ordnung die singuläre Lösung noch in anderen Gebieten berühren, welche aus unterdrückten gemeinschaftlichen Factoren der Gleichung (27.) entspringen.

Setzen wir zuerst den Fall, dass solche gemeinschaftliche Factoren der Gleichungen (27.) nicht existiren, dann wird die vollständige Lösung, die hier zu Grunde liegt, die Eigenschaft haben, die singuläre Lösung nur in Gebieten der nullten Ordnung zu berühren, und aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar, dass diese vollständige Lösung die einzige ist, welche diese Eigenschaft hat; denn aus dieser Lösung gelangt man zu jeder anderen dadurch, dass man zwischen den Constanten gewisse Relationen annimmt, deren Anzahl kleiner als $n$ sein muss; und diese Relationen repräsentiren immer ein Berührungsgebiet, dessen Ordnung die nullte übersteigt.

Es folgt ferner, das in diesem Fall jede Lösung entweder unzweideutig, oder doch nur auf eine endliche Zahl von Arten bestimmt ist, wenn ihr Berührungsgebiet mit der singulären Lösung gegeben ist.

Durch das Berührungsgebiet sind nämlich die willkürlichen Relationen, die zwischen den Constanten anzunehmen sind, gegeben. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass unsere vollständige Lösung die singuläre Lösung nicht in je einem Gebiete der nullten Ordnung, sondern in mehreren berührt. In diesem Fall ist durch die zwischen den Constanten angenommenen Relationen nicht das vollständige Berührungsgebiet der neuen Lösung mit der singulären Lösung gegeben, sondern nur ein Theil derselben, wodurch allerdings der

übrige Theil zugleich mitbestimmt ist. Es können aber in diesem Fall die willkürlichen Constanten der vollständigen Lösung durch andere Constanten ersetzt werden, welche Functionen der ersten sind, und welche dieselbe Bedeutung wie diese haben, so dass man die gegebenen Relationen ebenso wohl zwischen diesen neuen Constanten als zwischen den ersteren annehmen kann. Durch jede solche Annahme wird die durch ihr Berührungsgebiet gegebene Lösung und zwar im Allgemeinen verschieden bestimmt.

Anders gestaltet sich die Sache in dem Falle, wo die vollständige Lösung (21.) ausser in Gebieten der nullten Ordnung noch in Gebieten von anderer Ordnung die singuläre Lösung berührt. Dann kann es mehrere, ja sogar unendlich viele vollständige Lösungen geben, welche die gleiche Eigenschaft wie die Lösung (21.) haben. Denn während sich ein Berührungsgebiet der nullten Ordnung beim Uebergang zu einer anderen Lösung in ein Berührungsgebiet höherer Ordnung erweitert, kann das derselben Lösung angehörige Berührungsgebiet höherer Ordnung zu einem Berührungsgebiet der nullten Ordnung sich zusammenziehen.

In diesem Falle ist keineswegs eine Lösung bestimmt durch ihr Berührungsgebiet mit der singulären Lösung, welches durch gegebene Relationen zwischen den Constanten der vollständigen Lösung dargestellt ist. Denn man wird andere und andere Lösungen erhalten, jenachdem man die Constanten der einen oder einer anderen vollständigen Lösung in diese Relationen einsetzt.

## §. 13.

Wenn irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung bekannt ist:

$$(1.) \qquad z = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, c_1, c_2 \ldots c_n),$$

so ist die Frage nach dem Gebiet, in welchem diese Lösung die singuläre Lösung berührt, eine rein algebraische. Man hat nur zu untersuchen, durch welche Relationen zwischen $x_1$, $x_2 \ldots x_n$, $c_1$, $c_2 \ldots c_n$ die Gleichungen

$$(2.) \qquad z = \zeta, \quad p_1 = \pi_1, \quad \ldots \quad p_n = \pi_n$$

identisch erfüllt sind. Die Anzahl dieser Relationen kann im höchsten Falle gleich $n$ sein, im Allgemeinen aber wird sie geringer sein. Es kann auch der Fall eintreten, dass es verschiedene Systeme solcher Relationen giebt, deren Anzahl selbst verschieden sein kann.

Es sei nun ein System solcher Relationen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \Pi_1(x_1, x_2 \ldots x_n, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0, \\ \Pi_2(x_1, x_2 \ldots x_n, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Pi_m(x_1, x_2 \ldots x_n, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0, \end{cases}$$

worin $m < n$ ist. Will man nun aus der vollständigen Lösung (1.) zu der singulären übergehen, indem man die $c_1$, $c_2 \ldots c_n$ in geeigneter Weise durch die $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ ausdrückt, so ergeben sich in diesem Falle für die $c$ keine bestimmten Ausdrücke, sondern man kann ein beliebiges System von Functionen an die Stelle der $c$ setzen, welches die Gleichungen (3.) identisch erfüllt, denn dadurch werden der Voraussetzung nach auch die Gleichungen (2.) identisch.

Der allgemeinste Ausdruck für die Functionen $c$, welcher die Gleichungen (3.) befriedigt, ist aber:

$$(4.)\quad \begin{cases} c_1 = \psi_1(\omega_{m+1} \ldots \omega_n, x_1, x_2 \ldots x_n), \\ c_2 = \psi_2(\omega_{m+1} \ldots \omega_n, x_1, x_2 \ldots x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n = \psi_n(\omega_{m+1} \ldots \omega_n, x_1, x_2 \ldots x_n), \end{cases}$$

wo die $\omega_{m+1} \ldots \omega_n$ ganz beliebige Grössen, die $\psi_1$, $\psi_2 \ldots \psi_n$ Functionen sind, welche die Eigenschaft haben, dass durch Elimination der $\omega$ aus den Gleichungen (4.) die Gleichungen (3.) wieder hervorgehen, und dass die Functionaldeterminante der $\psi$ in Bezug auf die $x$ nicht identisch verschwindet, da sich sonst aus (4.) die $x$ eliminiren liessen, was zu einer Relation zwischen den $c$ und $\omega$ allein führen würde. Dann aber wären die $\omega$ nicht ganz beliebig, d. h. die Annahme (4.) wäre zu speciell.

Dá durch die Substitution (4.) die Gleichungen (2.) identisch befriedigt werden, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial c_1}\psi_1'(x_\varrho) + \frac{\partial z}{\partial c_2}\psi_2'(x_\varrho) + \cdots + \frac{\partial z}{\partial c_n}\psi_n'(x_\varrho) = 0, \qquad \varrho = 1, 2 \ldots n,$$

und da die Functionaldeterminante der $\psi$ in Bezug auf die $x$ nicht verschwindet:

$$(5.)\quad \frac{\partial z}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial c_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial z}{\partial c_n} = 0,$$

Gleichungen, welche ebenso wie die vorhergehenden durch Substitution von (4.) identisch erfüllt werden müssen.

Wenn man die vollständige Lösung (1.) benutzen will, um daraus irgend eine andere Lösung abzuleiten, so hat man nach §. 4 so zu verfahren:

Man bildet die Gleichungen:

$$(6.)\qquad \begin{cases} c_1 = \chi_1(v_{p+1}\dots v_n), \\ c_2 = \chi_2(v_{p+1}\dots v_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_n = \chi_n(v_{p+1}\dots v_n), \end{cases}$$

worin die $\chi$ willkürliche Functionen, $p$ eine Zahl die kleiner ist als $n$ bedeuten, und bestimmt dann die $v$ als Functionen der $x$ mittelst der Gleichungen:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial c_1}\chi_1'(v_{p+1}) + \frac{\partial z}{\partial c_2}\chi_2'(v_{p+1}) + \dots + \frac{\partial z}{\partial c_n}\chi_n'(v_{p+1}) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial z}{\partial c_1}\chi_1'(v_n) + \frac{\partial z}{\partial c_2}\chi_2'(v_n) + \dots + \frac{\partial z}{\partial c_n}\chi_2'(v_n) = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (7.) werden identisch erfüllt, wenn man für $c_1$, $c_2 \dots c_n$ die Ausdrücke (4.) einsetzt. Dann aber muss

$$(8.)\qquad \psi_1 = \chi_1, \quad \psi_2 = \chi_2, \quad \dots \quad \psi_n = \chi_n$$

werden. Wenn nun $2n-p-m \gtreqless n$, oder $n \gtreqless p+m$ ist, so lassen sich aus den Gleichungen (8.) Ausdrücke für $v$ und $\omega$ bestimmen, welche die Gleichungen (7.) und (8.) befriedigen, und die für die $c_1$, $c_2$ ... $c_n$ solche Ausdrücke ergeben, welche in die vollständige Lösung (1.) eingesetzt, dieselbe in die singuläre Lösung überführen.

Daraus ergiebt sich folgender Satz:

Wenn man von einer vollständigen Lösung ausgeht, welche die singuläre Lösung in einem Gebiet der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung berührt, und man will daraus eine andere Lösung bestimmen, indem man $p$ Relationen zwischen den willkürlichen Constanten annimmt, so ergiebt sich, vorausgesetzt dass $m+p \gtreqless n$ ist, immer die singuläre Lösung selbst als eine Wurzel der aufzulösenden Gleichungen.

Es bleibt noch übrig, zu untersuchen, wie man, wenn irgend eine vollständige Lösung bekannt ist, zu verfahren hat, um eine solche vollständige Lösung zu bestimmen, welche die singuläre Lösung in Gebieten der nullten Ordnung berührt.

Die gegebene vollständige Lösung sei:

$$(9.)\qquad z = \varphi(x_1, x_2 \dots x_n, c_1, c_2 \dots c_n),$$

und die Gleichungen

$$(10.) \qquad z = \zeta, \quad p_1 = \pi_1, \quad \ldots \quad p_n = \pi_n$$

mögen befriedigt werden, wenn zwischen den Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Relationen bestehen:

$$(11.) \qquad \begin{cases} \Pi_1(x_1, x_2 \ldots x_n, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Pi_m(x_1, x_2 \ldots x_n, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0, \end{cases}$$

und zwar will ich zunächst den Fall annehmen, dass die Gleichungen (10.) auf keine andere Weise befriedigt werden können, als durch die Annahme der Relationen (11.).

Ist nun eine vollständige Lösung, welche die singuläre Lösung in Gebieten der nullten Ordnung berührt:

$$(12.) \qquad z = \psi(x_1, x_2 \ldots x_n, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n),$$

so folgt aus den Betrachtungen des §. 12, dass man aus (12.) die Lösung (9.) erhält, wenn man zwischen den Constanten $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ und den Constanten $c_1, c_2 \ldots c_n$ die Relationen annimmt:

$$(13.) \qquad \begin{cases} \Pi_1(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0, \\ \Pi_2(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Pi_m(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0. \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich mittelst der am Schluss des §. 3 bewiesenen Reciprocität zweier vollständigen Lösungen, dass man aus der Lösung (9.) eine in Gebieten der nullten Ordnung berührende Lösung erhält, wenn man zwischen den Constanten der gegebenen und gesuchten Lösung die Relationen (13.) festsetzt, welche sich unmittelbar aus dem Berührungsgebiet der singulären Lösung mit der gegebenen vollständigen abschreiben lassen. Dem Vorhergehenden gemäss erhält man bei diesem Verfahren ausser der gesuchten Lösung die singuläre Lösung selbst, wenn $2m \gtrless n$ ist.

In dem anderen Fall, wo die Gleichungen (10.) ausser durch ein System von Relationen (11.) noch durch andere solche Systeme erfüllt werden können, muss es, wie sich aus denselben Prinzipien wie oben ergiebt, unter den verschiedenen Systemen wenigstens eines geben, welches in der oben angegebenen Weise behandelt, zu einer solchen Lösung führt, welche die singuläre

Lösung in Gebieten der nullten Ordnung berührt. In den meisten Fällen wird aber jedes System von Relationen, welches den Gleichungen (10.) genügt, in derselben Weise benutzt werden können, um eine vollständige Lösung zu erhalten, welche die singuläre Lösung in Gebieten der nullten Ordnung berührt, und daraus entspringen in diesen Fällen die verschiedenen vollständigen Lösungen, welchen diese Eigenschaft zukommt.

Ob diese letztere Bemerkung allgemeine Gültigkeit besitzt, bleibt dahingestellt.

## §. 14.

Ich habe schliesslich noch einige Bemerkungen hinzuzufügen, über diejenigen Differentialgleichungen, welche durch die im §. 9 gemachten Voraussetzungen ausgeschlossen sind. Bei dieser Art von Gleichungen sehe ich keinen Weg, auf welchem bewiesen werden könnte, dass die durch Differentiation nach den Differentialquotienten erhaltene Lösung eine singuläre ist, respective entschieden werden könnte, ob dieselbe eine singuläre Lösung ist oder nicht. Auch die in den §§. 11 ff. angestellten Betrachtungen verlieren in diesen Fällen ihre Gültigkeit. Immerhin aber steht soviel fest, dass, wenn eine singuläre Lösung existirt, diese durch die Methode des §. 7 gefunden werden muss.

Zu diesen Ausnahmefällen gehört eine sehr wichtige Classe von Differentialgleichungen, nämlich die linearen. Bei den linearen Gleichungen nämlich verschwindet, falls die Zahl der unabhängigen Variablen 2 übersteigt, die Determinante (9.) des §. 9 identisch, wie sich sehr leicht zeigen lässt. Bei zwei unabhängigen Variablen aber verschwindet diese Determinante durch Einsetzen der singulären Lösung.

Die singulären Auflösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen hat *Jacobi* behandelt *), aber auf einem von dem unsrigen ganz verschiedenen Wege, indem er die Multiplicationstheorie benutzt. Es wird daher als eine willkommene Bestätigung unserer Resultate zu betrachten sein, wenn es gelingt, die Uebereinstimmung mit der Theorie von *Jacobi* nachzuweisen.

Es soll die lineare partielle Differentialgleichung gegeben sein:

*) Dieses Journal Bd. 27, p. 239.

$$(1.) \qquad X_1 p_1 + X_2 p_2 + \cdots + X_n p_n = X_0,$$

worin die $X_1, X_2 \ldots X_n, X_0$ irgend welche Functionen von $z, x_1, x_2 \ldots x_n$ bedeuten: das allgemeine Integral dieser Gleichung lässt sich bekanntlich in der Form darstellen:

$$(2.) \qquad \Phi(f_1, f_2 \ldots f_n) = 0,$$

wo $\Phi$ eine willkürliche Function und $f_1, f_2 \ldots f_n$ die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sind.

Die von der vollständigen Lösung mit $n$ willkürlichen Constanten ausgehenden Betrachtungen sind bei diesen Gleichungen überflüssig; sie können aber eben so gut hier wie im allgemeinen Falle angestellt werden. Eine vollständige Lösung erhält man aus (2.), wenn man über die Function $\Phi$ irgend eine specielle Annahme macht, worin $n$ willkürliche Constanten vorkommen.

Wenn man dann, wie im §. 4 gezeigt wurde, die Constanten als Functionen der Variablen zu bestimmen sucht, um neue Lösungen zu erhalten, so ergeben sich, wie man sofort erkennt, wenn man den Ansatz macht, die Constanten immer als Functionen der $f_1, f_2 \ldots f_n$, so dass man immer wieder auf die Form (2.) zurückkommt, ausser bei der singulären Lösung; die singuläre Lösung kann nicht in der Form (2.) enthalten sein, was sich unmittelbar aus der Definition derselben im §. 5 schliessen lässt.

Nach der Methode des §. 7 hätte man, um die singuläre Lösung zu erhalten, die Gleichung (1.) in Bezug auf $z$ aufzulösen, und dann die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial p_1}, \frac{\partial z}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial z}{\partial p_n} = 0$ zu setzen.

Es ist nun aber nicht nothwendig, diese Auflösung wirklich auszuführen; man kann die Gleichung (1.) selbst differentiiren, und erhält zur Bestimmung der $\frac{\partial z}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial p_n}$ das System von Gleichungen:

$$(3.) \qquad \begin{cases} 0 = X_1 + \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial z} p_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} p_2 + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial z} p_n - \frac{\partial X_0}{\partial z} \right\} \frac{\partial z}{\partial p_1}, \\ 0 = X_2 + \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial z} p_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} p_2 + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial z} p_n - \frac{\partial X_0}{\partial z} \right\} \frac{\partial z}{\partial p_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = X_n + \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial z} p_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} p_2 + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial z} p_n - \frac{\partial X_0}{\partial z} \right\} \frac{\partial z}{\partial p_n}. \end{cases}$$

Für die singuläre Lösung müssen $\frac{\partial z}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial p_n}$ verschwinden. Dies kann

nun dadurch geschehen, dass die $X_1, X_2 \ldots X_n$ durch eine Gleichung zwischen $z, x_1 \ldots x_n$ zum Verschwinden gebracht werden. Damit aber dadurch die Gleichung (1.) überhaupt befriedigt wird, muss gleichzeitig $X_0$ verschwinden, d. h. die ganze Differentialgleichung muss einen algebraischen Factor haben.

Nehmen wir also an, die Coefficienten $X_0, X_1 \ldots X_n$ seien von gemeinschaftlichen Factoren befreit, so fällt diese Möglichkeit, den Gleichungen $\frac{\partial z}{\partial p} = 0$ zu genügen, weg, und aus den Gleichungen (3.) folgt dann, dass für die singuläre Lösung

$$(4.) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial z} p_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} p_2 + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial z} p_n - \frac{\partial X_0}{\partial z}$$

unendlich gross werden muss, jedoch so, dass nicht gleichzeitig einer der Coefficienten $X_0, X_1, X_2 \ldots X_n$ unendlich wird. Es müssen also, ehe man zur Aufsuchung der singulären Lösung schreitet, die Coefficienten von gemeinschaftlichen Factoren und von Nennern befreit sein.

Der Ausdruck (4.) kann nur dadurch unendlich werden, dass eines seiner Glieder unendlich wird, so dass man aus dieser Bedingung die singuläre Lösung in Gestalt einer Relation zwischen $z, x_1 \ldots x_n$ erhält, welche die $p$ nicht mehr enthält. Die Gleichung, aus welcher nach *Jacobi* die singuläre Lösung zu bestimmen ist, lautet:

$$\frac{\partial X_0}{\partial z} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \infty,$$

welche Gleichung scheinbar von der hier aufgestellten verschieden ist. Es lässt sich aber ohne Schwierigkeiten zeigen, dass die beiden Gleichungen vollständig äquivalent sind. Denkt man sich nämlich in die Coefficienten $X_1, X_2 \ldots X_n$ an die Stelle von $z$ die singuläre Lösung substituirt, so gehen diese in Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ allein über, welche der Voraussetzung nach nicht unendlich sind. Bezeichnet man daher die partiellen Differentialquotienten dieser Functionen nach den $x$ mit $\left(\frac{\partial X_\varrho}{\partial x_\sigma}\right)$, so hat man die identischen Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial X_\varrho}{\partial x_\sigma}\right) = \frac{\partial X_\varrho}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial X_\varrho}{\partial z} p_\sigma$$

und daraus:

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)+\cdots+\left(\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$
$$=\frac{\partial X_1}{\partial z}p_1+\frac{\partial X_2}{\partial z}p_2+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial z}p_n-\frac{\partial X_0}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial X_0}{\partial z}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht ein endlicher Ausdruck. Wenn also die erste Zeile rechts vom Gleichheitszeichen unendlich wird, so muss auch die zweite Zeile unendlich werden und umgekehrt, wodurch die Uebereinstimmung der beiden Arten der Bestimmung der singulären Lösung dargethan ist.

Heidelberg, im März 1866.

# Geometrische Betrachtungen und Lehrsätze.

(Von *Jacob Steiner*.)

Aus dessen hinterlassenen Manuscripten mitgetheilt von Herrn *C. F. Geiser* in Zürich.

## I.

Gehen in einer Ebene drei beliebige begrenzte Gerade $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ durch den nämlichen Punkt $m$ und ist dieser die Mitte jener Geraden, so schneiden sich sowohl die vier Kreise $abc$, $a\beta\gamma$, $b\gamma\alpha$, $c\alpha\beta$ in irgend einem Punkte $d$, als auch die vier Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\alpha bc$, $\beta ca$, $\gamma ab$ in irgend einem Punkte $\delta$. Die Gerade $d\delta$ geht durch den Punkt $m$ und wird in ihm gehälftet; ferner liegen die acht Endpunkte der vier Geraden in irgend einem Kegelschnitte $m^2$, welcher die Geraden zu Durchmessern und $m$ zum Mittelpunkte hat. Zieht man umgekehrt in einem Kegelschnitte $m^2$ drei beliebige Durchmesser $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ und legt durch je drei Endpunkte verschiedener Durchmesser Kreise, so schneiden sich einerseits die Kreise $abc$, $a\beta\gamma$, $b\gamma\alpha$, $c\alpha\beta$ in einem Punkte $d$, und andererseits die vier Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\alpha bc$, $\beta ca$, $\gamma ab$ in einem Punkte $\delta$. Beide Punkte liegen auf dem Kegelschnitte, und sind Endpunkte eines Durchmessers desselben. Durch je drei gegebene Durchmesser ist also nicht nur der Kegelschnitt, sondern es ist auf diese Weise allemal noch ein vierter, ihnen zugehöriger Durchmesser bestimmt, und zwar ist von solchen vier Durchmessern jeder von den andern dreien in der angegebenen Weise abhängig. Aus diesem Satze lassen sich nachstehende Folgerungen ziehen:

Werden in einem gegebenen Kegelschnitte irgend ein Punkt $c$ und zwei beliebige Durchmesser $a\alpha$ und $b\beta$ angenommen, so schneiden sich die zwei Kreise $abc$ und $\alpha\beta c$ allemal in irgend einem neuen Punkte $d$ des Kegelschnittes. Lässt man nun die Durchmesser zusammenfallen, so folgt ferner: Beschreibt man zwei Kreise, welche durch den nämlichen Punkt $c$ des Kegelschnittes gehen und diesen nebstdem in den Endpunkten $a$ und $\alpha$ irgend eines Durchmessers beziehlich berühren, so liegt auch der zweite Schnittpunkt $d$ der Kreise auf dem Kegelschnitte, und umgekehrt, legt man an zwei gegebene Kreise irgend ein Paar paralleler Tangenten, an jeden eine, so giebt es immer einen Kegelschnitt, welcher die Kreise mit den Tangenten in den nämlichen Punkten $a$ und $\alpha$ berührt, und zudem durch die beiden Schnittpunkte $c$ und $d$ der

Kreise geht; $a\alpha$ ist einer seiner Durchmesser. Aus dem vorigen Satze zieht man leicht durch Umkehrung:

Sind zwei gleiche parallele Gerade $ab$ und $\alpha\beta$ gegeben, und man legt durch ihre Endpunkte beziehlich irgend zwei Kreise, so liegen deren zwei Schnittpunkte $c$ und $d$ mit den Endpunkten der Geraden in einem und demselben Kegelschnitte. Oder: Zieht man in zwei gegebenen Kreisen zwei parallele gleiche Sehnen, in jedem eine, so liegen ihre Endpunkte mit den zwei gemeinschaftlichen Punkten der Kreise in irgend einem Kegelschnitte.

Betrachtet man in Ansehung der drei Geraden oder Durchmesser $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ etwa die zwei Kreise $abc$ und $\alpha\beta\gamma$ und lässt die Durchmesser $b\beta$ und $c\gamma$ dem festen Durchmesser $a\alpha$ so nahe rücken, dass die Endpunkte $b$ und $c$ als mit $a$, so wie $\beta$ und $\gamma$ als mit $\alpha$ vereinigt anzusehen sind, so osculirt der erste Kreis den Kegelschnitt in $a$, der andere Kreis berührt ihn in $\alpha$, und beide Kreise müssen sich immer, ausser in $\alpha$ noch in irgend einem anderen Punkte $d$ des Kegelschnittes treffen. Da der zweite Kreis durch die Bedingung, dass er durch $a$ gehen und den Kegelschnitt in $\alpha$ berühren soll, bestimmt ist, so ergiebt sich folgende einfache Construction des Krümmungskreises des Kegelschnittes $m^2$ in einem gegebenen Punkte $a$: durch den Punkt $a$ ziehe man den Durchmesser $a\alpha$, lege durch seine Endpunkte einen Kreis, welcher den gegebenen Kegelschnitt $m^2$ in $\alpha$ berührt und ihn noch in irgend einem neuen Punkte $d$ schneidet, durch diesen Punkt denjenigen Kreis, welcher $m^2$ in $a$ berührt, so ist dies der gesuchte Krümmungskreis. Durch Umkehrung hat man ferner: Schneiden sich zwei gegebene Kreise in zwei Punkten $a$, $d$, und man legt in $a$ an den einen Kreis die Tangente, und an den anderen Kreis eine parallele Tangente, deren Berührungspunkt $\alpha$ heissen soll, so giebt es allemal einen Kegelschnitt, welcher den ersten Kreis in $a$ osculirt, den zweiten Kreis in $\alpha$ berührt und zudem durch den zweiten Schnittpunkt der Kreise geht; auch hat derselbe die Gerade $a\alpha$ zum Durchmesser. Da zwei Tangenten an den zweiten Kreis möglich sind, welche der genannten Tangente des ersten Kreises parallel sind, so entsprechen ihnen auch zwei Kegelschnitte, welche einander in $a$ osculiren und nebstdem noch in $d$ schneiden.

## II.

Werden die drei Durchmesser $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ insbesondere so angenommen, dass ihre gemeinsame Mitte $m$ zugleich der Schwerpunkt des Dreieckes $abc$ ist, so ist der Kegelschnitt $m^2$ nothwendig eine Ellipse, und das Dreieck

gehört zu den ihr eingeschriebenen Dreiecken von grösstem Inhalt, so dass also die Tangenten der Ellipse in den Ecken des Dreiecks den resp. Gegenseiten parallel sind; zugleich sind also auch die Tangenten der Ellipse in den andern Endpunkten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Durchmesser beziehlich den Seiten $bc$, $ca$, $ab$ parallel. Der Kreis $abc$ schneidet die Ellipse noch in irgend einem vierten Punkte $d$. Nach einem Satze von *Poncelet* hat jeder durch die Endpunkte der Sehne $ad$ gehende Kreis mit der Ellipse eine Sehne gemein, welche der Sehne $bc$ parallel ist; und somit auch umgekehrt: die Endpunkte jeder mit $bc$ parallelen Sehne der Ellipse liegen mit den zwei festen Punkten $a$ und $d$ in einem Kreise. Da nun die Tangente im Punkte $\alpha$ der Sehne $bc$ parallel ist, so berührt der durch $a$, $d$ und $\alpha$ gelegte Kreis die Ellipse in $\alpha$ und demzufolge geht der die Ellipse in $a$ osculirende Kreis durch den Punkt $d$. Gleicherweise folgt, dass die Krümmungskreise der Ellipse in $b$ und $c$ ebenfalls durch den nämlichen Punkt gehen. Also:

Die drei Krümmungskreise der Ellipse in den Ecken eines ihr eingeschriebenen grössten Dreieckes $abc$ schneiden dieselbe in einem und demselben Punkte $d$ der Ellipse, welcher allemal mit den drei Ecken zusammen in einem Kreise liegt. Und umgekehrt: durch jeden Punkt $d$ der Ellipse gehen je drei Krümmungskreise derselben, welche sie in den Ecken eines ihr eingeschriebenen grössten Dreiecks osculiren, und zwar liegen diese Ecken mit jenem Punkte allemal in einem Kreise. Diesem Satze kann man noch folgendes hinzufügen: In Bezug auf jeden Punkt der Ellipse giebt es je drei solche Durchmesser derselben, $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ welche von dem Punkte aus unter Winkeln gesehen werden, die beziehlich denen gleich sind, welche die Durchmesser mit den ihnen conjugirten Durchmessern bilden. Die nämlichen drei Durchmesser entsprechen in gleichem Sinne zugleich auch dem Punkte $\delta$, dem anderen Endpunkt des durch $d$ gehenden Ellipsendurchmessers, und ihre Endpunkte in gehöriger Ordnung genommen sind allemal die Ecken zweier grössten Dreiecke $abc$, $\alpha\beta\gamma$ in der Ellipse, deren umschriebene Kreise beziehlich durch die Punkte $d$, $\delta$ gehen. Nämlich das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ hat mit dem ersten, $abc$, den Punkt $m$ zugleich zum Schwerpunkt, und alles was vom Dreiecke $abc$ und dem ihm entsprechenden Punkte $d$ gesagt worden, gilt gleicherweise vom Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und dem Punkte $\delta$.

III.

Da die Tangenten der Ellipse $m^2$ in den Ecken jedes ihr eingeschriebenen grössten Dreieckes $abc$ den resp. Gegenseiten parallel sind, so sind die Normalen

in den Ecken zugleich die Höhen des Dreieckes und treffen sich desshalb in einem Punkte $p$. Die durch diesen Punkt gehende vierte Normale der Ellipse hat gerade den vorhin genannten Punkt $\delta$ zum Fusspunkt, was übrigens schon *Joachimsthal* bemerkt hat. Wie ferner bekannt liegen die Fusspunkte aller vier Normalen $abc\delta$ sammt dem Punkte $p$ und dem Mittelpunkte $m$ der Ellipse in einer gleichseitigen Hyperbel, etwa $h^2$, deren Asymptoten den Ellipsenaxen $X$, $Y$ parallel sind. Dazu kommt nun noch, dass die Hyperbel den Ellipsenhalbmesser $m\delta$ zum Durchmesser hat, so dass ihr Mittelpunkt $h$ in seiner Mitte liegt. In diesem Betracht ergiebt sich, alles zusammengefasst, folgendes:

Die je drei Normalen der Ellipse $m^2$ in den Ecken jedes ihr eingeschriebenen grössten Dreieckes $abc$ treffen sich in einem Punkte $p$, und die durch diesen Punkt gehende vierte Normale hat denjenigen Punkt $\delta$ zum Fusspunkte, welcher mit den Ecken des Gegendreiecks $\alpha\beta\gamma$ in einem Kreise liegt, oder dessen Gegenpunkt $d$ mit $abc$ in einem Kreise liegt. Durch die fünf Punkte $abc\delta p$ und durch den Mittelpunkt $m$ der Ellipse geht eine gleichseitige Hyperbel $h^2$, deren Asymptoten allemal den Ellipsenaxen $X$, $Y$ parallel sind, und welche den Ellipsenhalbmesser $m\delta$ zum Durchmesser, also ihren Mittelpunkt $h$ in dessen Mitte hat. Die allen grössten Dreiecken auf diese Weise entsprechenden gleichseitigen Hyperbeln haben demnach zum Ort ihrer Mittelpunkte eine zweite Ellipse, etwa $m_1^2$, welche der gegebenen $m^2$ ähnlich, mit ihr ähnlich liegend und concentrisch ist und halb so grosse Dimensionen hat, als dieselbe; auch sind sämmtliche grössten Dreiecke $abc$ dieser zweiten Ellipse umschrieben, und zwar sind sie die kleinsten ihr umschriebenen Dreiecke, indem die Seiten derselben in ihren Mitten berührt werden, so dass also $m_1^2$ zugleich der Ort der Mitten der Seiten aller grössten Dreiecke in $m^2$ ist; und umgekehrt:

Zieht man durch die Mitte $h$ irgend eines Halbmessers $m\delta$ der gegebenen Ellipse $m^2$ zwei ihren Axen parallele Gerade und denkt sich die gleichseitige Hyperbel $h^2$, welche dieselben zu Asymptoten und jenen Halbmesser zum Durchmesser hat, so schneidet sie die Ellipse, ausser im Punkte $\delta$ allemal noch in den Ecken $abc$ eines derselben eingeschriebenen grössten Dreieckes. Hieraus ist ersichtlich, auf welche Weise zu jedem gegebenen Punkte $\delta$ oder $d$ das demselben im obigen Sinne zugehörige Dreieck $abc$ bestimmt, und zu finden ist.

Jeder Punkt $x$ in der gegebenen Ellipse $m^2$ ist einerseits Ecke eines einzigen grössten Dreieckes, und andrerseits ist er je einmal $\delta$ oder $d$ im

obigen Sinne genommen, d. h. er ist der vierte Fusspunkt $\delta$ zu den Ecken *abc* eines bestimmten grössten Dreieckes und er liegt (als $d$) mit den Ecken eines bestimmten anderen grössten Dreieckes in einem Kreise. Die Normale der Ellipse im Punkte $x$ schneidet in der That den Ort der Höhenpunkte der Dreiecke *abc*, welcher eine Ellipse ($m_2$) ist, in zwei Punkten $p$, welche den zwei verschiedenen Umständen $x = \delta$ und $x = d$ beziehlich entsprechen.

Die der Ellipse $m^2$ eingeschriebenen grössten Dreiecke sind zu vier und vier einander congruent. Die Mittelpunkte der vier solchen Dreiecken entsprechenden gleichseitigen Hyperbeln sind die Ecken eines der Ellipse $m_2^1$ eingeschriebenen Rechtecks, dessen Seiten auf den Asymptoten der vier Hyperbeln liegen. Wenn insbesondere eine Ecke des Dreiecks *abc* in einen Axenscheitel der Ellipse $m^2$ fällt, so fallen die vier Dreiecke paarweise zusammen, so dass nur zwei gleiche Gegendreiecke stattfinden, und dabei geht die, dem einen oder dem anderen derselben zugehörige gleichseitige Hyperbel in zwei Gerade, ihre Asymptoten, über.

Anmerkung. Man vergleiche mit den Sätzen dieses und des vorigen Paragraphen: dieses Journal Bd. 30, „Lehrsätze und Aufgaben“ No. 6. Bd. 32, „Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung“ No. 1 und Bd. 49, „Ueber algebraische Curven und Flächen“ I, 3.

## IV.

So weit die obigen Sätze die gleichseitige Hyperbel betreffen, lassen sich aus ihnen folgende, etwas allgemeinere ableiten:

Der durch die Endpunkte irgend eines Halbmessers etwa *me* der gegebenen Ellipse $m^2$ und durch die Ecken irgend eines derselben eingeschriebenen grössten Dreieckes *abc* bestimmte Kegelschnitt ist jedesmal eine solche Hyperbel, deren Asymptoten je einem Paar conjugirter Durchmesser der Ellipse parallel sind, und welche allemal jenen Halbmesser zum Durchmesser und somit dessen Mitte $h$ zum Mittelpunkt hat. Verbindet man in diesem Sinne nach einander alle grössten Dreiecke mit demselben Halbmesser *me*, so entsteht eine Schaar concentrischer Hyperbeln, die *me* zum gemeinsamen Durchmesser haben, und deren Asymptoten respective den gesammten Paaren conjugirter Durchmesser der Ellipse parallel sind. Und werden alle Halbmesser mit demselben Dreieck *abc* verbunden, so entsteht ein Büschel von Hyperbeln, welche die vier Punkte *abcm* gemein haben, und deren Mittelpunkte in der Ellipse $m_1^2$ liegen, mit deren conjugirten Durchmessern ihre Asymptoten be-

ziehlich parallel sind. Umgekehrt: Zieht man durch die Mitte $h$ eines beliebigen Halbmessers $me$ der gegebenen Ellipse mit irgend einem Paar conjugirter Durchmesser derselben zwei Gerade parallel und sieht dieselben als Asymptoten einer durch die Endpunkte des Halbmessers gehenden Hyperbel an, so schneidet dieselbe die Ellipse ausser im Punkte $e$ allemal noch in den Ecken eines ihr eingeschriebenen grössten Dreieckes $abc$; werden die Asymptoten nach einander allen Paaren conjugirter Durchmesser parallel angenommen, so erhält man alle grössten Dreiecke, jedes einmal, aber nur einmal.

Alle durch die Ecken und den Schwerpunkt $m$ eines beliebigen gegebenen Dreieckes gehenden Kegelschnitte sind Hyperbeln; ihre Mittelpunkte liegen in derjenigen Ellipse $m_1^2$, welche durch die Mitten der drei Seiten geht und den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat, und ihre Asymptoten sind einzeln den verschiedenen Paaren conjugirter Durchmesser dieser Ellipse parallel.

## V.

Für den besonderen Fall, wo die gegebene Ellipse $m^2$ in einen Kreis übergeht, wobei alle grössten Dreiecke gleichseitig und congruent sind, modificiren sich einige der vorstehenden Sätze.

Ein gegebener Kreis $m^2$ wird von jeder gleichseitigen Hyperbel $h^2$, welche irgend einen Radius $me$ desselben zum Durchmesser hat, allemal in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks $abc$ geschnitten; oder: die Ecken jedes dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks liegen mit den Endpunkten $me$ jedes beliebigen Radius desselben in einer gleichseitigen Hyperbel, welche den Radius zum Durchmesser hat. Und umgekehrt: zieht man in einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel irgend einen Durchmesser $me$ und beschreibt mit demselben um einen seiner Endpunkte $m$ einen Kreis $m^2$, so schneidet dieser die Hyperbel ausser im Punkte $e$ allemal noch in den Ecken eines gleichseitigen Dreieckes, welches den Punkt $m$ zum Schwerpunkt hat.

Von den drei Ecken jedes der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks liegen immer zwei mit dem Schwerpunkte $m$ im nämlichen Hyperbelzweig, und die dritte Ecke und der Punkt $e$ liegen im anderen Zweig.

Jeder in der gegebenen Hyperbel beliebig gewählte Punkt $x$ ist:

1) Der Schwerpunkt von nur einem einzigen eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck;

2) ist er nur einmal Punkt *e*, d. h. er liegt mit den Ecken nur eines einzigen solchen Dreiecks in einem Kreise.

Dagegen ist er

3) Ecke von drei verschiedenen solchen Dreiecken, und zwar liegt beim einen Dreieck der Schwerpunkt *m* (und noch eine andere Ecke) mit ihm im nämlichen Zweige, wogegen bei den beiden anderen Dreiecken der Punkt *e* mit ihm im gleichen Zweige der Hyperbel liegt.

Die drei Dreiecke des letzten Falls sind elementar zu bestimmen; nämlich ihre drei Schwerpunkte *m* liegen mit dem andern Endpunkt $x_1$ des durch $x$ gehenden Hyperbeldurchmessers zusammen in einem Kreise, dessen Mittelpunkt $\mu$ in diesem Durchmesser $xx_1$ so liegt, dass $x_1\mu = \frac{1}{3}x_1x$. Daraus ist leicht zu sehen, dass die beiden letzten Dreiecke imaginär werden, wenn der Punkt $x$ in einem bestimmt begränzten Bogen des einen oder des anderen Hyperbelzweiges liegt; diese Bogen werden durch die Scheitel gehälftet und für ihre Endpunkte berührt der genannte Hülfskreis $\mu^2$ den zugehörigen Hyperbelzweig.

## VI.

Hält man rücksichtlich der anfänglich betrachteten drei Geraden oder Durchmesser $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ etwa die drei Endpunkte *abc* in ihrer Lage fest, während der Mittelpunkt *m* sich immer weiter, und zuletzt ins Unendliche entfernt, wobei zugleich auch die drei anderen Endpunkte $\alpha\beta\gamma$ der Durchmesser ins Unendliche fallen, die Durchmesser parallel werden und der Kegelschnitt $m^2$ in eine Parabel übergeht, so bleibt noch von den dortigen vier Kreisen *abc*, $a\beta\gamma$, $b\gamma\alpha$, $c\alpha\beta$ nur der erste als eigentlicher Kreis bestehen, wogegen jeder der drei anderen in zwei Gerade zerfällt, wovon die eine ganz im Unendlichen liegt, die andere aber durch den ihr zugehörigen der Punkte *abc* geht, und zwar schneiden sich diese drei Geraden mit dem Kreise *abc* zusammen in einem Punkte *d* der Parabel. Die drei Geraden *ad*, *bd*, *cd* als Repraesentanten der drei Kreise haben die Eigenschaft (und sind dadurch bestimmt), dass sie die Durchmesser unter gleichen Winkeln schneiden wie die ihnen beziehlich gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks *abc*, d. h. dass die Gerade *ad* und die Seite *bc* mit jedem Durchmesser ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Grundlinie im letztern liegt, ebenso *bd* und *ac*, *cd* und *ab*. Daher ist von den zwei Strahlen, welche die Winkel zwischen jeder Geraden und ihrer Gegenseite hälften, der eine zu den Durchmessern senkrecht, und der andere denselben parallel. Daraus ergeben sich folgende Sätze:

Nimmt man in einer gegebenen Parabel irgend ein Dreieck *abc* an, und zieht durch dessen Ecken drei Gerade *ad, bd, cd* so, dass sie und die resp. Gegenseiten *bc, ac, ab* mit den Parabeldurchmessern gleiche Gegenwinkel bilden, so treffen sich die drei Geraden jedesmal in irgend einem Punkte *d* der Parabel, durch welchen zugleich auch der dem Dreiecke *abc* umschriebene Kreis geht. Durch Umkehrung folgt:

Liegen die Ecken eines vollständigen Vierecks *abcd* in einem Kreise, so sind von den drei festen Paaren von Strahlen, welche die Winkel zwischen den drei Paar Gegenseiten hälften, drei und drei parallel, und zwar sind sie beziehlich den Axen (oder Durchmessern) der dem Viereck umschriebenen beiden Parabeln parallel, so dass also diese Axen zu einander senkrecht sind wie jedes Strahlenpaar. Ferner findet noch ein bemerkenswerther Umstand statt: dass die beiden Parabelaxen einander im Schwerpunkt der vier Ecken des Vierecks schneiden; oder: der Schwerpunkt der je vier Punkte, welche eine gegebene Parabel mit irgend einem Kreise gemein hat, fällt immer in die Parabelaxe. Auch wenn von den vier Punkten zwei, oder alle vier imaginär sind, besteht der Satz gleicherweise; der Schwerpunkt bleibt reell und ist geometrisch zu bestimmen. Insbesondere folgt daraus:

Osculirt ein Kreis die Parabel im Punkte *a* und schneidet sie nächstdem im Punkte *b*, so wird die Sehne *ab* von der Parabelaxe stets im ersten Viertelspunkte *e* von *a* aus geschnitten, so dass $ae = \frac{1}{3}eb$ ist; oder:

Zieht man von einem beliebigen Punkte *a* der Parabel diejenige Sehne *ab*, welche die Axe unter gleichem Winkel schneidet, wie die zugehörige Tangente, so ist die Sehne allemal viermal so lang, als die bis an die Axe genommene Tangente, oder, so wird die Sehne von der Axe im ersten Viertelspunkte geschnitten. Es folgt weiter:

Befindet sich unter den Gliedern eines Kegelschnittbüschels ein Kreis, mögen übrigens von den Grundpunkten des Büschels alle vier, oder nur zwei, oder gar keiner reell sein, so sind die Axen sämmtlicher Kegelschnitte in zwei Abtheilungen parallel, und zwar beziehlich den Axen der zwei zum Büschel gehörigen Parabeln parallel; und die Mittelpunkte aller Kegelschnitte liegen in einer gleichseitigen Hyperbel, welche die Axen der beiden Parabeln zu Asymptoten hat. Sind alle vier Grundpunkte reell, so sind die drei Paar Gegenseiten des durch sie bestimmten Vierecks als specielle Glieder des Büschels anzusehen, so wie die ihre Winkel hälftenden Strahlen als ihre Axen, was mit dem Vorstehenden stimmt; die Gegenseiten heissen conjugirte

gemeinschaftliche Sehnen der Kegelschnitte; sind zwei oder vier Grundpunkte imaginär, so bleibt immer ein Paar conjugirter Sehnen reell.

Sind *ab* und *cd* ein Paar conjugirter gemeinschaftlicher Sehnen eines Kreises und irgend eines anderen Kegelschnittes, so bilden sie mit jeder Axe des letzteren ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie in der Axe liegt; und denkt man sich den ganzen Kreisbüschel, welcher mit dem Kegelschnitt die erste Sehne *ab* gemein hat, so müssen demzufolge alle zweiten Sehnen *cd* unter sich parallel sein, was der oben citirte Satz von *Poncelet* ist. Wenn insbesondere *ab* Tangente des Kegelschnitts ist, diesen etwa in *a* berührt, so ist es danach leicht unter den Kreisen denjenigen zu bestimmen, welcher den Kegelschnitt in *a* osculirt; nämlich man zieht aus *a* diejenige Sehne *ad*, welche die eine oder die andere Axe des Kegelschnitts unter gleichem Winkel schneidet wie die Tangente, so liegt ihr anderer Endpunkt *d* im verlangten Kreise.

## VII.

Die bisherige Betrachtung ist nur ein interessanter specieller Fall einer allgemeinen Auffassung, welche hier kurz angedeutet werden mag. Nämlich zunächst bleiben alle Sätze unverändert, wenn die Kreise durch irgend welche ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte ersetzt werden. Sodann ist auch dies nur ein specieller Fall der folgenden Betrachtung:

Zieht man in einer Ebene durch einen Punkt m drei Gerade $aa$, $b\beta$, $c\gamma$ beliebig, schneidet dieselben mit einer vierten Geraden *M* beziehlich in den Punkten abc, und bestimmt sodann ihre Endpunkte *a* und $\alpha$, *b* und $\beta$, *c* und $\gamma$ so, dass die je vier Punkte $am\alpha a$, $bm\beta b$, $cm\gamma c$ harmonisch sind, (gleichviel ob m oder a zwischen *a* und $\alpha$ etc. liege) so liegen die sechs Endpunkte allemal in irgend einem Kegelschnitte $abc\alpha\beta\gamma = m^2$, in Bezug auf welchen der Punkt m und die Gerade *M* sich als Pol und Polare entsprechen. Und ferner: Wählt man auf der Geraden *M* ein Paar Punkte *r* und *s* beliebig, jedoch beide reell oder beide imaginär, so schneiden sich sowohl die vier Kegelschnitte $rsabc$, $rsa\beta\gamma$, $rsb\gamma\alpha$, $rsc\alpha\beta$ in einem Punkte *d* als auch die vier Kegelschnitte $rs\alpha\beta\gamma$, $rs\alpha bc$, $rs\beta ca$, $rs\gamma ab$ in einem Punkte $\delta$, und beide Punkte liegen im vorgenannten Kegelschnitt $m^2$, und die durch sie gelegte Gerade $d\delta$ geht durch den Punkt m, und wird von der Geraden *M* in einem Punkte b so geschnitten, dass $dm\delta b$ vier harmonische Punkte sind. Und umgekehrt:

Sind in einer Ebene ein Kegelschnitt $m^2$ und irgend zwei Punkte *r* und *s*

gegeben, und man zieht durch den Pol $m$ der durch die Punkte gehenden Geraden $rs$ drei beliebige Sehnen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ des Kegelschnitts, legt sodann durch je drei Endpunkte verschiedener Sehnen und durch die zwei gegebenen Punkte einen Kegelschnitt, was im Ganzen acht Kegelschnitte giebt, so schneiden sich dieselben zu vier und vier in zwei Punkten $d$ und $\delta$, welche im gegebenen Kegelschnitte liegen und zwar die Endpunkte einer vierten durch denselben Pol $m$ gehenden Sehne sind. Von solchen vier Sehnen ist jede gleicherweise durch die anderen drei bestimmt.

Dieser Satz lässt sich noch mehrfach umkehren und anders aussprechen, und gewährt wie der beschränktere in I. zahlreiche Folgerungen.

Beachtet man z. B. von den acht Kegelschnitten nur die beiden $rsabc = A^2$ und $rs\alpha\beta = B^2$, und lässt den Endpunkt $c$ sich ändern, während die Sehnen $a\alpha$, $b\beta$ sowie die gegebenen Elemente fest bleiben, so kann man sagen: Gehen zwei Kegelschnitte $A^2$, $B^2$ beziehlich durch $rsab$, $rs\alpha\beta$ und zudem beide noch durch irgend einen Punkt $c$ des gegebenen Kegelschnittes $m^2$, so liegt auch ihr vierter Schnittpunkt $d$ stets in diesem Kegelschnitt. Oder: Jeder durch $rsab$ gehende Kegelschnitt $A^2$ schneidet den gegebenen Kegelschnitt $m^2$ in zwei solchen Punkten $c$ und $d$, welche mit den vier Punkten $rs\alpha\beta$ in irgend einem Kegelschnitt $B^2$ liegen. Da aber vermöge der erwähnten harmonischen Eigenschaft die Sehne $ab$ und $\alpha\beta$ sowohl als $a\beta$ und $b\alpha$ sich auf der Geraden $M = rs$ schneiden, etwa beziehlich in den Punkten $p$ und $q$, so kann man auch sagen:

Sind $a$ und $\alpha$, $b$ und $\beta$, $p$ und $q$ die drei Paar Gegenecken irgend eines gegebenen vollständigen Vierseits, und man nimmt in einer der drei Diagonalen, etwa in $pq$ zwei Punkte $rs$ willkürlich an, so haben die drei Vierecke $rsab$, $rs\alpha\beta$, $ab\alpha\beta$, so wie auch die drei Vierecke $rsa\beta$, $rsb\alpha$, $ab\alpha\beta$ die Eigenschaft, dass jede zwei Kegelschnitte, die je zweien derselben beziehlich umschrieben sind, sich in zwei solchen neuen Punkten $c$ und $d$ schneiden, durch welche allemal auch ein dem dritten Viereck umschriebener Kegelschnitt geht. Oder dass jede drei den Vierecken resp. umschriebene und durch irgend einen gegebenen Punkt $c$ gehende Kegelschnitte, immer noch einen bestimmten anderen Punkt $d$ gemein haben. Oder, was im Grunde dieselbe ist: Es ist ein beliebiges Dreieck $amb$ gegeben, und man bestimmt in zwei Seiten desselben etwa in $ma$ und $mb$ in jeder irgend ein Paar zu ihren Endpunkten zugeordnete harmonische Punkte, resp. $a$, $\alpha$ und $b$, $\beta$, und nimmt in der dritten Seite $ab$ ein Paar Punkte $rs$ willkürlich an, so haben die zwei-

mal drei Vierecke $rsab$, $rs\alpha\beta$, $ab\alpha\beta$ und $rsa\beta$, $rsb\alpha$, $ab\alpha\beta$ die nämliche genannte Eigenschaft.

Wenn vorhin, wo der Kegelschnitt $m^2$ gegeben, die Sehne $b\beta$ der Sehne $a\alpha$ unendlich nahe rückt, so folgt:

Gehen zwei Kegelschnitte $A^2$ und $B^2$ durch die gegebenen Punkte $r$ und $s$, so wie durch irgend einen Punkt $c$ des gegebenen Kegelschnittes $m^2$, und berühren sie diesen beziehlich in den Endpunkten $a$, $\alpha$ irgend einer durch den Pol m der Geraden $rs$ gehenden Sehne $a\alpha$, so fällt ihr vierter Schnittpunkt $d$ stets in den gegebenen Kegelschnitt. Da die Tangenten in den Berührungspunkten $a$, $\alpha$ sich in irgend einem Punkte $p$ auf der gegebenen Geraden $rs$ treffen, so folgt umgekehrt:

Sind zwei beliebige Kegelschnitte $A^2$, $B^2$ gegeben, und man legt aus irgend einem Punkte $p$ eine ihrer gemeinschaftlichen Sehnen, etwa $rs$, an jeden eine Tangente, die sie beziehlich in den Punkten $a$ und $\alpha$ berühren, so giebt es allemal einen dritten Kegelschnitt $m^2$, welcher sie in denselben Punkten berührt, und zudem durch ihre anderen beiden gemeinschaftlichen Punkte $c$ und $d$ geht.

Wenn im obigen Falle die drei durch den Pol m gehenden Sehnen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ des gegebenen Kegelschnitts $m^2$ einander unendlich nahe rücken, so dass die Endpunkte $b$ und $c$ als mit $a$, $\beta$ und $\gamma$ als mit $\alpha$ vereint anzusehen, so wird der Kegelschnitt $m^2$ von dem Kegelschnitte $A^2$ osculirt, und vom Kegelschnitte $B^2$ in $\alpha$ berührt, und in $a$ geschnitten, und nebstdem gehen alle Kegelschnitte noch durch einen und denselben Punkt $d$. Hieraus ergiebt sich die Lösung der Aufgabe: Sind ein Kegelschnitt $m^2$, in demselben irgend ein Punkt $a$ und nebstdem zwei beliebige Punkte $r$, $s$ gegeben, so soll derjenige Kegelschnitt $A^2$ gefunden werden, welcher durch die drei Punkte geht, und im ersten Punkte den gegebenen Kegelschnitt osculirt. Nämlich man construirt zuerst den der Geraden $rs$ in Bezug auf den Kegelschnitt entsprechenden Pol m, zieht durch ihn aus dem gegebenen Punkte $a$ die Sehne $a\alpha$, legt sodann durch $rsa\alpha$ denjenigen Kegelschnitt $B^2$, welcher den gegebenen in $\alpha$ berührt, so wird er ihn noch in irgend einem andern Punkte $d$ schneiden; endlich legt man durch $d$ und $rsa$ denjenigen Kegelschnitt, welcher den gegebenen in $a$ berührt, so osculirt er ihn daselbst und ist der verlangte Kegelschnitt $A^2$. (Der Punkt $d$ kann übrigens noch einfacher gefunden werden, indem man die Geraden $ra$, $sa$ zieht, die den Kegelschnitt $m^2$ zum zweiten Male, etwa in $e$, $f$ schneiden, ferner die Gerade $ef$, die der Geraden

*rs* etwa in *q* begegnet, so trifft die Gerade *qa* den Kegelschnitt $m^2$ im Punkt *d*.)

Irgend drei Punkte *a*, *b*, *c* des gegebenen Kegelschnittes $m^2$ und die Tangenten *A*, *B*, *C* in denselben bestimmen ein Paar zusammengehörige ein- und umschriebene Dreiecke *abc* und $a_1b_1c_1$ (= Dreiseit *ABC*), deren einander-gegenüberstehende Seiten *ab* und *C* $(=a_1b_1)$ *ac* und *B*, *bc* und *A* sich in drei Punkten *u*, *v*, *w* einer Geraden *M* schneiden, und durch deren entsprechende Ecken *c* und $c_1$, *b* und $b_1$, *a* und $a_1$ drei sich in einem Punkte m treffende Geraden *U*, *V*, *W* gehen, welche beziehlich die Polaren jener Punkte sind, so wie auch m der Pol der Geraden *M* ist. Die drei Geraden schneiden den Kegelschnitt zum zweiten Mal in drei Punkten $\gamma$, $\beta$, $\alpha$, welche mit den zugehörigen Tangenten gleicherweise ein Paar zusammengehörige Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ bestimmen, deren entsprechende Seiten sich in denselben Punkten *u*, *v*, *w* auf der Geraden *M* schneiden, und deren entsprechende Ecken in den nämlichen durch den Punkt m gehenden drei Geraden *U*, *V*, *W* liegen.

Auf diese Weise gehört also zu jedem dem Kegelschnitt $m^2$ eingeschriebenen Dreieck *abc* ein bestimmter Pol m nebst dessen Polaren *M*, aber nicht umgekehrt, denn sind m und *M* gegeben, so gehören sie in diesem Sinne nicht allein zu dem einen Dreieck *abc* und seinem Gegendreieck $\alpha\beta\gamma$ (nebst den zugehörigen umschriebenen Dreiecken $a_1b_1c_1$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$), sondern sie gehören zugleich zu unendlich vielen solchen Dreieckspaaren, welche insgesammt folgende Eigenschaften haben:

Zu jedem Pol m und zu seiner Polaren *M* rücksichtlich des gegebenen Kegelschnitts $m^2$ gehören im angegebenen Sinne eine Schaar dem Kegelschnitte eingeschriebener Dreiecke *abc*, jeder Punkt des Kegelschnittes ist Ecke eines solchen Dreieckes, aber nur eines einzigen. Die sämmtlichen Dreiecke sind zugleich einem bestimmten anderen Kegelschnitte $m_1^2$ umschrieben, welcher den gegebenen in zwei auf der Geraden *M* liegenden Punkten berührt, so dass diese Gerade die (reelle oder ideelle) Berührungssehne beider Kegelschnitte ist. Liegt der Pol m innerhalb des gegebenen Kegelschnittes, so sind die Berührungspunkte imaginär, also *M* die ideelle Berührungssehne der Kegelschnitte, aber in diesem Falle sind alle Theile jedes Dreieckes reell; liegt hingegen der Pol m ausserhalb der Kegelschnitte, so berühren sich diese reell, und *M* schneidet sie in beiden Berührungspunkten, aber alsdann ist von jedem Dreieck nur eine Ecke und deren Gegenseite reell, dagegen die andern Ecken und Seiten imaginär. (Hieraus folgt noch für die Hyperbel, dass bei den ihr

eingeschriebenen Dreiecken vom grössten Inhalt gleicherweise nur je eine Ecke und deren Gegenseite reell, dagegen die zwei andern Ecken und Seiten imaginär sind. Die reellen Seiten berühren sämmtlich eine zweite Hyperbel, welche die gegebene umschliesst, mit ihr die Asymptoten gemein, aber nur halb so grosse Axen als dieselbe hat.) Die Seiten jedes Dreiecks $ab$, $ac$, $bc$ werden von dem zweiten Kegelschnitt $m_1^2$ in denjenigen Punkten $u_1$, $v_1$, $w_1$ berührt, in welchen sie von den correspondirenden Geraden $U$, $V$, $W$ geschnitten werden, so dass also der Berührungspunkt jeder Seite und ihr Schnitt mit der Geraden $M$ zu ihren Endpunkten zugeordnet harmonisch sind, d. h. $uau_1b$, $cvv_1c$, $wbw_1c$ sind je vier harmonische Punkte; oder die Berührungspunkte sind auch in den Geraden $U$, $V$, $W$ harmonisch bestimmt, nämlich werden diese von der Geraden $M$ in c, b, a geschnitten, so sind $cmu_1\gamma$, $bmv_1\beta$, $amw_1\alpha$ je vier harmonische Punkte. Die den Dreiecken $abc$ zugehörigen umschriebenen Dreiecke $a_1b_1c_1$ sind insgesammt einem dritten Kegelschnitt $m_2^2$ eingeschrieben, welcher sich mit den beiden ersten in den nämlichen zwei Punkten auf der Geraden $M$ berührt.

Nach diesen Angaben ist nunmehr dasjenige Dreieck $abc$, welches einen gegebenen Punkt, etwa $a$ zur Ecke hat, leicht zu finden. Nämlich man legt in $a$ an den gegebenen Kegelschnitt $m^2$ die Tangente $A$, construirt zu ihrem Schnittpunkte $w$ mit der gegebenen Geraden $M$ die Polare $W$, welche durch den Pol m geht, den Kegelschnitt zum zweiten Male in $\alpha$ und die Gerade $M$ in a schneidet, sucht sodann zu den drei Punkt $am\alpha$ den vierten, a zugeordneten harmonischen Punkt $w_1$, so schneidet die Gerade $ww_1$ den Kegelschnitt in den beiden andern Ecken $bc$ des verlangten Dreiecks.

## VIII.

Wählt man in der gegebenen Geraden $M$ zwei Punkte $r$, $s$ beliebig, so bestimmen sie mit den Ecken jedes der genannten Dreiecke $abc$ je einen Kegelschnitt $(D^2)$, welcher den gegebenen Kegelschnitt $m^2$ noch in einem vierten Punkte $d$ schneidet, und sodann giebt es allemal drei Kegelschnitte $A^2$, $B^2$, $C^2$, welche sämmtlich durch die drei Punkte $rsd$ gehen und einzeln den gegebenen Kegelschnitt in den Ecken des Dreiecks $abc$ osculiren. Oder: Fixirt man eines der genannten Dreiecke $abc$ nebst irgend einem vierten Punkte $d$ des gegebenen Kegelschnitts $m^2$, so schneiden die drei Kegelschnittbüschel $B(A^2)$, $B(B^2)$, $B(C^2)$, welche durch $d$ gehen, und den gegebenen Kegelschnitt beziehlich in $a$, $b$, $c$ osculiren, die gegebene Gerade $M$ im näm-

lichen Punktsystem Involution, d. h. durch die Punkte $r$ und $s$, in welchen je ein Strahl des einen Büschels die Gerade $M$ schneidet, geht auch je ein Strahl des zweiten anderen Büschels, und im gleichen Punktsystem wird die Gerade $M$ ferner auch von dem durch alle vier Punkte $abcd$ gehenden vierten Kegelschnitte $B\,D^2$ geschnitten.

Und umgekehrt:

Sind irgend ein Kegelschnitt $m^2$, in demselben irgend ein Punkt $d$, und ausserdem zwei willkürliche Punkte $r$, $s$ gegeben, so giebt es im Allgemeinen drei reelle Kegelschnitte $A^2$, $B^2$, $C^2$, welche durch die drei Punkte gehen und den gegebenen Kegelschnitt einzeln in drei Punkten $a$, $b$, $c$ osculiren und zwar liegen diese drei Punkte allemal mit den gegebenen in einem Kegelschnitte $D^2$; ferner sind die drei Osculationspunkte die Ecken eines dem gegebenen Kegelschnitte eingeschriebenen solchen Dreieckes $abc$, welches die durch die Punkte $rs$ gehende Gerade $M$ zur zugehörigen Polaren hat, so dass seine Seiten und die Tangenten in den Gegenecken sich auf dieser Geraden schneiden. Bleiben die Punkte $rs$ fest, während der Punkt $d$ den gegebenen Kegelschnitt $m^2$ durchläuft, so entsteht eine Schaar Dreiecke $abc$, welche sämmtlich die Gerade $M$ zur Polaren haben und welche alle einem neuen Kegelschnitt $m_1^2$ umschrieben sind, der den gegebenen Kegelschnitt in zwei auf der Geraden $M$ liegenden Punkten berührt. Dabei entspricht also jedem Punkt $d$ ein bestimmtes Dreieck $abc$ und auch umgekehrt. Aendern aber die Punkte $r$, $s$ ihre Lage auf der festen Geraden $M$ (wobei die Schaar der Dreiecke unverändert bleibt), so entspricht im Allgemeinen jedem Punkte $d$ ein anderes Dreieck $abc$, als zuvor; bleibt insbesondere einem Punkte $d$ dasselbe Dreieck entsprechend, so findet dasselbe für alle statt, und zwar tritt dieser Fall dann ein, wenn das neue Punktenpaar mit dem ersten zu dem Punktsystem gehört, in welchem die Gerade $M$ von dem Kegelschnittbüschel $B(D^2)$ der durch irgend einen Punkt $d$ und die Ecken des ihm zuvor entsprechenden Dreiecks $abc$ geht, geschnitten wird.

Sind die Punkte $r$, $s$ und $d$ gegeben, so ist das entsprechende Dreieck $abc$, in dessen Ecken der gegebene Kegelschnitt $m^2$ von den genannten drei Kegelschnitten $A^2$, $B^2$, $C^2$ osculirt wird, wie folgt zu bestimmen: Durch den Pol $m$ der Geraden $M$, $(rs)$ ziehe man die Gerade $dm$, die den gegebenen Kegelschnitt $m^2$ zum zweiten Male in $\delta$ und die Gerade $M$ in $b$ schneidet, und nehme auf ihr den Punkt $h$ so an, dass $bmhd$ vier harmonische Punkte sind (dieser Punkt $h$ liegt allemal in dem oben erwähnten Kegelschnitte $m_1^2$).

Ferner suche man auf der Geraden $M$ dasjenige Paar Punkte $x$ und $y$, welche einerseits zu den Punkten $r$, $s$ zugeordnet harmonisch (also $rxsy$ harmonisch) und andrerseits zugleich conjugirte Pole in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt sind (so dass die Polare $X$ von $x$ durch $y$, und die Polare $Y$ von $y$ durch $x$ geht), und ziehe sodann die Geraden $hx$ und $hy$; so giebt es einen Kegelschnitt $h^2$, welcher diese Gerade in den Punkten $x$ und $y$ berührt, zudem durch die Punkte m und $\delta$ geht, und welcher den gegebenen Kegelschnitt ausser in $\delta$ in den Ecken des gesuchten Dreiecks $abc$ schneidet. — Beachtet man in der Geraden $M$ alle Paare conjugirter Pole $x$ und $y$ in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt $m^2$ und zieht durch jedes Paar aus demselben Punkte $h$ die Geraden $hx$ und $hy$, denen je ein Kegelschnitt $h^2$ entspricht, so entsteht eine Schaar Kegelschnitte $h^2$, welche die Punkte m, $\delta$ gemein haben, und welche den gegebenen Kegelschnitt einzeln in den Ecken der vorgenannten Dreiecke schneiden. U. s. w.

## IX.

Schliesslich ist zu bemerken, dass auch die vorstehende Betrachtung selbst nur ein specieller Fall einer allgemeinen ist, wobei statt des Kegelschnittes und der Geraden eine Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkte zu Grunde gelegt wird.

Einer Curve dritten Grades $m^3$, welche einen Doppelpunkt $d$ hat, sind unendlich viele vollständige Vierseite eingeschrieben, jede beliebige Gerade ist Seite eines solchen Vierseits, aber nur eines einzigen. Wir wollen jedes solches Vierseit durch $S^4$, seine drei Paar Gegenecken durch $a$ und $\alpha$, $b$ und $\beta$, $c$ und $\gamma$ bezeichnen, und annehmen, es liegen die drei Ecken $abc$, $a\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$, $c\alpha\beta$ in je einer Seite; alsdann enthält das Vierseit die vier Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $abc$, $\beta ca$, $\gamma ab$. In den drei Ecken jedes solchen Dreiecks wird die Curve von irgend einem Kegelschnitte berührt; und umgekehrt, jeder der Curve eingeschriebene Kegelschnitt berührt sie in den Ecken eines solchen Dreiecks, und das zugehörige Vierseit $S^4$ ist dadurch bestimmt. Die zwei Tangenten der Curve in einem Paar Gegenecken je eines Vierseits treffen sich in irgend einem dritten Punkte der Curve; umgekehrt gehen durch jeden Punkt der Curve nur je zwei Tangenten, welche sie anderwärts berühren, aber die beiden Berührungspunkte sind Gegenecken von unendlich vielen Vierseiten $S^4$.

Wählt man in der gegebenen Curve $m^3$ zwei Puncte $r$, $s$ beliebig, legt durch sie und beziehlich die Ecken der vier Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $abc$, $\beta ac$, $\gamma ab$

lassen, wie dort. Der hier an die Spitze zu stellende Elementarsatz ist folgender:

Sind in einer Ebene drei Paar parallele Gerade, $A$ und $\mathfrak{A}$, $B$ und $\mathfrak{B}$, $C$ und $\mathfrak{C}$ gegeben, wovon jedes Paar für sich betrachtet, von einem und demselben Punkte $m$ gleichweit absteht, so berühren alle sechs Geraden irgend einen Kegelschnitt $m^2$, welcher den Punkt $m$ zum Mittelpunkt hat. Fasst man zunächst die vier Dreiseite $ABC$, $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $B\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $C\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ins Auge, und bezeichnet jeden der vier Kreise, welche dem ersten eingeschrieben sind, durch $K^2$, ebenso jeden der vier Kreise, welche den übrigen Dreiseiten eingeschrieben sind, durch $K_1^2$, $K_2^2$, $K_3^2$, so hat jeder der vier Kreise $K^2$ mit dem Kegelschnitte $m^2$ ausser $A$, $B$, $C$ noch eine vierte Tangente $D$ gemein, und sodann berührt diese Tangente allemal zugleich noch je einen der vier Kreise aus jeder der drei übrigen Gruppen $K_1^2$, $K_2^2$, $K_3^2$, so dass also von den vier Gruppen von Kreisen im Ganzen vier mal vier, aus jeder Gruppe je einer, eine gemeinschaftliche Tangente $D$ haben, welche zugleich auch den Kegelschnitt $m^2$ berührt. Gleicherweise haben die den vier Dreiseiten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}BC$, $\mathfrak{B}CA$, $\mathfrak{C}AB$ eingeschriebenen Gruppen von je vier Kreisen, zu vier und vier, je aus jeder Gruppe einer, eine gemeinschaftliche Tangente $\mathfrak{D}$, die zugleich auch den Kegelschnitt $m^2$ berührt. Jeder der vier Tangenten $D$ entspricht eine der vier Tangenten $\mathfrak{D}$ in der Art, dass sie parallel sind, und gleichweit vom Punkte $m$ abstehen.

Um hiebei diejenigen Kreise anzugeben, welche sich in der Hinsicht entsprechen, dass sie eine Tangente $D$ (oder $\mathfrak{D}$) gemein haben, dienen folgende Merkmale.

Die einem Dreiseit eingeschriebenen vier Kreise unterscheiden sich in einen innern und drei äussere, und die letztern unterscheiden sich näher dadurch, dass jeder unter einer bestimmten Seite liegt.

Fixirt man nun irgend zwei der erstgenannten vier Dreiseite, etwa $ABC$ und $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, welche die Gerade $A$ gemein haben, so entspricht in jedem derselben der unter der Seite $A$ liegende Kreis dem innern Kreis im andern Dreiseit, und sodann entsprechen sich die übrigen Kreise verwechselt, d. h. dem Kreise unter $B$ entspricht der Kreis unter $\mathfrak{C}$, und der unter $C$ entspricht dem unter $\mathfrak{B}$. Diese Regel gilt gleicherweise für je zwei zusammengehörige Dreiseite.

Oder: bezeichnet man für einen Augenblick bloss den innnern Kreis im Dreiseit $ABC$ durch $K^2$, dagegen die unter den Seiten $A$, $B$, $C$ liegenden Kreise beziehlich durch $A^2$, $B^2$, $C^2$, ferner ebenso den innern Kreis im Drei-

seit $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ durch $K_1^2$ und die unter den Seiten $A$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ liegenden durch $A_1^2$, $\mathfrak{B}_1^2$, $\mathfrak{C}_1^2$, so haben die Kreise $A^2$ und $K_1^2$, $K^2$ und $A_1^2$, $B^2$ und $\mathfrak{C}_1^2$, $C^2$ und $\mathfrak{B}_1^2$ je eine neue Tangente $D$ mit dem Kegelschnitte $m^2$ gemein. Und wenn man weiter auch die Kreise in den beiden Dreiseiten $B\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $C\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gleicherweise durch $K_2^2$, $B_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$, $\mathfrak{A}_2^2$ und $K_3^2$, $C_3^2$, $\mathfrak{A}_3^2$, $\mathfrak{B}_3^2$ bezeichnet, so haben die je vier Kreise $K^2A_1^2B_2^2C_3^2$, $K_1^2A^2\mathfrak{B}_3^2\mathfrak{C}_2^2$, $K_2^2\mathfrak{A}_3^2B^2\mathfrak{C}_1^2$, $K_3^2\mathfrak{A}_2^2\mathfrak{B}_1^2C^2$ mit dem Kegelschnitt $m^2$ eine Tangente $D$ gemein.

Dabei haben je zwei sich entsprechende Kreise irgend eine der sechs gegebenen Geraden $ABC\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zur gemeinschaftlichen Tangente, und alsdann ist $D$ allemal die derselben conjugirte gemeinschaftliche Tangente der Kreise, d. h. sie sind entweder die beiden äussern oder die beiden innern gemeinschaftlichen Tangenten der letztern. Daher kann man im Einzelnen auch sagen:

Haben zwei Dreiseite $ABC$ und $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die Gerade $A$ gemein, und sind ihre übrigen Seiten beziehlich parallel, also die Dreiseite ähnlich, und man legt an jedes der vier Kreispaare $K^2$ und $A_1^2$, $A^2$ und $K_1^2$, $B^2$ und $\mathfrak{C}_1^2$, $C^2$ und $\mathfrak{B}_1^2$, wovon jedes $A$ zur gemeinschaftlichen Tangente hat, die dieser Tangente conjugirte gemeinschaftliche Tangente $D$, was vier verschiedene Gerade $D$ giebt, so berühren diese vier Gerade und die Seiten beider Dreiseite zusammen irgend einen Kegelschnitt $m^2$, dessen Mittelpunkt $m$ in derjenigen Geraden liegt, welche die Gegenecken der Seite $A$ in beiden Dreiseiten verbindet.

## XI.

Die Folgerungen aus diesem Satze sind noch zahlreicher als diejenigen aus dem Satze in I., es mögen aber von denselben nur wenige hier Platz finden.

Sieht man den Kegelschnitt $m^2$ als gegeben an, bezeichnet die Berührungspunkte der sechs Tangenten $A\mathfrak{A}B\mathfrak{B}C\mathfrak{C}$ durch $\alpha\alpha b\beta c\gamma$ und fasst etwa die beiden Dreiseite $ABC$ und $B\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ins Auge, deren Ecken beziehlich $a_1b_1c_1$ und $b_2\alpha_1\gamma_1$ heissen sollen, so sind zunächst folgende zwei Grenzfälle zu betrachten:

1) Bleiben die Tangenten $A$, $B$ fest, also auch die ihnen parallelen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ während die Tangente $C$ sich $A$ nähert, bis sie auf dieselbe fällt, und gleichzeitig auch $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{A}$, so reduciren sich die Kreise $K^2$, $B^2$ beide auf die Ecke $c_1$, ebenso $K_2^2$, $B_2^2$ auf die Ecke $\gamma_1$, und die Kreise $A^2$, $C^2$ berühren beide die Tangente $A$ nebst dem Kegelschnitte $m^2$ im Punkte $a$, und ebenso berühren die Kreise $\mathfrak{A}_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ die Tangente $\mathfrak{A}$ und den Kegelschnitt im Punkte $\alpha$. In diesem Falle sind aber die auf einander liegenden Seiten $A$ und $C$, $\mathfrak{A}$ und

$\mathfrak{C}$ nicht mehr zu unterscheiden, also auch nicht die unter ihnen liegenden Kreise $A^2$ und $C^2$, $\mathfrak{A}_2^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$; indessen sind die letztern dadurch zu erkennen, dass je nachdem die beiden Berührungspunkte $a$, $\alpha$ auf gleichen oder auf entgegengesetzten Seiten der Tangente $B$ liegen, dann auch die sich entsprechenden Kreise $A^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$, $C^2$ und $\mathfrak{A}_2^2$ beziehlich auf gleicher oder auf entgegengesetzter Seite in Rücksicht der parallelen Tangenten $A$, $\mathfrak{A}$ liegen; und zwar findet das Eine oder das Andere statt, je nachdem der Kegelschnitt Ellipse oder Hyperbel ist.

2) Bleiben dagegen die Tangenten $A$, $C$ fest, also auch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, während die Tangente $B$ sich der $A$ nähert, bis sie mit ihr zusammenfällt, so reducirt sich jeder der Kreise $K^2$, $C^2$ auf die Ecke $b_1$, und die Kreise $A^2$, $B^2$ berühren beide die Tangente $A$ und den Kegelschnitt im Punkte $a$; zugleich werden andrerseits die Kreise $\mathfrak{B}_2^2$, $\mathfrak{A}_2^2$ unendlich gross, und die Kreise $K_2^2$, $\mathfrak{C}_2^2$ einander gleich. Auch in diesem Falle sind weder die Kreise $A^2$ und $B^2$ noch $K_2^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$ zu unterscheiden, indessen sind die sich entsprechenden Kreise $B^2$ und $K_2^2$, $A^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$ dadurch bestimmt, dass sie in Bezug auf die sich kreuzenden Geraden $A$ und $C$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ entweder in einander entsprechenden oder nicht entsprechenden Winkeln $(AC)$ und $(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$, oder wofern die Winkel nicht gerade Rechte sind, in gleichen oder ungleichen Winkeln liegen, je nachdem der Berührungspunkt $a$ rücksichtlich des Parallelogramms $AC\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ beziehlich in der eigentlichen Seite $A$ oder in ihrer Verlängerung liegt, oder je nachdem der Kegelschnitt $m^2$ Ellipse oder Hyperbel ist.

Also auch umgekehrt:

1*) Legt man an einen gegebenen Kegelschnitt $m^2$ irgend zwei parallele Tangenten $A$, $\mathfrak{A}$, so wie eine beliebige dritte Tangente $B$, berühren ihn die erstern in den Punkten $a$ und $\alpha$, und man beschreibt diejenigen vier Kreise, $A^2$ und $C^2$, $\mathfrak{A}_2^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$, wovon die zwei ersten die $A$ im Punkte $a$, die zwei andern die $\mathfrak{A}$ im Punkte $\alpha$, und zudem alle vier die $B$ berühren, so hat, bei gehöriger Annahme, jedes der beiden Kreispaare $A^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$, $C^2$ und $\mathfrak{A}_2^2$ mit dem Kegelschnitte eine neue Tangente $D$ gemein, wofern jedes Paar, in Rücksicht der parallelen Tangenten $A$ und $\mathfrak{A}$ entweder gleichliegend oder ungleichliegend ist, je nachdem die Punkte $a$ und $\alpha$ beziehlich auf gleichen oder auf verschiedenen Seiten der Tangente $B$ liegen. — Oder: Sind zwei parallele Gerade $A$ und $\mathfrak{A}$, in jeder irgend ein Punkt $a$ und $\alpha$, so wie eine sie schneidende beliebige dritte Gerade $B$ gegeben, und man beschreibt diejenigen vier Kreise, von denen zwei die $A$ im Punkte $a$, die zwei andern

die $\mathfrak{A}$ im Punkte $\alpha$ und zudem alle vier die Gerade $B$ berühren, und legt sodann, je nachdem die Punkte $a$, $\alpha$ auf gleicher oder auf verschiedenen Seiten von $B$ liegen, beziehlich an je zwei auf gleicher oder auf ungleichen Seiten der Parallelen $A$, $\mathfrak{A}$ liegenden nicht zusammengehörigen Kreise die der $B$ conjugirte gemeinschaftliche Tangente $D$, was zwei $D$ giebt, so giebt es allemal irgend einen Kegelschnitt $m^2$, welcher $A$ und $\mathfrak{A}$ in den gegebenen Punkten $a$ und $\alpha$, und nebstdem auch $B$ so wie die beiden $D$ berührt. — Oder: Legt man an zwei gegebene Kreise (etwa $A^2$, $\mathfrak{C}_2^2$) ein paar conjugirte gemeinschaftliche Tangenten $B$ und $D$, so wie irgend ein Paar parallele Tangenten $A$ und $\mathfrak{A}$, an jeden eine, die sie in den Punkten $a$ und $\alpha$ berühren, so giebt es jedesmal einen Kegelschnitt, welcher die Kreise in diesen Punkten $a$, $\alpha$ und nebstdem auch die beiden gemeinschaftlichen Tangenten berührt.

$2^a$) Ist einem gegebenen Kegelschnitte irgend ein Parallelogramm $AC\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ umschrieben, ist $a$ der Berührungspunkt der Seite $A$, und man beschreibt diejenigen zwei Kreise $A^2$ und $B^2$, welche $A$ im Punkte $a$ und zudem auch $C$ berühren, so wie ferner diejenigen zwei Kreise $K_2^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$, welche die drei Seiten $A\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ berühren, so hat jedes der beiden Kreispaare $A^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$, $B^2$ und $K_2^2$ mit dem Kegelschnitte eine neue Tangente $D$ gemein, wofern nämlich diese Paare rücksichtlich der sich kreuzenden Geraden $A$ und $C$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ in einander entsprechenden oder nicht entsprechenden Winkeln liegen, d. h. jenachdem der Kegelschnitt beziehlich Ellipse oder Hyperbel ist. — Auch dieser Satz kann noch auf zwei Arten umgekehrt werden, wie der vorige.

## XII.

Lässt man nun weiter im ersten Falle (1) oder $1^a$)) die Tangente $B$ der festen Tangente $A$ sich nähern, bis sie mit ihr zusammenfällt, so reducirt sich auch noch einer der Kreise $A^2$ oder $C^2$, etwa $C^2$ auf den Punkt $a$, wogegen der andere $A^2$ den Kegelschnitt in diesem Punkte osculirt; zugleich wird der dem Kreise $C^2$ entsprechende Kreis $\mathfrak{A}^2$ unendlich gross, nämlich er zerfällt in die Geraden $\mathfrak{A}$ und $G_\infty$, während der Kreis $\mathfrak{C}^2$ immerhin, wie zuvor, die Tangente $\mathfrak{A}$ sammt dem Kegelschnitt im Punkte $\alpha$ berührt; dabei behalten die Kreise $A^2$ und $\mathfrak{C}^2$ mit dem Kegelschnitte die vorgenannte Tangente $D$ gemein. Daraus ergiebt sich also ein dem obigen analoges Verfahren, den Krümmungskreis des Kegelschnittes in irgend einem gegebenen Punkte $a$ desselben zu finden. Nämlich: man lege im gegebenen Punkt $a$ und im anderen Endpunkt $\alpha$ des durch ihn gehenden Durchmessers Tangenten $A$, $\mathfrak{A}$ an den Kegelschnitt,

beschreibe hierauf den Kreis, welcher die Tangente $\mathfrak{A}$ im Punkte $\alpha$ und zugleich auch die Tangente $A$ berührt, so hat derselbe noch irgend eine vierte Tangente $D$ mit dem Kegelschnitte gemein, und beschreibe sodann denjenigen Kreis, welcher die Tangente $D$ und nebstdem die Gerade $A$ im Punkte $a$ berührt, so osculirt er hier den Kegelschnitt, und ist der verlangte Krümmungskreis.

Und umgekehrt: Sind $A$ und $D$ zwei conjugirte gemeinschaftliche Tangenten zweier gegebenen Kreise $A^2$ und $\mathfrak{A}^2$, berührt $A$ den ersten Kreis in $a$, und man legt an den zweiten Kreis die mit $A$ parallele Tangente, welche ihn in $\alpha$ berührt, und beschreibt sodann den Kegelschnitt, welcher die Kreise in den genannten Punkten $a$, $\alpha$ und zudem auch noch die Gerade $D$ berührt, so osculirt derselbe den Kreis $A^2$ im Punkte $a$. Der Kegelschnitt ist Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $A$ und $D$ äussere oder innere gemeinschaftliche Tangenten der Kreise sind.

## XIII.

Einem beliebigen Kegelschnitte können insbesondere solche Dreiecke umschrieben sein, deren Seiten von ihm und von drei dem Dreieck eingeschriebenen Kreisen in den nämlichen Punkten berührt werden. Und ist umgekehrt ein beliebiges Dreiseit gegeben, so giebt es vier ihm eingeschriebene Kegelschnitte, welche seine Seiten mit je drei der ihm eingeschriebenen vier Kreise in den gleichen Punkten berühren. Behalten wir die vorige Bezeichnung der vier Kreise, die einem beliebigen Dreiseit $ABC$ eingeschrieben sind, in gleichem Sinne rücksichtlich ihrer Lage bei und nehmen an,

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | es werden die Seiten | | | | | | $A$ | $B$ | $C$ |
| | vom | Kreise | $K^2$ | in | den | Punkten | $k$ | $k_1$ | $k_2$ |
| | – | – | $A^2$ | – | – | – | $a$ | $a_1$ | $a_2$ |
| | – | – | $B^2$ | – | – | – | $b$ | $b_1$ | $b_2$ |
| | – | – | $C_2$ | – | – | – | $c$ | $c_1$ | $c_2$ berührt, |
| so berührt sie | ein | Kegelschnitt | $E^2$ | in | den | Punkten | $a$ | $b_1$ | $c_2$ |
| | – | – | $H^2$ | – | – | – | $k$ | $c_1$ | $b_2$ |
| | – | – | $H_1^2$ | – | – | – | $c$ | $k_1$ | $a_2$ |
| | – | – | $H_2^2$ | – | – | – | $b$ | $a_1$ | $k_2$, |

und zwar ist von diesen vier Kegelschnitten, wie schon durch ihre Bezeichnung angedeutet, der erste Ellipse und die drei andern sind Hyperbeln. Die Ellipse liegt innerhalb des Dreiseits; von jeder Hyperbel liegt ein Zweig in

einem Scheitelwinkel des Dreiseits und berührt dessen Schenkel, also die Verlängerungen der betreffenden beiden Seiten, der andere Zweig liegt unter der jedesmaligen dritten Seite und berührt sie. Um die je drei Punkte, in welchen die Seiten von einem der vier Kegelschnitte berührt werden, leicht und sicher zu erkennen, dient folgendes Merkmal:

Die vier Punkte, in welchen jede Seite berührt wird, liegen paarweise gleichweit von ihrer Mitte ab. Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Mitten der Seiten $A$, $B$, $C$, so ist

$\alpha k = \alpha a$ und $\alpha b = \alpha c$; $\beta k_1 = \beta b_1$ und $\beta a_1 = \beta c_1$; $\gamma k_2 = \gamma c_2$ und $\gamma a_2 = \gamma b_2$.

Geht man nun von den drei Berührungspunkten eines der Kreise aus, und nimmt diejenigen Punkte, welche mit ihnen gleichweit von den Mitten abstehen, so hat man die drei Berührungspunkte eines der vier Kegelschnitte, so dass also in dieser Hinsicht jedem Kreis ein bestimmter Kegelschnitt entspricht, und zwar entsprechen sich

$K^2$ und $E^2$, $A^2$ und $H^2$, $B^2$ und $H_1^2$, $C^2$ und $H_2^2$.

Aus dieser gegenseitigen Lage der Berührungspunkte, verbunden mit dem Umstande, dass die in den Mitten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ auf die Seiten errichteten Lothe sich im Mittelpunkt $N$ des dem Dreiseite umschriebenen Kreises $N^2$ treffen, folgt zugleich, dass auch die Normalen jedes Kegelschnittes in dessen drei Berührungspunkten sich in einem Punkte treffen müssen, welcher allemal mit dem Mittelpunkte des entsprechenden Kreises und mit dem Punkte $N$ in einer Geraden liegt, und zwar jene beiden gleichweit von diesem abstehend. Werden die Mittelpunkte der Kreise $K^2$, $A^2$, $B^2$, $C^2$ durch $K_0$, $A_0$, $B_0$, $C_0$ und die Treffpunkte der je drei Normalen der Kegelschnitte $E^2$, $H^2$, $H_1^2$, $H_2^2$ durch $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_0$ bezeichnet, so gehen also die vier Geraden $K_0\mathfrak{K}_0$, $A_0\mathfrak{A}_0$, $B_0\mathfrak{B}_0$, $C_0\mathfrak{C}_0$ durch den Punkt $N$, und jede wird durch ihn gehälftet. Somit sind die Vierecke $K_0A_0B_0C_0$ und $\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$ gleich und haben $N$ zum Symmetralpunkt. Da jede der 12 Normalen zugleich auch zu je einem Kreise normal ist, so gehen sie zu drei durch die Mittelpunkte der Kreise, oder mit einem Worte: die Normalen fallen auf die 12 Geraden, welche die einander nicht entsprechenden Ecken der Vierecke paarweise verbinden. Diese 12 Geraden sind alle gleich lang, daher ist jede Ecke des einen Vierecks der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die drei ihr nicht entsprechenden Ecken des anderen Vierecks geht, und die auf diese Weise bestimmten 8 Kreise sind gleich, und zwar ist ihr Radius dem Durchmesser des Kreises $N^2$ gleich.

Man bezeichne die Ecken des gegebenen Dreiseits $ABC$ durch $abc$, nämlich so, dass die gleichnamigen Seiten und Ecken einander gegenüberliegen. Die drei Paar Strahlen, welche die inneren und äusseren Winkel des Dreiecks hälften, und wovon jedes Paar sich rechtwinklig schneidet, sind die drei Paar Gegenseiten des vollständigen Vierecks $A_0B_0C_0K_0$, dessen Ecken die Mittelpunkte der vier dem Dreieck eingeschriebenen Kreise sind. Die Strahlen bilden zu drei und drei vier Dreiecke $A_0B_0C_0$, $A_0B_0K_0$, $C_0A_0K_0$, $B_0C_0K_0$, die alle dem Dreieck $abc$ umschrieben und wovon jedes die Ecken des letzteren zu Fusspunkten seiner Höhen, sowie die jedesmalige vierte Ecke des Vierecks, beziehlich $K_0$, $C_0$, $B_0$, $A_0$ zum Höhenschnitt hat. Jedem der vier Dreiecke kann demnach ein Kegelschnitt eingeschrieben werden, welcher seine Seiten in den Punkten $abc$ berührt, und dessen Normalen in diesen Punkten auf die Höhen des jedesmaligen Dreiecks fallen. Wir wollen diese Kegelschnitte, die zugleich alle dem Dreieck $abc$ umschrieben sind, beziehlich durch $\mathfrak{E}^2$, $\mathfrak{H}^2$, $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_2^2$ bezeichnen; sie sind der Bezeichnung gemäss eine Ellipse und drei Hyperbeln und entsprechen nach der Reihe den obigen Kegelschnitten $E^2$, $H^2$, $H_1^2$, $H_2^2$ zunächst in der Hinsicht, dass die beidseitigen Treffpunkte der je drei Normalen einander entsprechende Ecken der sich gleichen Vierecke $K_0A_0B_0C_0$ und $\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$ sind; so z. B. treffen sich die Normalen von $\mathfrak{E}^2$ in $K_0$ und die von $E^2$ in $\mathfrak{K}_0$.

## XIV.

Aus allen diesen Angaben folgt: das Dreieck $abc$ (= Dreiseit $ABC$) hat in Bezug auf die ihm eingeschriebene Ellipse $E^2$ die Eigenschaft, dass die Normale der Ellipse im Berührungspunkte jeder Seite mit den beiden Strahlen, welche die der Seite anliegenden Aussenwinkel des Dreiecks hälften, in einem Punkte zusammentrifft (resp. in $A_0$, $B_0$, $C_0$), so dass also das Dreieck zufolge eines früher publicirten Satzes unter allen der Ellipse umschriebenen Dreiecken zu denen gehört, deren Umfang ein Minimum ist. Und in Bezug auf die ihm umschriebene Ellipse $\mathfrak{E}^2$ hat das Dreieck die Eigenschaft, dass die Normalen derselben in seinen Ecken seine Winkel hälften, so dass es daher unter allen dieser Ellipse eingeschriebenen Dreiecken zu denjenigen gehört, deren Umfang ein Maximum ist. Aus ähnlichen Gründen folgt, dass das Dreieck $abc$ unter allen der Hyperbel umschriebenen Dreiecken zu denjenigen gehört, bei welchen die Differenz der Summe zweier Seiten $B+C$ und der dritten Seite $A$ ein Maximum ist, und dass dasselbe unter allen

der Hyperbel $\mathfrak{H}^2$ eingeschriebenen Dreiecken zu denen gehört, bei denen dieselbe Differenz ein Minimum ist. Gleiche Beziehung hat das Dreieck sowohl zu den Hyperbeln $H_1^2$ und $\mathfrak{H}_1^2$, so wie zu den Hyperbeln $H_2^2$ und $\mathfrak{H}_2^2$, bei denen beziehlich die Differenzen $A+C-B$ und $A+B-C$ in Betracht kommen. Nämlich die Differenz wird so bestimmt: Jede der drei eingeschriebenen Hyperbeln $H^2$, $H_1^2$, $H_2^2$ berührt je zwei der Seiten des Dreiecks in ihren Verlängerungen und die dritte zwischen ihren Endpunkten, die Summe jener weniger dieser ist die zu beachtende Differenz. Und bei jeder der drei umschriebenen Hyperbeln $\mathfrak{H}^2$, $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_2^2$ geht der eine Zweig durch zwei Ecken des Dreiecks, und der andere Zweig durch die dritte Ecke; die zwischen jenen zwei Ecken liegende Seite von der Summe der beiden anderen Seiten abgezogen giebt die fragliche Differenz.

Wenn nun aber das Dreick abc als der Ellipse $E^2$ umschrieben kleinsten Umfang, als der Ellipse $\mathfrak{E}^2$ eingeschrieben, grössten Umfang hat, so müssen die Ellipsen nothwendig confocal sein, und es giebt eine Schaar Dreiecke die ihnen gleicherweise beziehlich um- und eingeschrieben sind, und welche mit dem gegebenen Dreieck gleichen Umfang haben, der rücksichtlich der ersten Ellipse ein Minimum, rücksichtlich der zweiten hingegen ein Maximum ist. Aus gleichen Gründen muss jedes der drei Paar Hyperbeln $H^2$ und $\mathfrak{H}^2$, $H_1^2$ und $\mathfrak{H}_1^2$, $H_2^2$ und $\mathfrak{H}_2^2$ confocal sein, und es giebt rücksichtlich jedes Paares eine Schaar Dreiecke, die ihnen in gleicher Art wie das gegebene um- und eingeschrieben sind, und deren Seiten in entsprechender Ordnung verbunden, dieselbe Differenz geben, wie die Seiten des gegebenen Dreiecks, und wo diese Differenz in Betracht der ersten Hyperbel ein Maximum, dagegen in Betracht der zweiten ein Minimum ist.

Anmerkung. Man vergleiche den Monatsbericht der Berl. Akademie vom April 1847 oder dieses Journal Bd. 37: Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte.

## XV.

Die wesentlichsten Resultate, welche aus dieser Betrachtung hervorgehen, sind, in etwas veränderter Ordnung, folgende:

1) Ist ein beliebiges Dreieck abc oder Dreiseit $ABC$ gegeben, so giebt es allemal vier Paare confocale Kegelschnitte, wovon der eine dem Dreieck ein- und der andere umgeschrieben ist; das eine Paar sind Ellipsen $E^2$ und $\mathfrak{E}^2$,

die drei andern Paare sind Hyperbeln, $H^2$ und $\mathfrak{H}^2$, $H_1^2$ und $\mathfrak{H}_1^2$, $H_2^2$ und $\mathfrak{H}_2^2$. Rücksichtlich jedes Paares giebt es eine Schaar Dreiecke, zu denen das gegebene jedesmal mitgehört, welche demselben zugleich um- und eingeschrieben sind; bei dem Paar Ellipsen haben alle Dreiecke gleichen Umfang, und zwar ist derselbe in Bezug auf die eingeschriebene Ellipse $E^2$ ein Minimum und in Bezug auf die umgeschriebene $\mathfrak{E}^2$ ein Maximum, bei jedem Paar Hyperbeln haben alle Dreiecke gleiche Differenz zwischen der Summe zweier Seiten und der dritten Seite, und zwar ist diese Differenz in Betracht der eingeschriebenen Hyperbel ein Maximum und in Betracht der umschriebenen ein Minimum.

2) Die vier eingeschriebenen Kegelschnitte $E^2$, $H^2$, $H_1^2$, $H_2^2$ berühren die Seiten des Dreiecks abc mit den ihm eingeschriebenen vier Kreisen $K^2$, $A^2$, $B^2$, $C^2$ in den gleichen zwölf Punkten. Die drei Normalen jedes der vier Kegelschnitte in seinen drei Berührungspunkten treffen sich in einem Punkte, beziehlich in $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_0$; alle zwölf Normalen anders combinirt treffen sich auch zu drei und drei in den Mittelpunkten $K_0$, $A_0$, $B_0$, $C_0$ der vier Kreise und zwischen den beidseitigen Treffpunkten sind alle zwölf Normalen gleich lang; daher ist jeder der letzteren vier Punkte der Mittelpunkt eines neuen Kreises, welcher durch je drei der ersteren vier Punkte geht, so wie jeder von diesen Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher durch je drei von jenen geht, und diese acht Kreise sind gleich. Zudem sind auch die Vierecke $K_0A_0B_0C_0$ und $\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$ gleich und haben den Mittelpunkt $N$ des dem gegebenen Dreiecke umschriebenen Kreises $N^2$ zum Symmetralpunkte, so dass die ihre entsprechenden Ecken verbindenden vier Geraden $K_0\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{A}_0A_0$, $B_0\mathfrak{B}_0$, $C_0\mathfrak{C}_0$ durch diesen Punkt $N$ gehen und durch ihn gehälftet werden; die drei Paar Gegenseiten jedes der beiden Vierecke schneiden einander rechtwinklig, die des ersten schneiden sich in den Ecken des gegebenen Dreiecks abc, die des anderen in den Ecken eines gleichen Dreiecks $a_1b_1c_1$, das mit jenem in Bezug auf den Punkt $N$ symmetrisch liegt; ferner schneidet jede der sechs Seiten des einen Vierecks je eine Seite des andern rechtwinklig, und der Schnittpunkt $\mathfrak{d}$ und die sechs Ecken der beiden Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ liegen zusammen im Kreise $N^2$, dessen Durchmesser dem Radius der genannten acht gleichen Kreise gleich ist.

3) Die vier umschriebenen Kegelschnitte $\mathfrak{E}^2$, $\mathfrak{H}^2$, $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_2^2$ haben in den Ecken des Dreiecks abc die drei Paar Strahlen, welche die Winkel derselben hälften, zu Tangenten und Normalen, so dass jede zwei Kegelschnitte

sich in je einer Ecke berühren und in den beiden anderen Ecken rechtwinklig schneiden. Die drei Normalen jedes der vier Kegelschnitte treffen sich in einem Punkte, beziehlich in den Mittelpunkten $K_0$, $A_0$, $B_0$, $C_0$ der dem Dreieck eingeschriebenen vier Kreise; oder die drei Normalen eines jeden treffen sich in einem dieser vier Punkte, und jede Normale trifft mit den Tangenten in den beiden anderen Ecken in je einem der drei übrigen Punkte zusammen.

4) Werden die Halbaxen jedes der vier Paare confocaler Kegelschnitte in 1) durch $a$, $b$ und $\alpha$, $\beta$ und die Excentricität durch $e$ bezeichnet, so hat man für die Ellipsen $E^2$ und $\mathfrak{E}^2$ folgende zwei Gleichungen:

$$a^2-b^2=\alpha^2-\beta^2=e^2 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=1,$$

durch welche jede der beiden Ellipsen bestimmt wird, wenn die andere gegeben ist. Für den constanten Umfang $u$ der Schaar Dreiecke, welche zu den Ellipsen gehören, findet man

$$u=2\,\frac{b+\beta}{a-\alpha}\sqrt{a^2-\alpha^2}=2\,\frac{a+\alpha}{b-\beta}\sqrt{b^2-\beta^2}.$$

Unter diesen Dreiecken hat dasjenige den grössten Inhalt, welches eine Ecke im Scheitel der grossen Axe der Ellipse $\mathfrak{E}^2$ hat, hingegen dasjenige den kleinsten Inhalt, von welchem eine Ecke im Scheitel der kleinen Axe liegt, und zwar ist das

$$\text{Maximum}=\frac{a}{b}(a+\alpha)\sqrt{a^2-b^2}=\frac{a+\alpha}{a-\alpha}\,\beta\,e,$$

und das

$$\text{Minimum}=\frac{a}{b}(b+\beta)\sqrt{a^2-b^2}=\frac{b+\beta}{b-\beta}\,\alpha\,e.$$

Für jedes der drei Paar confocale Hyperbeln hat man die zwei Gleichungen

$$a^2+b^2=\alpha^2+\beta^2=e^2 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}=1,$$

und für die constante Differenz $d$ rücksichtlich der Seiten der zugehörigen Schaar Dreiecke hat man

$$d=2\,\frac{b-\beta}{a-\alpha}\sqrt{a^2-\alpha^2}=2\,\frac{a+\alpha}{b+\beta}\sqrt{b^2-\beta^2}.$$

5) Von den beiden gleichen Vierecken $K_0A_0B_0C_0$ und $\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$ (in 2)) soll noch eine Eigenschaft erwähnt werden:

Je zwei sich entsprechende Ecken beider Vierecke sind die Brennpunkte eines Kegelschnittes, der den beiden Dreiecken eingeschrieben ist,

welche durch die beidseitigen übrigen drei Ecken der Vierecke bestimmt werden; die Hauptaxe des Kegelschnittes ist allemal ein Durchmesser des Kreises $N^2$, so dass alle vier Kegelschnitte mit diesem Kreise concentrisch sind, und jeder von ihm in den Scheiteln seiner Hauptaxe berührt wird. Nämlich die Ecken $K_0$ und $\mathfrak{K}_0$ sind die Brennpunkte einer Ellipse, welche den Dreiecken $A_0B_0C_0$ und $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$ eingeschrieben ist, dagegen sind die Eckenpaare $A_0$ und $\mathfrak{A}_0$, $B_0$ und $\mathfrak{B}_0$, $C_0$ und $\mathfrak{C}_0$ die Brennpunkte dreier Hyperbeln, welche resp. den betreffenden je zwei Dreiecken eingeschrieben sind.

Lässt man eine Ecke des anfänglich gegebenen Dreieckes abc, etwa a sich in's Unendliche entfernen, während die Seite $A$ und ihre Endpunkte b und c fest bleiben, so werden die Seiten $B$ und $C$ parallel und von den eingeschriebenen vier Kreisen bleiben nur zwei, $K^2$ und $A^2$, und ebenso von den vier Paaren confocaler Kegelschnitte nur zwei Paar, nämlich $E^2$ und $\mathfrak{E}^2$, $H^2$ und $\mathfrak{H}^2$ übrig, und zwar sind beide Paare in Parabeln übergegangen. Und noch mehr: die eingeschriebenen Parabeln $E^2$, $H^2$ haben sich auf ihre Axen reducirt; die beiden umschriebenen Parabeln $\mathfrak{E}^2$, $\mathfrak{H}^2$ schneiden sich in den Ecken b und c rechtwinklig, sie sind gleich, ihre Axen sind parallel, und zwar den Seiten $B$ und $C$ parallel, aber sie liegen verkehrt, erstrecken sich nach entgegengesetzten Seiten hin, ihre Brennpunkte liegen beziehlich in den Berührungspunkten $a$, $k$ der Seite $A$ mit den Kreisen $A^2$ und $K^2$, und ihre Leitlinien gehen durch die Mittelpunkte dieser Kreise.

Also: Bei allen einer gegebenen Parabel eingeschriebenen Dreiecken von grösstem Umfange geht die eine Seite, $A$ durch den Brennpunkt der Parabel und die beiden anderen Seiten, $B$ und $C$ sind der Axe parallel. — Einer eigentlichen, nicht auf ihre Axe reducirten Parabel kann kein Dreieck umschrieben sein, dessen Umfang ein Minimum ist.

Bemerkung. Sind zwei ungleichartige Kegelschnitte confocal, so kann niemals ein Dreieck dem einen um- und zugleich dem anderen eingeschrieben sein. Hingegen sind Vierecke auf diese Weise möglich.

Sind eine Ellipse $E^2$ und eine Hyperbel $\mathfrak{H}^2$ confocal, sind $a$ und $b$, $\alpha$ und $\beta$ beziehlich ihre Halbaxen und $e$ ihre Excentricität, so dass

$$a^2 - b^2 = \alpha^2 + \beta^2 = e^2,$$

und sollen Vierecke der Ellipse umschrieben werden können, welche zugleich der Hyperbel eingeschrieben sind, so muss zwischen den Axen folgende fernere Relation statthaben:

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad \text{und} \quad \frac{a^2}{\alpha^2}-\frac{b^2}{\beta^2}=1$$

oder

$$\alpha^2=a(a-b), \quad \beta^2=b(a-b)$$

und

$$a^2=\frac{\alpha^4}{\alpha^2-\beta^2}, \quad b^2=\frac{\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Sollen dagegen die Vierecke der Ellipse ein- und der Hyperbel umgeschrieben sein, so muss sein:

$$a^2=e(e+\beta), \quad b^2=e\beta,$$

oder

$$\alpha^2=\frac{a^2}{e^2}(e^2-b^2), \quad \beta=\frac{b^2}{e}.$$

In beiden Fällen findet eine Schaar Vierecke statt; im ersten Falle sind dieselben convex, im anderen überschlagen. Im ersten Falle ist die Differenz $d$ zwischen den Summen der Gegenseiten jedes Vierecks constant, und zwar ist dieselbe in Bezug auf den einen Kegelschnitt ein Maximum und in Bezug auf den anderen ein Minimum. Im anderen Falle ist der Umfang der Vierecke constant, und auch rücksichtlich des einen Kegelschnittes ein Maximum und rücksichtlich des anderen ein Minimum. Für jene Differenz und diesen Umfang hat man:

$$d=4(a-b),$$

und

$$u=4(e+\beta).$$

## XVI.

Gleichwie im ersten Theile der vorliegenden Entwicklungen die anfängliche Betrachtung später allgemeiner aufgefasst wurde, so können auch hier die unter X. — XIII. enthaltenen Sätze verallgemeinert werden; auch lassen sich aus den beidseitigen Sätzen durch Polarisation viele neue ableiten. Aus der grossen Anzahl von Sätzen, zu denen man auf diese Weise gelangen kann, sollen hier nur folgende hervorgehoben werden.

Werden einem gegebenen Kegelschnitte $m^2$ irgend drei Winkel $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ umschrieben, deren Scheitel in einer gegebenen Geraden $M$ liegen, und werden in dieser Geraden zwei beliebige Punkte $r$, $s$ gewählt, so giebt es vier Gruppen von je vier Kegelschnitten, welche beziehlich den vier Dreiseiten $ABC$, $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $B\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $C\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eingeschrieben sind, und sämmtlich durch die beiden Punkte $r$ und $s$ gehen, und von diesen Kegelschnitten haben vier mal

vier, je aus jeder Gruppe einer, mit dem gegebenen Kegelschnitte $m^2$ zusammen irgend eine Tangente $D$ gemein. Ebenso giebt es vier Gruppen von je vier Kegelschnitten, welche den vier Dreiseiten $\mathfrak{ABC}$, $\mathfrak{A}BC$, $\mathfrak{B}AC$, $\mathfrak{C}AB$ eingeschrieben und sämmtlich durch die beiden Punkte $r$, $s$ gehen, und von denen vier mal vier mit dem Kegelschnitte $m^2$ zusammen eine Tangente $\mathfrak{d}$ gemein haben. Die vier Tangenten $\mathfrak{d}$ entsprechen nach bestimmter Ordnung den vier Tangenten $D$, und die sich entsprechenden schneiden einander auf der Geraden $M$. Ferner giebt es zu jeder der acht Gruppen von vier Kegelschnitten, welche beziehlich den genannten acht Dreiseiten eingeschrieben sind, allemal noch einen solchen fünften Kegelschnitt, welcher alle vier Glieder der Gruppe berührt, und gleichfalls durch die Punkte $r$, $s$ geht.

Ist m der Pol der Geraden $M$ in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt $m^2$, und man zieht durch denselben irgend zwei Gerade $R$ und $S$, so haben die vier Kegelschnitte, welche beide Gerade berühren, und beziehlich den vier Dreiseiten $ABC$, $A\mathfrak{BC}$, $B\mathfrak{CA}$, $C\mathfrak{AB}$ eingeschrieben sind, mit dem gegebenen Kegelschnitte zusammen eine Tangente $D$ gemein, und gleicherweise haben die vier Kegelschnitte, welche dieselben Geraden berühren und beziehlich den vorgenannten anderen vier Dreiseiten eingeschrieben sind, mit dem Kegelschnitte $m^2$ zusammen eine Tangente $\mathfrak{d}$ gemein, und beide Tangenten $D$ und $\mathfrak{d}$ schneiden sich auf der Geraden $M$.

Gehen drei Sehnen, $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ des gegebenen Kegelschnittes $m^2$ durch irgend einen Punkt m, und man zieht durch diesen Punkt zwei beliebige Gerade $R$ und $S$, so giebt es vier Gruppen von je vier Kegelschnitten, welche beziehlich den vier Dreiecken $abc$, $a\beta\gamma$, $b\gamma\alpha$, $c\alpha\beta$ umschrieben, und sämmtlich dem Winkel $RS$ eingeschrieben sind, und von diesen Kegelschnitten haben vier mal vier, je aus jeder Gruppe einer, mit dem gegebenen Kegelschnitte zusammen einen Punkt $d$ gemein; ebenso giebt es vier Gruppen von je vier Kegelschnitten, welche den vier Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\alpha bc$, $\beta ca$, $\gamma ab$ umschrieben und sämmtlich dem Winkel $RS$ eingeschrieben sind, und von denen vier mal vier mit dem Kegelschnitte $m^2$ zusammen einen Punkt $\delta$ gemein haben; jeder der vier letzteren Punkte $\delta$ entspricht einem der vier ersteren Punkte $d$ derart, dass die sie verbindende Gerade durch den Punkt m geht. Auch giebt es zu jeder der acht Gruppen von vier Kegelschnitten, die demselben Dreieck umschrieben sind, einen solchen fünften Kegelschnitt, welcher alle vier Glieder der Gruppe berührt, und gleichfalls dem Winkel $RS$ eingeschrieben ist.

Zürich, den 28. December 1865.

# Ueber gewisse Beziehungen zwischen räumlichen Gebilden.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Eine der wirksamsten Handhaben geometrischer Speculation besteht ohne Zweifel darin, zwei räumliche Gebilde so auf einander zu beziehen, dass jedem Punkte des einen ein Punkt des anderen, oder dass jedem Punkte des einen eine Ebene des anderen entspricht. Von dieser Art ist die Beziehung zwischen einem Punkte und seinem Bildpunkte bei der sphärischen Spiegelung, ferner, wenn eine bestimmte Oberfläche zweiter Ordnung gegeben ist, die Beziehung zwischen einem Punkte und der ihm zugehörigen Polarebene, und auch, wenn ein fester Punkt gegeben ist, die Beziehung zwischen einer Ebene und dem Fusspunkte des Lothes, das von dem festen Punkte auf die Ebene gefällt wird. Gegenwärtig beabsichtige ich, einen höchst einfachen Zusammenhang zwischen den angeführten drei Arten der Beziehung herauszuheben und für einen doppelten Zweck nutzbar zu machen. Es rücken nämlich gewisse Ergebnisse der Potentialtheorie durch die Construction von Fusspunkten, und gewisse Sätze über den Inhalt von Räumen, die von Fusspunktsflächen begrenzt sind, vermittelst der sphärischen Spiegelung in ein helleres Licht. Die letztgenannten Sätze weisen alsdann auf ein allgemeineres mannigfacher Anwendungen fähiges Theorem, welches die durch eine gewisse Substitution neuer Variabeln zu bewirkende Umformung der vielfachen Integrale betrifft.

## 1.

Um einen im Raume festen Punkt $A$ als Mittelpunkt sei mit der Einheit als Radius eine Kugelfläche $K$ beschrieben. Ein Punkt $B'$ ist das in Bezug auf $K$ genommene sphärische Spiegelbild des Punktes $B$, wenn $B$ und $B'$ auf derselben von $A$ aus gezogenen Geraden und zwar auf derselben Seite gegen den Punkt $A$ liegen, und wenn die Abstände $AB$ und $AB'$ die Gleichung $AB.AB' = 1$ erfüllen*). Die durch den Punkt $B$ gehende auf der

*) Diese Benennung entspricht der optischen Vorstellung, dass die Kugelfläche mit lauter sie berührenden unendlich kleinen spiegelnden Facetten bedeckt sei, deren Krümmung dem Kugelmittelpunkt zugewendet und deren Krümmungsradius gleich dem doppelten Kugelradius ist.

Linie $AB$ senkrecht stehende Ebene $\mathfrak{B}$ ist in Bezug auf die feste Fläche $K$ die Polarebene des Punktes $B'$. Es sei eine beliebige Oberfläche $S$ gegeben, man construire zu jedem Punkte derselben, der allgemein mit $B$ bezeichnet werden mag, den Bildpunkt $B'$, und zu dem Punkte $B'$ die Polarebene $\mathfrak{B}$, dann stellt der Inbegriff der Punkte $B'$ das sphärische Spiegelbild $S'$ der Fläche $S$ dar, und zugleich umhüllt der Inbegriff der Ebenen $\mathfrak{B}$ die Polarfläche $S_0$ der Fläche $S'$. Jetzt fälle man von dem festen Punkte $A$ aus auf jede Tangentialebene $\mathfrak{B}$ der Fläche $S_0$ ein Perpendikel, so ist $B$ der Fusspunkt desselben, und es leuchtet ein, dass der Inbegriff der Punkte $B$, oder die Fläche $S$, nichts anderes ist, als die mit dem Anfangspunkte $A$ construirte Fusspunktsfläche der Fläche $S_0$.

Um den in Rede stehenden elementaren Zusammenhang analytisch auszudrücken, mögen rechtwinklige Coordinaten $x, y, z$ angewendet werden, so dass

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| dem | Punkte | $A$ | die | Werthe | $\xi$, | $\eta$, | $\zeta$ |
| – | – | $B$ | – | – | $x$, | $y$, | $z$ |
| – | – | $B'$ | – | – | $x'$, | $y'$, | $z'$ |
| – | – | $B_0$ | – | – | $x_0$, | $y_0$, | $z_0$ . |
| – | – | $P$ | – | – | $\xi$, | $\eta$, | $\zeta$ |

entsprechen; $P$ ist ein beliebiger Punkt der Ebene $\mathfrak{B}$, $B_0$ derjenige Punkt, in welchem die Ebene $\mathfrak{B}$ die Oberfläche $S_0$ berührt. Die Gleichungen der Oberflächen $S$, $S'$, $S_0$ seien respective

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x', y', z') = 0, \quad \varphi_0(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Aggregate von Ausdrücken, die aus den $x$-, $y$-, $z$-Coordinaten eines Punktes oder mehrerer Punkte gebildet sind, sollen mit Hülfe von Summenzeichen geschrieben werden, so dass z. B. $\Sigma(x-\xi)^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$ ist. Es gelten nun zwischen den Coordinaten der zugehörigen Punkte $B$ und $B'$ die Gleichungen

$$(1.) \qquad x'-\xi = \frac{x-\xi}{\Sigma(x-\xi)^2}, \quad y'-\eta = \frac{y-\eta}{\Sigma(x-\xi)^2}, \quad z'-\zeta = \frac{z-\zeta}{\Sigma(x-\xi)^2}.$$

Die Gleichung der Ebene $\mathfrak{B}$ heisst, insofern sie die Polarebene des Punktes $B'$ ist,

$$(2.) \qquad \Sigma(x'-\xi)(\xi-\xi)-1 = 0$$

und insofern sie die Tangentialebene der Fläche $S_0$ ist,

$$(3.) \qquad \Sigma\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}(\xi-\xi)-\Sigma\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}(x_0-\xi) = 0.$$

Die Vergleichung der beiden Darstellungen giebt die Gleichungen:

$$(4.)\quad x'-\xi=\frac{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}}{\Sigma\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}(x_0-\xi)},\quad y'-\eta=\frac{\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}}{\Sigma\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}(x_0-\xi)},\quad z'-\zeta=\frac{\frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0}}{\Sigma\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}(x_0-\xi)},$$

aus denen durch Vermittelung von (1.) die Gleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases} x-\xi=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\frac{\Sigma\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}(x_0-\xi)}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\right)^2}, & y-\eta=\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}\frac{\Sigma\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}(x_0-\xi)}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\right)^2}, \\ z-\zeta=\frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0}\frac{\Sigma\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}(x_0-\xi)}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\right)^2}, & \Sigma(x-\xi)^2=\frac{\left(\Sigma\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}(x_0-\xi)\right)^2}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\right)^2} \end{cases}$$

folgen. Um die Gleichungen (4.) nach den Grössen $x_0$, $y_0$, $z_0$ aufzulösen, kann man sich der Gleichung

$$(6.)\quad \Sigma(x'-\xi)(x_0-\xi)-1=0$$

bedienen, die durch Substitution der Coordinaten des Berührungspunktes $B_0$ statt der Coordinaten des unbestimmten Punktes $P$ aus (2.) entsteht. Da die Differentiation von (6.) nach den Grössen $x'$, $y'$, $z'$, $x_0$, $y_0$, $z_0$ die Gleichung hervorbringt

$$(7.)\quad \Sigma(x_0-\xi)dx'+\Sigma(x'-\xi)dx_0=0,$$

dagegen die Relationen (4.) die Differentialgleichung der Fläche $S_0$

$$\Sigma(x'-\xi)dx_0=0$$

liefern, so entsteht die Differentialgleichung der Fläche $S'$

$$\Sigma(x_0-\xi)dx'=0,$$

und das System von Auflösungen

$$(8.)\quad \begin{cases} x_0-\xi=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x'}}{\Sigma\frac{\partial\psi}{\partial x'}(x'-\xi)}, & y_0-\eta=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial y'}}{\Sigma\frac{\partial\psi}{\partial x'}(x'-\xi)}, \\ & z_0-\zeta=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial z'}}{\Sigma\frac{\partial\psi}{\partial x'}(x'-\xi)}. \end{cases}$$

Für die Anwendung der entwickelten Relationen ist es wünschenswerth, auch diejenige Fläche $S_2$ zu betrachten, die aus der Fläche $S$ durch eine mit demselben Anfangspunkte $A$ ausgeführte Fusspunktsconstruction entsteht,

d. i. die zweite Fusspunktsfläche der Fläche $S_0$. Ein Punkt $B_2$ von $S_2$ habe die Coordinaten $x_2, y_2, z_2$, so kommen, indem man in (5.) $x_2, y_2, z_2, x, y, z, \varphi(x,y,z)$ respective an die Stelle von $x, y, z, x_0, y_0, z_0, \varphi_0(x_0,y_0,z_0)$ setzt, die Gleichungen

$$(9.)\quad \begin{cases} x_2-\xi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-\xi)}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}, & y_2-\eta=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-\xi)}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}, \\ z_2-\zeta=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-\xi)}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}, & \Sigma(x_2-\xi)^2=\dfrac{\left(\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-\xi)\right)^2}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}. \end{cases}$$

Das Grundgesetz für den Zusammenhang der Curven, die in einer Ebene aus einer erzeugenden Curve durch wiederholte Fusspunktsconstruction hervorgehen, hat schon *Maclaurin* ausgesprochen*). In einer Ebene sei $C$ der Anfangspunkt der Lothe, $D_0$ ein Punkt der erzeugenden Curve, $CD$ das Loth, welches auf die im Punkte $D_0$ an die Curve gezogene Tangente gefällt ist, mithin $D$ der Punkt der ersten Fusspunktscurve, welcher dem Punkte $D_0$ der erzeugenden Curve entspricht; so lehrt *Maclaurin*, dass die an die erste Fusspunktscurve im Punkte $D$ zu ziehende Tangente mit der Linie $CD$ denselben Winkel macht, wie die Tangente $D_0D$ mit der Linie $CD_0$. Für die analytische Behandlung der Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Oberflächen $S_0$, $S$, $S_2$ bietet die Gleichung (6.) einen bequemen Ausgangspunkt, wenn man derselben mit Hülfe von (1.) die Gestalt

$$(10.)\quad \Sigma(x-\xi)^2-\Sigma(x-\xi)(x_0-\xi)=0$$

giebt. Lässt man die Grössen $x, y, z, x_0, y_0, z_0$ zu gleicher Zeit sich ändern, so kommt

$$(11.)\quad \Sigma 2(x-\xi)dx-\Sigma(x_0-\xi)dx-\Sigma(x-\xi)dx_0=0,$$

und weil in Folge von (5.)

$$\Sigma(x-\xi)dx_0=0$$

ist, so gilt die Gleichung

$$(12.)\quad \Sigma(2x-\xi-x_0)dx=0.$$

Weil dieselbe von der Differentialgleichung der Fläche $S$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0$$

*) Philosophical transactions, 1700—1720, Vol. IV, pag. 51.

nur durch einen Factor $\tau$ verschieden sein kann, so ist

$$(13.)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\tau(2x-x_0-\xi),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\tau(2y-y_0-\eta),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\tau(2z-z_0-\zeta).$$

Hieraus folgen bei Hinzunahme von (10.) die beiden Relationen

$$(14.)\quad \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-\xi)=\tau\Sigma(x-\xi)^2,\qquad \Sigma\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2=\tau^2\Sigma(x_0-\xi)^2,$$

deren Substitution in (9.) die Gleichungen

$$(15.)\quad \begin{cases} x_2-\xi=(2x-x_0-\xi)\dfrac{\Sigma(x-\xi)^2}{\Sigma(x_0-\xi)^2}, & y_2-\eta=(2y-y_0-\eta)\dfrac{\Sigma(x-\xi)^2}{\Sigma(x_0-\xi)^2}, \\ z_2-\zeta=(2z-z_0-\zeta)\dfrac{\Sigma(x-\xi)^2}{\Sigma(x_0-\xi)^2}, & \Sigma(x_2-\xi)^2=\dfrac{(\Sigma(x-\xi)^2)^2}{\Sigma(x_0-\xi)^2} \end{cases}$$

hervorruft. Diese Gleichungen, welche der Ausdruck des auf Oberflächen übertragenen *Maclaurin*schen Gesetzes sind, geben für die Punkte $B$, $B_2$, ... $B_n$, welche dem Punkte $B_0$ der erzeugenden Fläche resp. in der ersten, zweiten, ... $n^{\text{ten}}$ Fusspunktsfläche entsprechen, die folgende Construction an die Hand. Man errichte im Punkte $B_0$ die Normale der Fläche $S_0$, und lege durch diese Normale und die Verbindungslinie des Punktes $A$ mit dem Punkte $B_0$ eine Ebene. In dieser Ebene ziehe man durch den Punkt $A$ die Parallele $Ab$ zu der Flächennormale im Punkte $B_0$, und dann die Linien $Ab_2$, $Ab_3$, ... $Ab_n$, für welche die Winkel $bAb_2$, $b_2Ab_3$, u. s. f. dem spitzen Winkel $B_0Ab$ gleich werden. Hierauf giebt ein vom Punkte $B_0$ auf die Linie $Ab$ gefälltes Loth den Endpunkt $B$, ein Loth vom Punkte $B$ auf die Linie $Ab_2$ den Endpunkt $B_2$, u. s. f. Aus dieser Construction geht hervor, dass die Abstände $AB_0$, $AB$, $AB_2$, ... eine geometrische Reihe bilden, deren Exponent der Cosinus des constanten Winkels $B_0AB$ ist, und dass die Punkte $B_0$, $B$, $B_2$, ... auf einer archimedischen Spirale liegen. Wenn man die sphärischen Spiegelbilder $B_0'$, $B'$, $B_2'$, ... dieser Punkte construirt, so bilden die Abstände $AB_0'$, $AB'$, $AB_2'$, ... ebenfalls eine geometrische Reihe, der Exponent derselben ist aber der reciproke Werth des Exponenten der ersten Reihe, und die Punkte $B_0'$, $B'$, $B_2'$, ... liegen auf einer zweiten archimedischen Spirale, welche sich nur durch die Lage und nicht durch die Gestalt von der ersten Spirale unterscheidet.

## 2.

Die Anwendung der angestellten Betrachtungen, die ich zunächst mittheilen werde, betrifft eine im 61$^{\text{sten}}$ Bande dieses Journals veröffentlichte

Arbeit *). Es sei ein von einem Ellipsoid $E$ begrenzter Körper gegeben, bei dem die Dichtigkeit der Masse durch die inverse $p^{te}$ Potenz der Entfernung eines jeden Massenpunktes von einem ausserhalb des Körpers liegenden Punkte $A$ gemessen wird. Der Exponent $p$ ist eine die Einheit übertreffende ungerade Zahl. Die Wirkung, welche der in Rede stehende Körper nach dem Gesetze der allgemeinen Massenanziehung auf einen ausserhalb desselben befindlichen Massenpunkt ausübt, lässt sich allgemein durch die anziehende Wirkung einer Massenvertheilung von zwei Dimensionen ersetzen, die eine gewisse Fläche $S$ bedeckt. Nimmt man die Hauptaxen des Ellipsoids zu den Coordinatenaxen der $x$, $y$, $z$, sind $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ beziehungsweise die Längen der grössten, der mittleren und der kleinsten Axe, sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten des Punktes $A$, und bestimmt die Seite der $x$, $y$ Ebene, auf der der Punkt $A$ liegt **), die Richtung der positiven $z$ Axe, so ist die Fläche $S$ das durch die Ungleichheit $z > 0$ abgeschnittene Stück der Fläche dritter Ordnung

$$(16.)\qquad \varphi(x,y,z) = \zeta z\frac{r^2}{\gamma^2} + \frac{(\xi z-\zeta x)^2}{\alpha^2-\gamma^2} + \frac{(\eta z-\zeta y)^2}{\beta^2-\gamma^2} - (z-\zeta)^2 = 0;$$

hier ist $r^2 = \Sigma(x-\xi)^2$, und ebenso wird später $r'^2 = \Sigma(x'-\xi)^2$, $r_2^2 = \Sigma(x_2-\xi)^2$ gesetzt werden. Diese Fläche ist für jeden Werth der ungeraden Zahl $p$ dieselbe, die Dichtigkeit $\bar{\nu}$ der über dieselbe ausgebreiteten Massenschicht, die eben erwähnt worden, hat im Punkte $(x, y, z)$ den Werth

$$(17.)\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}p)}\,\frac{\alpha\beta\gamma^{-p+1}}{(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}\,\zeta^{\frac{1}{2}}(\zeta-z)^{p-1}\,\frac{d^{\frac{1}{2}(p-3)}\left(z^{\frac{1}{2}(p-1)}(\zeta-z)^{-\frac{1}{2}(p+3)}\right)}{dz^{\frac{1}{2}(p-3)}}\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{\frac{1}{2}(p-3)}}{\left(\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}(p-2)}},$$

wo die Differenz $\zeta-z$, ebenso wie die Grössen $\zeta$ und $z$, nicht negativ wird, und $\Gamma(u) = \int e^{-\varrho}\varrho^{u-1}d\varrho$ gesetzt ist.

In dem angeführten Aufsatze ist bemerkt, dass die Oberfläche $\varphi(x, y, z) = 0$, wenn wir die im vorigen Abschnitt gebrauchten Bezeichnungen gelten lassen, das in Bezug auf die Kugelfläche $K$ genommene sphärische Spiegelbild

$$(18.)\qquad \psi(x',y',z') = \zeta\frac{(\zeta r'^2+z'-\zeta)}{\gamma^2} + \frac{(\xi z'-\zeta x')^2}{\alpha^2-\gamma^2} + \frac{(\eta z'-\zeta y')^2}{\beta^2-\gamma^2} - (z'-\zeta)^2 = 0,$$

*) Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Gravitation.

**) Der Fall, dass der Punkt $A$ in die $x$, $y$ Ebene fällt, der a. a. O. ausführlich erörtert ist, bleibt hier ausgeschlossen.

das ist, eine Oberfläche zweiter Ordnung liefert. Hieraus folgt nach den obigen Betrachtungen sogleich, dass die Oberfläche $\varphi_0(x_0, y_0, z_0) = 0$, aus der die Oberfläche $\varphi(x, y, z) = 0$ durch die mit dem Anfangspunkte $A$ ausgeführte Fusspunktsconstruction erzeugt werden kann, die Polarfläche der Oberfläche $\psi(x', y', z') = 0$ in Bezug auf die Kugelfläche $K$, mithin ebenfalls eine Fläche der zweiten Ordnung ist. Bei genauerer Erwägung zeigt sich dann, dass die Fläche $\varphi_0(x_0, y_0, z_0) = 0$ zu der Begrenzung $E$ des gegebenen Körpers in einer höchst einfachen Beziehung steht, und dass durch Vermittelung einer mit dem Anfangspunkte $A$ wiederholten Fusspunktsconstruction die Bestandtheile des Ausdrucks der Dichtigkeit $\bar{\nu}$ ungezwungen erhalten werden.

Die Gleichung $\varphi_0(x_0, y_0, z_0) = 0$ kann man aus den Gleichungen (8.) herleiten, und zwar veranlasst der Umstand, dass die Function $\psi$ eine algebraische ist, zu der Einführung der homogenen Coordinaten

$$(19.)\quad \begin{cases} x_0 - \xi = \dfrac{t_0}{-w_0}, & y_0 - \eta = \dfrac{u_0}{-w_0}, & z_0 - \zeta = \dfrac{v_0}{-w_0}, \\ x' - \xi = \dfrac{t'}{w'}, & y' - \eta = \dfrac{u'}{w'}, & z' - \zeta = \dfrac{v'}{w'}. \end{cases}$$

Setzt man

$$w'^2 \psi(x', y', z') = g(t', u', v', w');$$

so ist $g$ eine homogene Function der zweiten Ordnung, und durch bekannte Betrachtungen folgt aus (8.) das System von Gleichungen

$$(20.)\quad t_0 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial t'}, \quad u_0 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u'}, \quad v_0 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v'}, \quad w_0 = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial w'}.$$

Bezeichnet $\mathfrak{D}$ die Driscriminante der Function $g$, $f(t_0, u_0, v_0, w_0)$ die zu $g$ adjungirte Function, so giebt die Auflösung von (20.) das System

$$(21.)\quad \mathfrak{D}t' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t_0}, \quad \mathfrak{D}u' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \mathfrak{D}v' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v_0}, \quad \mathfrak{D}w' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial w_0},$$

und die Gleichung

$$(22.)\quad \mathfrak{D}g(t', u', v', w') = f(t_0, u_0, v_0, w_0).$$

Die Gleichung $f(t_0, u_0, v_0, w_0) = 0$ verwandelt sich aber durch Wiedereinführung der $x_0$, $y_0$, $z_0$ in die verlangte Gleichung $\varphi_0(x_0, y_0, z_0) = 0$.

In dem vorliegenden Falle ist nach (18.) die Function $g$ so bestimmt:

$$(23.)\quad \begin{aligned} g(t', u', v', w') = {} & \frac{\alpha^2}{\gamma^2(\alpha^2-\gamma^2)}\zeta^2 t'^2 + \frac{\beta^2}{\gamma^2(\beta^2-\gamma^2)}\zeta^2 u'^2 \\ & + \Big(\frac{\xi^2}{\alpha^2-\gamma^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2-\gamma^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1\Big)v'^2 \\ & - \frac{2\xi\zeta}{\alpha^2-\gamma^2}t'v' - \frac{2\eta\zeta}{\beta^2-\gamma^2}u'v' + \frac{2\zeta}{2\gamma^2}v'w'; \end{aligned}$$

die Discriminante $\mathfrak{D}$ hat den Werth

$$\mathfrak{D} = -\frac{\alpha^2\beta^2}{4\gamma^6(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)}\delta^6,$$

und die adjungirte Function $f$ wird diese

$$(24.)\quad \begin{cases} f(t_0, u_0, v_0, w_0) = -\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^4(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)}\delta^4\Big(\frac{\alpha^2-\gamma^2}{4\alpha^2\gamma^2}t_0^2+\frac{\beta^2-\gamma^2}{4\beta^2\gamma^2}u_0^2 \\ \quad -\Big(\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\beta^2}+\frac{\mathfrak{z}^2}{\gamma^2}-1\Big)w_0^2+\frac{\xi}{\alpha^2}t_0w_0+\frac{\mathfrak{y}}{\beta^2}u_0w_0+\frac{\mathfrak{z}}{\gamma^2}v_0w_0\Big). \end{cases}$$

Setzt man nun

$$(25.)\quad f(t_0, u_0, v_0, w_0) = -\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^4(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)}\delta^4w_0^2\varphi_0(x_0, y_0, z_0),$$

so kommt

$$(26.)\quad \begin{cases} \varphi_0(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\gamma^2}\Big(\frac{t_0^2}{w_0^2}+\frac{u_0^2}{w_0^2}+\frac{v_0^2}{w_0^2}\Big) \\ -\frac{1}{4\alpha^2}\Big(\frac{t_0}{w_0}-2\xi\Big)^2-\frac{1}{4\beta^2}\Big(\frac{u_0}{w_0}-2\mathfrak{y}\Big)^2-\frac{1}{4\gamma^2}\Big(\frac{v_0}{w_0}-2\mathfrak{z}\Big)^2+1, \end{cases}$$

und in der definitiven Gestalt

$$(27.)\quad \begin{cases} \varphi_0(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\gamma^2}\Big(\Big(\frac{x_0-\xi}{2}\Big)^2+\Big(\frac{y_0-\mathfrak{y}}{2}\Big)^2+\Big(\frac{z_0-\mathfrak{z}}{2}\Big)^2\Big) \\ -\frac{1}{\alpha^2}\Big(\frac{x_0+\xi}{2}\Big)^2-\frac{1}{\beta^2}\Big(\frac{y_0+\mathfrak{y}}{2}\Big)^2-\frac{1}{\gamma^2}\Big(\frac{z_0+\mathfrak{z}}{2}\Big)^2+1. \end{cases}$$

Wie man sieht, stellt die Gleichung $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$ ein elliptisches Paraboloid dar. Dasselbe kann auf folgende Weise construirt werden, wenn das Ellipsoid $E$ und der feste Punkt $A$ gegeben sind. Man ziehe irgend eine zur kleinsten Axe des Ellipsoids parallele Linie $L$, und bestimme die Involution der in Bezug auf das Ellipsoid $E$ conjugirten auf der Linie $L$ liegenden Punkte; wenn die Linie $L$ das Ellipsoid trifft, so sind die beiden Schnittpunkte die Doppelpunkte dieser Involution. Man lege durch den Punkt $A$ und die Linie $L$ eine Ebene, und beschreibe in derselben denjenigen Kreis, welcher durch den Punkt $A$ geht, und in Bezug auf welchen die genannte Involution ebenfalls eine Involution der conjugirten Punkte ist; wenn $L$ das Ellipsoid getroffen hat, so ist dies derjenige Kreis, welcher durch die beiden Schnittpunkte läuft. Im Punkte $A$ zieht man an den bezeichneten Kreis die Tangente, welche die Linie $L$ im Punkte $T$ schneiden mag, und verlängere die Linie $AT$ über $T$ hinaus um sich selbst, dann ist der erhaltene Endpunkt ein Punkt des zu construirenden Paraboloids.

Um dem Ausdruck (17.) der Dichtigkeit eine andere Form zu geben, werde die Zahl $p$, welche ungerade und grösser als die Einheit ist, gleich $2m+3$ gesetzt, so kommt

$$(28.)\quad \bar{\nu}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}\frac{\alpha\beta\gamma^{-2m-2}}{(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}\mathfrak{z}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{z}-z)^{2m+2}\frac{d^m(z^{m+1}(\mathfrak{z}-z)^{-m-3})}{dz^m}\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^m}{\left(\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Die Ausführung der $m$fachen Differentiation giebt

$$(\mathfrak{z}-z)^{2m+2}\frac{d^m(z^{m+1}(\mathfrak{z}-z)^{-m-3})}{dz^m}$$

$$=(m+\tfrac{1}{2})(m-\tfrac{1}{2})\cdots\tfrac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{z}-z)^{m-1}+(m+\tfrac{1}{2})\cdots\tfrac{5}{2}m(m+3)z^{\frac{3}{2}}(\mathfrak{z}-z)^{m-2}+\cdots$$
$$\cdots+(m+3)\cdots(2m+2)z^{m+\frac{1}{2}}(\mathfrak{z}-z)^{-1}$$

$$=\frac{2\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}z^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{z}-z)^{m-1}F\left(-m,m+3,\tfrac{3}{2},\frac{-z}{\mathfrak{z}-z}\right),$$

wenn man, wie gewöhnlich, die *Gauss*ische Function mit $F(a,b,c,x)$ bezeichnet. Da nun vermöge der bekannten Relation

$$F(a,b,c,x)=(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c,x)$$

im gegenwärtigen Falle die Gleichung

$$F\left(-m,m+3,\tfrac{3}{2},\frac{-z}{\mathfrak{z}-z}\right)=\left(\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}-z}\right)^{-\frac{3}{2}}F\left(m+\tfrac{3}{2},-m-\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},\frac{-z}{\mathfrak{z}-z}\right)$$

besteht, so folgt aus (28.) die Darstellung

$$(29.)\quad \bar{\nu}=\frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}\gamma^{-2m-2}z^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{z}-z)^{m+\frac{1}{2}}F\left(m+\tfrac{3}{2},-m-\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},\frac{-z}{\mathfrak{z}-z}\right)\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^m}{\left(\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Wenn man die Gleichung (16.) in die Form bringt

$$\varphi(x,y,z)=\frac{\mathfrak{z}(z-\mathfrak{z})r^2}{\gamma^2}+\frac{\mathfrak{z}^2r^2}{\gamma^2}+\frac{(\chi z-\mathfrak{z}x)^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{(\psi z-\mathfrak{z}y)^2}{\beta^2-\gamma^2}-(z-\mathfrak{z})^2,$$

so ist leicht zu erkennen, dass in Bezug auf die Verbindungen $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\mathfrak{z}$ der erste Term von der dritten Ordnung ist, die übrigen Terme von der zweiten Ordnung sind. Aus der Grundeigenschaft der homogenen Functionen folgt daher

$$\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-\xi)-2\varphi(x,y,z)=\frac{\mathfrak{z}(z-\mathfrak{z})r^2}{\gamma^2}$$

und, wofern die Gleichung $\varphi(x,y,z)=0$ gilt,

$$(30.)\qquad \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x-\xi)=\frac{\mathfrak{z}(z-\mathfrak{z})r^2}{\gamma^2}.$$

Demnach liefern die Gleichungen (9.) als Hülfsmittel zur Vereinfachung von (29.) die Relationen

$$(31.)\qquad z_2-\mathfrak{z}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\frac{\mathfrak{z}(z-\mathfrak{z})r^2}{\gamma^2}}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2},\qquad \Sigma(x_2-\mathfrak{x})^2=r_2^2=\frac{\left(\frac{\mathfrak{z}(z-\mathfrak{z})r^2}{\gamma^2}\right)^2}{\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2},$$

und weil gegenwärtig $\mathfrak{z}(-z+\mathfrak{z})$ eine positive Grösse ist,

$$(32.)\qquad r_2=\frac{\mathfrak{z}(-z+\mathfrak{z})r^2}{\gamma^2\left(\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Man hat also

$$(33.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\gamma^{-2m-2}z^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{z}-z)^{m+\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^m}{\left(\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right)^{m+\frac{1}{2}}}\\ &=\frac{z^{\frac{1}{2}}}{(-z+\mathfrak{z})^{\frac{1}{2}}}\mathfrak{z}^{-m-1}r^{-2m-2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\mathfrak{z}(-z+\mathfrak{z})r^2}{\gamma^2\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}\right)^m\frac{\mathfrak{z}(-z+\mathfrak{z})r^2}{\gamma^2\left(\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\ &=\frac{z^{\frac{1}{2}}}{(-z+\mathfrak{z})^{\frac{1}{2}}}\mathfrak{z}^{-m-1}r^{-2m-2}(-z_2+\mathfrak{z})^m r_2, \end{aligned}\right.$$

und dadurch nimmt der Werth von $\bar{\nu}$ die folgende Gestalt an, wo wieder statt $2m+3$ die Zahl $p$ eingeführt ist,

$$(34.)\qquad \bar{\nu}=\frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{(-z_2+\mathfrak{z})^{\frac{1}{2}(p-3)}r_2}{\mathfrak{z}^{\frac{1}{2}(p-1)}r^{p-1}}\left(\frac{z}{-z+\mathfrak{z}}\right)^{\frac{1}{2}}F\left(\tfrac{1}{2}p,-\tfrac{1}{2}p,\tfrac{3}{2},\frac{-z}{-z+\mathfrak{z}}\right).$$

Wir wollen jetzt das bisher Gefundene noch einmal zusammenfassen. Aus den Daten der Aufgabe, dem Ellipsoid $E$ und dem festen Punkt $A$, geht durch die angegebene Construction das Paraboloid $\varphi_0(x_0, y_0, z_0)=0$ hervor. Durch die mit dem Anfangspunkt $A$ ausgeführte Fusspunktsconstruction entsteht aus diesem Paraboloid die Fläche $\varphi(x, y, z)=0$, welche durch die auf der kleinsten Axe des Ellipsoids $E$ senkrecht stehende Hauptebene in zwei Theile getheilt wird; der Theil, welcher mit dem Punkte $A$ auf derselben Seite der Hauptebene liegt, ist die in Rede stehende Fläche $S$. Bei der mit demselben Anfangspunkte $A$ wiederholten Fusspunktsconstruction entspricht einem Punkte $(x, y, z)$ der Fläche $S$ der Punkt $(x_2, y_2, z_2)$ der zweiten Fusspunktsfläche, und aus den Coordinaten von diesen zwei correspondirenden Punkten wird der auf den Punkt $(x, y, z)$ bezügliche Ausdruck der Dichtigkeit $\bar{\nu}$ zusammengesetzt.

3.

Man findet in dem Aufsatze „Sur les volumes des surfaces podaires“ von

*Hirst* im 62^sten^ Bande dieses Journals p. 246 eine umfassende Mittheilung über die bekannt gewordenen Arbeiten, welche die Volumina von Räumen behandeln, die durch Fusspunktsflächen von derselben erzeugenden Fläche und von verschiedenen Anfangspunkten begrenzt sind. Ich darf deshalb, ohne das Historische zu berühren, damit beginnen, dass ich den Zusammenhang der einschlagenden Fragen mit den Betrachtungen des ersten Abschnitts aufzeige. Wie an jener Stelle, sei der Anfangspunkt der Lothe $A$, doch mit den Coordinaten $\xi_A$, $\eta_A$, $\zeta_A$, die erzeugende Oberfläche $S_0$, ein Punkt derselben $B_0$, mit den Coordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$; die Punkte $B$, $B'$, die Flächen $K$, $S$, $S'$, die Coordinaten $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ mögen jetzt beziehungsweise $B_A$, $B'_A$, $K_A$, $S_A$, $S'_A$, $x_A$, $y_A$, $z_A$, $x'_A$, $y'_A$, $z'_A$ genannt werden. Wenn dann der Anfangspunkt der Lothe $A$ an einen beliebigen andern Ort des Raumes $C$ rückt, so wird zum Zeichen der dadurch eintretenden Veränderung in allen angeführten Stücken der Buchstabe $A$ durch den Buchstaben $C$ ersetzt werden. Die Flächen $S_A$ und $S_C$ werden als geschlossene Flächen angenommen, und um die von *solchen* Flächen $S_C$ eingeschlossenen Räume zu vergleichen, die *verschiedenen* Lagen des Punktes $C$ entsprechen, soll die Beziehung der Punkte $B_A$ und $B_C$ aufgesucht werden.

Um diese Absicht zu erreichen, kann man zunächst die Beziehung zwischen $B'_A$, dem sphärischen Spiegelbilde von $B_A$ in Bezug auf $K_A$, und $B'_C$, dem sphärischen Spiegelbilde von $B_C$ in Bezug auf $K_C$, bilden. Wenn man die Gleichungen (4.) zuerst auf die Punkte $A$, $B_A$, $B'_A$, und dann auf die Punkte $C$, $B_C$, $B'_C$ anwendet, so kommt

$$(35.)\qquad x'_A-\xi_A : y'_A-\eta_A : z'_A-\zeta_A : 1 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} : \frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0} : \frac{\partial\varphi_0}{\partial z_0} : \Sigma(x_0-\xi_A)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}$$

und

$$(36.)\qquad \begin{cases} x'_C-\xi_C = \dfrac{\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}}{\Sigma(x_0-\xi_A)\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}+\Sigma(\xi_A-\xi_C)\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}}, \\ y'_C-\eta_C = \dfrac{\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}}{\Sigma(x_0-\xi_A)\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}+\Sigma(\xi_A-\xi_C)\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}}, \\ z'_C-\zeta_C = \dfrac{\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial z_0}}{\Sigma(x_0-\xi_A)\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}+\Sigma(\xi_A-\xi_C)\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}}; \end{cases}$$

durch Verbindung von (35.) und (36.) wird dann

$$(37.)\quad \begin{cases} x'_C-\xi_C = \dfrac{x'_A-\xi_A}{\Sigma(\xi_A-\xi_C)(x'_A-\xi_A)+1}, \\ y'_C-\eta_C = \dfrac{y'_A-\eta_A}{\Sigma(\xi_A-\xi_C)(x'_A-\xi_A)+1}, \\ z'_C-\zeta_C = \dfrac{z'_A-\zeta_A}{\Sigma(\xi_A-\xi_C)(x'_A-\xi_A)+1}. \end{cases}$$

Geht man jetzt mit Hülfe von (1.) von den Punkten $B'_A$, $B'_C$ zu den Punkten $B_A$, $C_A$ zurück, so entstehen die verlangten Relationen

$$(38.)\quad \begin{cases} x_C-\xi_C = (x_A-\xi_A)\dfrac{\Sigma(x_A-\xi_A)^2+\Sigma(\xi_A-\xi_C)(x_A-\xi_A)}{\Sigma(x_A-\xi_A)^2}, \\ y_C-\eta_C = (y_A-\eta_A)\dfrac{\Sigma(x_A-\xi_A)^2+\Sigma(\xi_A-\xi_C)(x_A-\xi_A)}{\Sigma(x_A-\xi_A)^2}, \\ z_C-\zeta_C = (z_A-\zeta_A)\dfrac{\Sigma(x_A-\xi_A)^2+\Sigma(\xi_A-\xi_C)(x_A-\xi_A)}{\Sigma(x_A-\xi_A)^2}. \end{cases}$$

Diese Relationen enthalten keine Spur von der Fläche $S_0$, sie stellen zwischen den Punkten $B_A$ und $B_C$ die ganz allgemeine Beziehung dar, dass die Linien $AB_A$ und $CB_C$ mit einander parallel laufen, und dass die Linie $B_AB_C$ auf den Parallelen senkrecht steht. Offenbar entspricht hierbei jedem Punkte des Raumes $B_A$ ein und nur ein Punkt $B_C$, jedoch mit der Ausnahme, dass wenn $B_A$ irgend ein Punkt derjenigen Kugelfläche $\mathfrak{K}_{A,C}$ wird, die durch die Punkte $A$ und $C$ hindurchgeht und diese Punkte zu den Enden eines Durchmessers hat, der Punkt $B_C$ immer in den Punkt $C$ fällt, und dass, wenn $B_C$ ein Punkt von $\mathfrak{K}_{A,C}$ wird, der Punkt $B_A$ in den Punkt $A$ fällt; auch wächst die Entfernung $CB_C$ nur mit der Entfernung $AB_A$ zusammen über jedes Maass hinaus. Wenn man also den Punkt $(x_A, y_A, z_A)$ alle Oerter innerhalb der geschlossenen Fläche $S_A$ successive einnehmen lässt, so durchläuft der Punkt $(x_C, y_C, z_C)$ alle Oerter innerhalb der Fläche $S_C$, und zwar jeden nur ein Mal, wofern man die Kugelfläche $\mathfrak{K}_{A,C}$ ausschliesst. Es mögen für den Augenblick zwei verschiedene Lagen des Punktes $C$ mit $C_1$ und $C_2$, die entsprechenden Flächen $S_C$ mit $S_C$ und $S_{C_2}$ bezeichnet werden. Die Vergleichung der durch die Flächen $S_{C_1}$ und $S_{C_2}$ eingeschlossenen Räume kommt alsdann darauf hinaus, dass das Volumen des von der Fläche $S_C$ eingeschlossenen Raumes $\iiint dx_C dy_C dz_C$ mittelst der Gleichungen (38.) in ein

nach den Variabeln $x_A$, $y_A$, $z_A$ zu nehmendes Integral verwandelt werde, welches über den von der Fläche $S_A$ umschlossenen Raum auszudehnen ist; dieser Raum bleibt von einer Aenderung der Lage des Punktes $C$ unberührt, und die betreffende Darstellung wird erkennen lassen, wie sich das in Rede stehende Volumen bei einer Aenderung der Lage des Punktes $C$ mit ändert.

Die angegebene Transformation erfordert nun nichts weiter, als die Bildung der Functionaldeterminante

$$\Delta_{C,A} = \Sigma\pm\frac{\partial x_C}{\partial x_A}\frac{\partial y_C}{\partial y_A}\frac{\partial z_C}{\partial z_A}$$

aus den Gleichungen (38.), welche eine sehr einfache Gestalt annimmt. Diese Erscheinung hat aber darin ihren Grund, dass die durch (38.) bestimmten Functionen zu einer Gattung von Functionen gehören, deren Functionaldeterminante eine bemerkenswerthe Beschaffenheit besitzt. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Es bedeute $f$ eine beliebige Function der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, und die Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ seien mit den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die Gleichungen

$$(39.) \qquad \xi_1 = x_1 f, \quad \xi_2 = x_2 f, \quad \ldots \quad \xi_n = x_n f$$

verbunden, dann hat die aus den Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ in Bezug auf die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebildete Functionaldeterminante den Werth

$$(40.) \qquad \Delta = \Sigma\pm\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial\xi_n}{\partial x_n} = f^{n-1}\left(f + x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Der Beweis dieses Satzes folgt leicht aus dem System von Gleichungen

$$(41.) \qquad \begin{cases} d\xi_1 = \left(f + x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)dx_1 + x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + x_1\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n, \\ d\xi_2 = x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \left(f + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)dx_2 + \cdots + x_2\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\xi_n = x_n\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots\cdots\cdots + \left(f + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)dx_n, \end{cases}$$

wenn man erwägt, dass bei jedem System von $n^2$ Grössen, das die Form hat

$$\begin{matrix} x_1a_1 & x_1a_2 & \ldots & x_1a_n \\ x_2a_1 & x_2a_2 & \ldots & x_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_na_1 & x_na_2 & \ldots & x_na_n \end{matrix}$$

sowohl die Determinante, wie auch jede Unterdeterminante von jeder Ord-

nung bis zur zweiten einschliesslich herab verschwindet, und dass allein die Unterdeterminanten der ersten Ordnung, d. h. die Elemente, nicht Null sind.

Wir wollen nun den Fall in Betracht ziehen, dass $f$ eine rationale gebrochene Function der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, und setzen

$$(42.) \qquad f=\frac{F}{G}, \quad F=F^{(\lambda)}+F^{(\lambda')}+\cdots, \quad G=G^{(\mu)}+G^{(\mu')}+\cdots,$$

wo $F^{(\lambda)}, F^{(\lambda')}, \ldots G^{(\mu)}, G^{(\mu')} \ldots$ die homogenen ganzen Functionen von der Ordnung $\lambda, \lambda', \ldots \mu, \mu', \ldots$ sind, aus denen die Functionen $F$ und $G$ bestehen. Alsdann erhält man die Gleichung

$$(43.) \qquad \left\{ \begin{array}{c} f+x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ = \frac{FG+G\left(x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)-F\left(x_1\frac{\partial G}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial G}{\partial x_n}\right)}{G^2}, \end{array} \right.$$

weil aber nach der Grundeigenschaft der homogenen Functionen

$$(44.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial F}{\partial x_n} = \lambda F^{(\lambda)}+\lambda' F^{(\lambda')}+\cdots \\ x_1\frac{\partial G}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial G}{\partial x_n} = \mu G^{(\mu)}+\mu' G^{(\mu')}+\cdots \end{array} \right.$$

ist, so kommt

$$f+x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\Sigma_\lambda F^{(\lambda)}\Sigma_\mu G^{(\mu)}+\Sigma_\mu G^{(\mu)}\Sigma_\lambda \lambda F^{(\lambda)}-\Sigma_\lambda F^{(\lambda)}\Sigma_\mu \mu G^{(\mu)}}{G^2},$$

und die Functionaldeterminante erhält den Werth

$$(45.) \qquad \Delta = \frac{F^{n-1}}{G^{n+1}}\Sigma_\lambda\Sigma_\mu(1+\lambda-\mu)F^{(\lambda)}G^{(\mu)},$$

wo die Summationen nach $\lambda$ und $\mu$ auf die Ordnungszahlen $\lambda, \lambda', \ldots$ und $\mu, \mu', \ldots$ gehen.

In dem Falle der Gleichungen (38.) treten die Grössen $x_C-\xi_C$, $y_C-\eta_C$, $z_C-\zeta_C$, $x_A-\xi_A$, $y_A-\eta_A$, $z_A-\zeta_A$ beziehungsweise an die Stelle der Grössen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, x_1, x_2, x_3$, und die Zahl $n$ ist gleich 3, ferner kommt

$$F=F^{(2)}+F^{(1)}, \qquad G=G^{(2)},$$

$$F^{(2)}=\Sigma(x_A-\xi_A)^2, \quad F^{(1)}=\Sigma({}_A\xi-\xi_C)(x_A-\xi_A), \quad G^{(2)}=\Sigma(x_A-\xi_A)^2,$$

und deshalb ergiebt sich für die zu bildende Functionaldeterminante $\Delta_{C,A}$ der Ausdruck

$$(46.) \qquad \Delta_{C,A}=\frac{FF}{G^4}\cdot F^{(2)}G^{(2)}=\frac{(\Sigma(x_A-\xi_A)^2+\Sigma(\xi_A-\xi_C)(x_A-\xi_A))^2}{(\Sigma(x_A-\xi_A)^2)^3}.$$

Demnach erhält man für den durch die Fläche $S_C$ eingeschlossenen Raum die gesuchte Volumenbestimmung

$$(47.)\quad \iiint dx_C dy_C dz_C = \iiint \frac{(\Sigma(x_A-\xi_A)^2+\Sigma(\xi_A-\xi_C)(x_A-\xi_A))^2}{(\Sigma(x_A-\xi_A)^2)^3}\, dx_A dy_A dz_A.$$

Der auf der rechten Seite befindliche Ausdruck enthält die Coordinaten $\xi_C$, $\eta_C$, $\zeta_C$ des Punktes $C$ unter den Integralzeichen nur im Zähler eines Bruches, und in keiner höheren Ordnung als der zweiten. Weil nun der Raum, über den das Integral zu nehmen ist, von der Fläche $S_A$ begrenzt wird, also von der Lage des Punktes $C$ unabhängig ist, so ist die Ausführung der Integration ohne Einfluss auf die Art und Weise, wie die Coordinaten $\xi_C$, $\eta_C$, $\zeta_C$ in den Werth der rechten Seite der Gleichung (47.) eingehen, und man gelangt zu dem Satze, dass das Volumen $\iiint dx_C dy_C dz_C$ einer ganzen Function zweiter Ordnung von den Grössen $\xi_C$, $\eta_C$, $\zeta_C$ gleich ist. Nachdem dieser Hauptsatz von unserem Gesichtspunkte aus fixirt ist, liegt zu einer Ausführung desselben an diesem Orte keine Veranlassung vor.

4.

Es leuchtet ein, dass man die Gleichungen (39.) und den Ausdruck der Functionaldeterminante (40.) dazu benutzen kann, um die Transformation eines $n$fachen Integrals auszuführen, wie folgt,

$$(48.)\quad (n)\int \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)\,\omega_\Delta\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n = (n)\int \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)\,\Delta\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Hier ist $\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine ganz beliebige Function der Grössen $x_1$, $x_2$, $\ldots$ $x_n$, und $\omega_\Delta$ gleich der positiven oder negativen Einheit, je nachdem die Functionaldeterminante $\Delta$ einen positiven oder negativen Werth hat. Bei dieser Transformation sind aber einige Ueberlegungen anzustellen.

Zunächst muss man sicher sein, dass die Functionaldeterminante $\Delta$ nicht identisch verschwinde. Von den beiden Factoren $f^{n-1}$ und $f + x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$, deren Product gleich $\Delta$ ist, kann der erste nicht verschwinden, ohne dass die Substitutionsgleichungen (39.) allen Sinn verlieren, dagegen verschwindet der zweite dann und nur dann, wenn die Function $f$ homogen und von der $-1^{\text{sten}}$ Ordnung ist. Schliesst man also diesen Fall, bei dem die Ausdrücke $x_1 f$, $x_2 f$, $\ldots$ $x_n f$ nur die Verhältnisse der Grössen $x_1, \ldots x_n$ enthalten, von der Betrachtung aus, so kann $\Delta$ niemals identisch verschwinden.

Wenn vorausgesetzt wird, dass $f$ eine eindeutige stetige Function der Variabeln $x_1$, $x_2$, $\ldots$ $x_n$ ist, so liefert jede bestimmte Werthverbindung $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine ganz bestimmte Werthverbindung $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$. Es ist nun

die Frage zu erörtern, unter welchen Bedingungen es unmöglich wird, dass zwei verschiedene Werthverbindungen $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots\ x_n = a_n$, und $x_1 = b_1,\ x_2 = b_2,\ \ldots\ x_n = b_n$ eine und dieselbe Werthverbindung $\xi_1 = \alpha_1,\ \ldots\ \xi_n = \alpha_n$ hervorbringen. Schliessen wir die beiden Annahmen aus, dass die Functionalwerthe $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ und $f(b_1, b_2, \ldots b_n)$ einen verschwindenden oder einen unendlich grossen Werth haben, so muss in Folge der Gleichungen (39.) die Proportion bestehen

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : \ldots : b_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n,$$

und man kann festsetzen, dass die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sich von dem System $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ zu dem System $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ so bewegen, dass für alle zwischenliegenden Systeme die Proportion

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n$$

erfüllt bleibt. Es ist alsdann möglich, dass die diesen $x_1, x_2, \ldots x_n$ entsprechenden Werthe $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sämmtlich die Gleichungen $\xi_1 = \alpha_1,\ \ldots\ \xi_n = \alpha_n$ befriedigen; wenn aber diese Annahme, von der später die Rede sein soll, nicht zutrifft, so müssen die betreffenden Zwischensysteme die Proportion

$$\xi_1 : \xi_2 : \ldots : \xi_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n$$

befriedigen. Schreitet jetzt die Variable $x_1$ von dem Werthe $a_1$ stetig vorwärts bis zu dem Werthe $b_1$, so bewegt sich die Variable $\xi_1$ von dem Werthe $\alpha_1$ fort und zu dem Werthe $\alpha_1$ zurück; also kann es nicht fehlen, dass die Variable $\xi_1$ wenigstens *ein* Mal auf ihrem Wege umkehrt, und dass wegen der festen Proportionalität der übrigen Variabeln auch $\xi_2, \ldots \xi_n$ diese Umkehr mitmachen. Das heisst, es giebt immer ein Zwischensystem $x_1 = X_1,\ x_2 = X_2, \ldots\ x_n = X_n$, welches das System $\xi_1 = \Xi_1,\ \xi_2 = \Xi_2, \ldots\ \xi_n = \Xi_n$ hervorbringt, und die Eigenschaft besitzt, dass, wenn $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ gegen die Null abnehmende positive Grössen sind, und wenn $\delta$ eine gegen die Null abnehmende Grösse von festem, aber positivem oder negativem Zeichen ist, den beiden Werthsystemen

$$x_1 = X_1(1-\varepsilon),\quad x_2 = X_2(1-\varepsilon),\quad \ldots\quad x_n = X_n(1-\varepsilon)$$

und

$$x_1 = X_1(1+\varepsilon'),\quad x_2 = X_2(1+\varepsilon'),\quad \ldots\quad x_n = X_n(1+\varepsilon')$$

ein und dasselbe Werthsystem

$$\xi_1 = \Xi_1(1+\delta),\quad \xi_2 = \Xi_2(1+\delta),\quad \ldots\quad \xi_n = \Xi_n(1+\delta)$$

correspondirt.

Nun haben die Gleichungen (41.) die Bedeutung, wenn die Incremente $dx_1, \ldots dx_n$ gegeben sind, die entsprechenden Incremente $d\xi_1, d\xi_2, \ldots d\xi_n$ darzustellen. Dieselben Gleichungen liefern, wenn die Incremente $d\xi_1, d\xi_2, \ldots$

$d\xi_n$ gegeben sind, eine eindeutige Bestimmung der Incremente $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, wofern die Determinante $\Delta$ einen endlichen von der Null verschiedenen Werth hat. Im obigen Falle, wo es sich um die Systeme $(\Xi_1, \Xi_2, \ldots \Xi_n)$ und $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ handelt, weiss man, dass den Incrementen $\delta\Xi_1, \delta\Xi_2, \ldots \delta\Xi_n$ der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ebensowohl die Incremente $-\varepsilon X_1, -\varepsilon X_2, \ldots -\varepsilon X_n$ als die Incremente $\varepsilon' X_1, \varepsilon' X_2, \ldots \varepsilon' X_n$ der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ correspondiren. Also muss für das Werthsystem $X_1, X_2, \ldots X_n$ die Determinante $\Delta$ entweder einen verschwindenden oder einen unendlich grossen Werth haben.

Eine entsprechende Erwägung lehrt, dass, wenn für die sämmtlichen Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche mit Erfüllung der Proportion $x_1 : x_2 : \ldots : x_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n$ den Uebergang von $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ zu $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ stetig vermitteln, die Gleichungen $\xi_1 = \alpha_1, \ldots \xi_n = \alpha_n$ gelten, für diese Werthsysteme die Determinante $\Delta$ wieder gleich Null sein muss. Wir können deshalb die Beantwortung der zu entscheidenden Frage in der folgenden Weise zusammenfassen.

Wenn man den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein Gebiet von solcher Beschaffenheit anweist, dass zwischen je zwei Werthverbindungen, bei denen die Verhältnisse der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ beziehungsweise dieselben sind, der stetige Uebergang so bewirkt werden kann, dass die betreffenden Verhältnisse auch in allen Zwischensystemen dieselben bleiben, und dass weder die Function $f$ noch der Ausdruck $f + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ für irgend eine Werthverbindung einen verschwindenden oder einen unendlich grossen Werth annimmt, so können innerhalb des bezeichneten Gebietes zwei verschiedene Werthverbindungen $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ durchaus nicht dieselbe Werthverbindung $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ erzeugen; oder in andern Worten, dem in Rede stehenden Grössengebiet der $x_1, x_2, \ldots x_n$ entspricht *einfach* ein bestimmtes Grössengebiet der $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. Um das System der Gleichungen (39.) nach den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufzulösen, kann man das System von Gleichungen

$$(49.) \qquad x_1 = \xi_1 \varrho, \quad x_2 = \xi_2 \varrho, \quad \ldots \quad x_n = \xi_n \varrho$$

bilden, und die Function $\varrho$ der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ durch die Gleichung

$$(50.) \qquad \varrho f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varrho f(\xi_1 \varrho, \xi_2 \varrho, \ldots \xi_n \varrho) = 1$$

bestimmen. Wenn die Function $f$ wie in (42.) eine gebrochene rationale Function $\frac{F}{G}$ ist, und wenn man die homogenen Functionen $F^{(\lambda)}, G^{(\mu)}, \ldots$ durch die Substitution $x_1 = \xi_1, \ldots x_n = \xi_n$ in $F^{(\lambda)}(\xi), \ldots G^{(\mu)}(\xi), \ldots$ über-

gehen lässt, so kommt für $\varrho$ die folgende algebraische Gleichung:

$$(51.) \quad \varrho^{\lambda+1}F^{(\lambda)}(\xi)+\varrho^{\lambda'+1}F^{(\lambda')}(\xi)+\cdots = \varrho^{\mu}F^{(\mu)}(\xi)+\varrho^{\mu'}F^{(\mu')}(\xi)+\cdots$$

Wir wenden jetzt die Voraussetzung $f=\frac{F}{G}$ auf die Gleichung (48.) an. Die Begrenzung des Gebiets für die Integrationsvariabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sei unabhängig von den Coefficienten der Zählerfunction $F$ und ausserdem so gewählt, dass innerhalb desselben weder eine der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ noch die Function $\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ unendlich gross wird, die Nennerfunction $G$ aber nicht verschwindet. Weil $F$ und $G$ rationale ganze algebraische Functionen sind, so kann man dieses Integrationsgebiet in eine endliche Anzahl von Theilgebieten zerlegen, in deren jedem, mit Ausschluss der Begrenzung selbst, die vorhin entwickelten Bedingungen erfüllt sind. Jedes dieser Theilgebiete kann man wieder in der Weise in zwei Stücke theilen, dass in dem einen Stück jene Bedingungen mit Einschluss der Begrenzung befriedigt sind, und dass das andere Stück zu dem $n$fachen Integral einen Beitrag von beliebig kleiner Grösse liefert; es ist deshalb erlaubt, bei der Betrachtung der Integrale auf die Stücke der zweiten Art keine Rücksicht zu nehmen. Für jedes der in Rede stehenden Theilgebiete hat die Functionaldeterminante ein festes Vorzeichen $\omega_\Delta = \pm 1$, und jedem Theilgebiet entspricht *einfach* ein bestimmtes Gebiet der $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. In der Gleichung, welche entsteht, indem der aus (45.) entnommene Werth von $\Delta$ in (48.) substituirt wird,

$$(52.) \quad \begin{cases} (n)\int \Phi(\xi_1\varrho, \xi_2\varrho, \ldots \xi_n\varrho)\,\omega_\Delta\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n \\ = (n)\int \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)\frac{F^{n-1}}{G^{n+1}}\Sigma_\lambda\Sigma_\mu(1+\lambda-\mu)F^{(\lambda)}G^{(\mu)}\,dx_1\ldots dx_n \end{cases}$$

stellt die linke Seite ein Aggregat von Integralen dar, welche sich über die bezeichneten Gebiete der $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ erstrecken. Die Constanten $c$ der Function $F$ kommen auf der rechten Seite nur in ganzen rationalen Verbindungen vor, folglich bleibt der Werth der rechten Seite auch nach Ausführung der von den $c$ unabhängigen $n$fachen Integration eine ganze rationale Function der Grössen $c$. So entsteht der Satz, dass das auf der linken Seite von (52.) befindliche Aggregat von Integralen einer ganzen rationalen Function der Coefficienten $c$ der Zählerfunction $F$ gleich ist, und dieser Satz schliesst den am Ende des vorigen Abschnittes hergeleiteten Satz über die Volumina der von Fusspunktsflächen begrenzten Räume als besondern Fall in sich.

Bonn, den 3. Juni 1866.

# Ueber einen Satz aus der Determinantentheorie.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

Bezeichnet $\Delta$ das Product der $\frac{n.n-1}{2}$ Differenzen, die man erhält, wenn man jede der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ von allen folgenden abzieht, so ist bekanntlich

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Man kann ohne diesen speciellen Fall als bekannt voraus zu setzen, einen viel allgemeineren leicht beweisen.

Versteht man nemlich unter $\overset{k}{C}(x_1 x_2 \ldots x_l)$ die Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zur Classe $k$ aus den Elementen $x_1, x_2, \ldots x_l$, wobei die einzelnen Elemente in jeder Form als Factoren betrachtet und die einzelnen Formen addirt werden, so ist

$$(1.) \qquad \overset{k+1}{C}(x_2 \ldots x_l) - \overset{k+1}{C}(x_1 \ldots x_{l-1}) = (x_l - x_1)\overset{k}{C}(x_1 \ldots x_l).$$

Denn wenn man den Ausdruck $(x_l - x_1)\overset{k}{C}(x_1 \ldots x_l)$ entwickelt, so heben sich offenbar alle Glieder auf, in welchen zugleich die Elemente $x_1$ und $x_l$ vorkommen, da jedem in $\overset{k}{C}(x_1 \ldots x_l)$ vorkommenden Gliede, welches $x_1^p x_l^q$ enthält ein anderes entspricht, welches $x_1^{p-1} x_l^{q+1}$ enthält, so dass das erste mit $x_l$ multiplicirt, dasselbe giebt, wie das zweite mit $x_1$ multiplicirt. Es bleibt also nur die Differenz des mit $x_l$ multiplicirten Ausdrucks $\overset{k}{C}(x_2 \ldots x_l)$ und des mit $x_1$ multiplicirten Ausdrucks $\overset{k}{C}(x_1 \ldots x_{l-1})$. Andererseits heben sich in dem Ausdrucke $\overset{k+1}{C}(x_2 \ldots x_l) - \overset{k+1}{C}(x_1 \ldots x_{l-1})$ offenbar alle Glieder auf, welche nur aus den Elementen $x_2 \ldots x_{l-1}$ zusammengesetzt sind. Es bleiben also von $\overset{k+1}{C}(x_2 \ldots x_l)$ nur die Glieder, welche den Factor $x_l$ enthalten, und von $\overset{k+1}{C}(x_1 \ldots x_{l-1})$ nur die Glieder, welche den Factor $x_1$ enthalten, d. h. es bleibt auch hier die Differenz $x_l \overset{k}{C}(x_2 \ldots x_l) - x_1 \overset{k}{C}(x_1 \ldots x_{l-1})$.

Bezeichnet man, unter der Voraussetzung, dass $m$ die Anzahl der Elemente $x_p, x_q, \ldots x_v$ ist, durch $\overset{k+1}{D}(x_p x_q \ldots x_v)$ die Reihe

$$\overset{k+1}{C}(x_p x_q \ldots x_v) + a_{1,k+m}\overset{k}{C}(x_p x_q \ldots x_v) + a_{2,k+m}\overset{k-1}{C}(x_p x_q \ldots x_v) + \cdots + a_{k+1,k+m},$$

wo $a_{1,k+m}$, $a_{2,k+m}$ u. s. w. beliebige Coefficienten sind, so hat man also

$$\overset{k+1}{D}(x_1 x_2 \ldots x_{l-1})$$
$$= \overset{k+1}{C}(x_1 x_2 \ldots x_{l-1}) + a_{1,k+l-1}\overset{k}{C}(x_1 x_2 \ldots x_{l-1}) + a_{2,k+l-1}\overset{k-1}{C}(x_1 x_2 \ldots x_{l-1}) + \cdots + a_{k+1,k+l-1},$$

$$\overset{k+1}{D}(x_2 \ldots x_l)$$
$$= \overset{k+1}{C}(x_2 \ldots x_l) + a_{1,k+l-1}\overset{k}{C}(x_2 \ldots x_l) + a_{2,k+l-1}\overset{k-1}{C}(x_2 \ldots x_l) + \cdots + a_{k+1,k+l-1},$$

und hieraus folgt unmittelbar, vermöge der Gleichung (1.)

$$(2.) \quad \overset{k+1}{D}(x_2 \ldots x_l) - \overset{k+1}{D}(x_1 \ldots x_{l-1}) = (x_l - x_1)\overset{k}{D}(x_1 x_2 \ldots x_l).$$

Ist $k = 0$, so ergiebt sich von selbst $\overset{1}{D}(x_2 \ldots x_l) - \overset{1}{D}(x_1 \ldots x_{l-1}) = x_l - x_1$.

Sei nun

$$\begin{aligned}
(x)_1 &= x + a_{1,1}, \\
(x)_2 &= x^2 + a_{1,2}x + a_{2,2}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
(x)_{n-1} &= x^{n-1} + a_{1,n-1}x^{n-2} + a_{2,n-1}x^{n-3} + \cdots + a_{n-1,n-1},
\end{aligned}$$

und man bilde die Determinante

$$(3.) \quad R = \begin{vmatrix} 1 & (x_1)_1 & (x_1)_2 & \ldots & (x_1)_{n-1} \\ 1 & (x_2)_1 & (x_2)_2 & \ldots & (x_2)_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & (x_n)_1 & (x_n)_2 & \ldots & (x_n)_{n-1} \end{vmatrix},$$

so findet man, wie bekannt, indem man die Glieder jeder Horizontalreihe von den entsprechenden Gliedern der folgenden abzieht,

$$R = \begin{vmatrix} (x_2)_1 - (x_1)_1 & (x_2)_2 - (x_1)_2 & \ldots & (x_2)_{n-1} - (x_1)_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_n)_1 - (x_{n-1})_1 & (x_n)_2 - (x_{n-1})_2 & \ldots & (x_n)_{n-1} - (x_{n-1})_{n-1} \end{vmatrix},$$

also da $\dfrac{x_m^k - x_n^k}{x_m - x_n} = \overset{k-1}{C}(x_m x_n)$, wenn man aus den einzelnen Horizontalreihen die Factoren $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, $\ldots$ $x_n - x_{n-1}$ absondert,

$$R = (x_2-x_1)(x_3-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})\begin{vmatrix} 1 & \overset{1}{D}(x_1x_2) & \dots & \overset{n-2}{D}(x_1x_2) \\ 1 & \overset{1}{D}(x_2x_3) & \dots & \overset{n-2}{D}(x_2x_3) \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & \cdot \\ 1 & \overset{1}{D}(x_{n-1}x_n) & \dots & \overset{n-2}{D}(x_{n-1}x_n) \end{vmatrix}.$$

Die in dieser Gleichung auf der rechten Seite befindliche Determinante verwandelt sich aber, unter Berücksichtigung der Gleichung (2.), wenn man dasselbe Verfahren wiederholt, in

$$(x_3-x_1)(x_4-x_2)\dots(x_n-x_{n-2})\begin{vmatrix} 1 & \overset{1}{D}(x_1x_2x_3) & \dots & \overset{n-3}{D}(x_1x_2x_3) \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & \cdot \\ 1 & \overset{1}{D}(x_{n-2}x_{n-1}x_n) & \dots & \overset{n-3}{D}(x_{n-2}x_{n-1}x_n) \end{vmatrix},$$

mithin findet man schliesslich, bei fortgesetzter Wiederholung desselben Verfahrens,

$$(4.) \qquad R = \Delta.$$

Der im Eingange erwähnte bekannte Satz ergiebt sich also hieraus, indem man die sämmtlichen Coefficienten $a_{1,n-1}$ u. s. w. in den Werthen von $(x)_{n-1}$, $(x)_{n-2}$ u. s. w. gleich Null setzt.

Setzt man $(x)_k = x(x+r)(x+2r)\dots(x+(k-1)r)$, wofür man auch $x^{k|r}$ schreiben kann, so hat man den speciellen Fall

$$(5.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{1|r} & x_1^{2|r} & \dots & x_1^{n-1|r} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & & \cdot \\ 1 & x_n^{1|r} & x_n^{2|r} & \dots & x_n^{n-1|r} \end{vmatrix}.$$

Da nun, wenn $\overset{k}{xB}$ den $k^{\text{ten}}$ Binomialcoefficienten der Potenz $x$ bedeutet, $\overset{k}{xB} = \frac{x^{k|-1}}{1.2\dots k}$, so folgt hieraus

$$(6.) \qquad \frac{\Delta}{2^{n-2}.3^{n-3}.4^{n-4}\dots(n-1)} = \begin{vmatrix} 1 & x_1\overset{1}{B} & x_1\overset{2}{B} & \dots & x_1\overset{n-1}{B} \\ 1 & x_2\overset{1}{B} & x_2\overset{2}{B} & \dots & x_2\overset{n-1}{B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n\overset{1}{B} & x_n\overset{2}{B} & \dots & x_n\overset{n-1}{B} \end{vmatrix}.$$

Nun kann man diese Determinante in die gleichwerthige

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+1\overset{1}{B} & x_1+1\overset{2}{B} & \dots & x_1+1\overset{n-1}{B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n+1\overset{1}{B} & x_n+1\overset{2}{B} & \dots & x_n+1\overset{n-1}{B} \end{vmatrix}$$

verwandeln, indem man jedes folgende Glied der einzelnen Horizontalreihen zu dem unmittelbar vorhergehenden addirt. Aus dieser letzteren Determinante findet man wieder, indem man die ersten zwei Glieder jeder Horizontalreihe unverändert lässt und jedes folgende zu dem unmittelbar vorhergehenden addirt, die gleichwerthige Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+1\overset{1}{B} & x_1+2\overset{2}{B} & \dots & x_1+2\overset{n-1}{B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n+1\overset{1}{B} & x_n+2\overset{2}{B} & \dots & x_n+2\overset{n-1}{B} \end{vmatrix}.$$

Bei Fortsetzung dieses Verfahrens ergiebt sich also schliesslich

$$(7.) \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1+1\overset{1}{B} & x_1+2\overset{2}{B} & \dots & x_1+n-1\overset{n-1}{B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n+1\overset{1}{B} & x_n+2\overset{2}{B} & \dots & x_n+n-1\overset{n-1}{B} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{2^{n-2}.3^{n-3}.4^{n-4}\dots(n-1)}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke allgemein $x_k = x_1 + k - 1$, so geht $\Delta$ in $2^{n-2}.3^{n-3}\dots(n-1)$ über, also ist dann die Determinante der Einheit gleich *).

Göttingen, im October 1865.

---

*) Dieser besondere Fall findet sich schon bei *Baltzer*, Theorie u. Anwend. der Determinanten, 2. Aufl. p. 16.

# Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré $r$, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré $m$; suivi de quelques réflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques.

(Par M. *E. de Jonquières* à Paris.)

1. Le théorème suivant résout, d'une manière générale, toutes les questions de contacts d'ordre quelconque des courbes algébriques avec une courbe fixe. Afin d'en faciliter et d'en abréger l'énoncé, nous adopterons les notations suivantes:

Notations. $t$ désigne le nombre des contacts proposés, dont les ordres sont $n_1, n_2, n_3, \ldots n_{t-1}, n_t$;

$i$, nombre entier, positif, pouvant être nul;

$\Sigma_i$, représente la somme de quantités données, prises $i$ à $i$; par exemple $\Sigma_3(a, b, c, d, \ldots) = abc+abd+acd+bcd+\cdots$ etc.;

$d$, nombre des points doubles de la courbe $U_m$;

$D$ est le quatrinôme $m^2-3m-2d+2$; ou, plus brièvement, $D = m'-2m+2$; $m'$ désignant la *classe* de la courbe $U_m$, qu'on suppose ne posséder aucun point de rebroussement;

$X = rm-(n_1+n_2+\cdots n_t)-p = rm-\sum_1(n_i)-p$;

$T$, exprime le nombre des points fixes par lesquels les courbes $C_r$ doivent passer. Parmi ces points donnés, $p$ peuvent être pris sur la courbe fixe $U_m$; ils peuvent même, en tout ou en partie, y être infiniment voisins les uns des autres, ce qui implique, pour les courbes $C_r$, la condition commune d'avoir, avec $U_m$, des contacts d'ordres donnés en des points désignés $\theta, \theta', \ldots$ etc., outre celle de toucher cette courbe, en des points indéterminés, par des contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_t$;

$\prod_{i=0}^{t}(n_i+1)$, désigne le produit des $t$ facteurs $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_t+1)$; pareillement

$\prod_{i=0}^{i=n}(D-2i)$, désigne le produit $D(D-2)(D-4)\ldots(D-2i)$; et

$\prod_{i=t-1}^{i=i}(X-i)$, désigne le produit $(X-i)(X-i-1)(X-i-2)\ldots(X-t+1)$; enfin $\mu$ exprime le nombre des courbes $C_r$, qui satisfont à toutes les conditions proposées, autres que celles des contacts en des points indéterminés de $U_m$, et qui passent, en outre, par $n_1+n_2+\cdots+n_t$ points fixes.

Cela posé, voici l'énoncé du théorème général dont il s'agit:

Théorème I. *Si des courbes $C_r$, de degré $r$, doivent:*

1°. *toucher une courbe fixe $U_m$, en $t$ points distincts et indéterminés, par des contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_t$, respectivement; les indices $n_1, n_2, \ldots n_t$ étant d'ailleurs tels qu'on ait: $n_1+n_2+\cdots+n_t < mr-t-p+1$;*

2°. *passer par $T$ points fixes, dont $p$ sont pris sur $U_m$, à distance finie ou à distance infiniment petite les uns des autres, par groupes;*

3°. *enfin, satisfaire à $\left[\frac{r(r+3)}{2}-\sum_1(n)-T\right]$ autres conditions, quelconques mais étrangères à la courbe $U_m$;*

*le nombre des courbes $C_r$, qui satisfont à toutes ces conditions, est donné, en général, par la formule:*

$$(a.)\qquad N=\mu\,.\prod_t(n_i+1)\,.\left\{\begin{aligned}
&\prod_{i=t-1}^{i=0}(X-i),\\
&+\prod_{i=t-1}^{i=1}(X-i)\cdot\frac{\sum_1(n)}{2}\cdot D,\\
&+\prod_{i=t-1}^{i=2}(X-i)\cdot\frac{\sum_2(n)}{2^2}\cdot D(D-2),\\
&+\prod_{i=t-1}^{i=3}(X-i)\cdot\frac{\sum_3(n)}{2^3}\cdot D(D-2)(D-4),\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\prod_{i=t-1}^{i=t-3}(X-i)\cdot\frac{\sum_{t-3}(n)}{2^{t-3}}\cdot\prod_{i=t-4}^{i=0}(D-2i),\\
&+\prod_{i=t-1}^{i=t-2}(X-i)\cdot\frac{\sum_{t-2}(n)}{2^{t-2}}\cdot\prod_{i=t-3}^{i=0}(D-2i),\\
&+(X-t+1)\cdot\frac{\sum_{t-1}(n)}{2^{t-1}}\cdot\prod_{i=t-2}^{i=0}(D-2i),\\
&+\frac{\sum_t(n)}{2^t}\cdot\prod_{i=t-1}^{i=0}(D-2i).
\end{aligned}\right.$$

Cette formule suppose que les indices $n_i$ sont tous inégaux; le cas où

quelques-uns sont égaux entre eux, donne lieu à une réduction qui sera indiquée plus loin (VIII.).

Deux voies différentes conduisent à la formule (*a.*), et constituent par conséquent deux modes de solution, distincts quant à la forme, identiques pour le résultat; nous allons les faire connaître successivement. Mais, afin d'éviter une inutile prolixité, nous n'en développerons qu'un seul avec un peu d'étendue.

## Première solution.

II. Avant d'entrer dans le détail de la démonstration, qui est nécessairement assez longue, commençons par en faire connaître l'esprit et la marche.

On suppose d'abord que la courbe fixe $U_m$ possède le nombre *maximum* de points doubles, savoir $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, de telle sorte que ses points se déterminent individuellement *), et l'on cherche le nombre $N'$ qui résout, à l'égard de cette courbe, la question proposée. On détermine ensuite la diminution que les points doubles ont fait subir au nombre $N$ qui serait relatif à une courbe du degré $m$ douée de $d$ points doubles seulement. Soit $N''$ le nombre qui exprime cette réduction; on a nécessairement $N=N'+N''$.

Quant à la cause de cette diminution, elle consiste en ce que des droites ou des courbes, qui passent par un point double d'une courbe, en y touchant une des branches de cette courbe par un contact d'ordre $n$, empruntent à cette seule circonstance la propriété d'avoir en ce point, avec la courbe fixe, un contact d'ordre $n+1$. Cependant un tel contact a, par cela même, quelque chose de *singulier*, propre à le faire écarter du résultat fourni par les formules générales qui se rapportent aux contacts d'ordre $n+1$, proprement dits.

C'est ainsi, pour en citer l'exemple le plus simple, qu'une droite menée par un point double, remplit la condition d'une véritable tangente, puisqu'elle y rencontre la courbe en deux points infiniment voisins; et pourtant une telle droite est généralement exclue du nombre des tangentes proprement dites, à cause du genre particulier, ou pour mieux dire singulier, du contact qu'elle a avec la courbe.

---

*) C'est à MM. *Riemann*, *Clebsch* et *Chasles*, qu'on doit, depuis peu de temps, de savoir qu'il existe des courbes douées *effectivement* de ce nombre *maximum* de points doubles; acquisition utile pour la science.

On sait d'ailleurs que, si l'on a quelque motif de regarder la droite menée par le point double, comme étant tangente à la courbe, on doit la compter pour deux tangentes, et non pas pour une seule. Il y a lieu pareillement, dans chaque question, non seulement de déterminer le nombre des courbes $C_r$ qui satisfont aux conditions données par des contacts singuliers, en passant par un ou plusieurs points doubles de la courbe fixe $U_m$, mais encore de trouver *l'ordre de multiplicité* de chacune de ces courbes, afin d'en conclure avec précision le nombre des courbes tangentes dont elle tient lieu dans la solution générale du problème proposé.

III. Le premier terme de la formule (*a.*), savoir $\mu . \prod_{i}^{t} (n_i+1) . \prod_{i=t-1}^{i=0} (X-i)$, est précisément le nombre $N'$, qui résout la question proposée, à l'égard d'une courbe $U'_m$ douée de $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles. La somme de tous les autres termes représente le nombre $N''$ des courbes $C_r$ qui, passant par les points doubles que la courbe $U'_m$ possède en excédant de ceux de la courbe $U_m$, ont des contacts singuliers en ces points avec $U'_m$. C'est ce que nous allons prouver successivement.

IV. Supposons d'abord que les conditions, autres que celles des contacts avec $U'_m$, auxquelles les courbes $C_r$ doivent satisfaire, consistent exclusivement à passer par des points fixes, d'où $\mu = 1$. Nous allons démontrer que

Théorème II. *Si des courbes $C_r$ doivent:*

1°. *toucher une courbe fixe $U'_m$, douée de $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles, en $t$ points distincts et indéterminés, par des contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_t$, respectivemnt;*

2°. *passer par $T$ points fixes, dont $p$ sont situés sur $U'_m$;*

3°. *enfin, passer par $T' = \frac{r(r+3)}{2} - \sum_{1}^{t}(n_i) - T$ autres points fixes étrangers à la courbe $U'_m$;*

*le nombre des courbes $C_r$, qui satisfont à la question, est égal à*

$$(b.) \qquad N' = \prod_{i}^{t} (n_i+1) . \prod_{i=t-1}^{i=0} (X-i).$$

Nous diviserons la démonstration en trois parties, pour y ménager comme autant de points de repos. Dans la première, nous prouverons que si la formule (*b.*) est vraie pour $t-1$ contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}$, elle est vraie pour $t$ contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}, 1$. Dans la seconde, nous prouverons que, si elle est vraie pour $t-1$ contacts d'ordres $n_1, n_2, n_3, \ldots n_{t-1}$, et aussi

pour $t$ contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}, (n_t-1)$, elle l'est encore pour $t$ contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}, n_t$. Enfin, dans la troisième partie, nous démontrerons l'exactitude des deux hypothèses sur lesquelles on s'appuie dans les deux premières.

V. Première partie de la démonstration. On admet que la formule (*b.*) est vraie pour $t-1$ contacts d'ordres quelconques, et il s'agit de prouver qu'elle est vraie pour un contact de plus, l'ordre de celui-ci étant égal à l'unité.

En effet, par un point $x$ de $U'_m$, il passe, d'après l'hypothèse, $P$ courbes $C_r$, dont chacune satisfait aux conditions données et, en outre, touche $U'_m$, en $t-1$ points indéterminés, par des contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}$; $P$ ayant pour valeur

$$P = (n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_{t-1}+1)\cdot\begin{cases}[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-1-p]\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-1-p-1]\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-1-p-2]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-1-p-t+2].\end{cases}$$

Chacune de ces courbes $C_r$ coupe $U'_m$ en d'autres points simples, que nous appellerons génériquement $y$, et dont le nombre est égal à

$$Q = rm-(n_1+1)-(n_2+1)-(n_3+1)-\cdots-(n_{t-1}+1)-1-p.$$

Donc, à un point $x$, il correspond, sur la courbe $U'_m$, $P.Q$ points $y$. Réciproquement, par un point $y$, il passe $P$ courbes $C_r$, qui sont dans les mêmes conditions; et, à un point $y$, il correspond $P.Q$ points $x$. Par conséquent il y a, sur $U'_m$, $2P.Q$ points $x$, dont chacun coïncide avec le point $y$ correspondant; c'est-à-dire qu'il existe $2P.Q$ courbes $C_r$, dont chacune touche encore une fois $U'_m$ par un contact simple, indépendamment des $t-1$ contacts d'ordres $n_1, n_2, n_3, \ldots n_{t-1}$, qu'elles possèdent toutes avec cette courbe fixe. Or on a

$$2P.Q = (n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_{t-1}+1).2.\begin{cases}[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-p]\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-p-1]\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-p-2]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots n_{t-1}+1)-p-t+1].\end{cases}$$

Ce qui est précisément la formule (*b.*), dans laquelle $n_t = 1$.

VI. Deuxième partie de la démonstration. On admet, comme ci-dessus, que la formule (*b.*) est vraie pour $t-1$ contacts $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}$,

et, en outre, qu'elle l'est aussi pour $t$ contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}, n_t-1$; il s'agit de prouver qu'elle est vraie pour $t$ contacts $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}, n_t$, qui sont les mêmes que les précédents, sauf le dernier qui compte une unité de plus.

Par un point quelconque $x$ de $U'_m$, par les $n_t-1$ points de $U'_m$ infiniment voisins du point $x$, et par les $T+T'$ autres points donnés, on peut, en vertu de l'hypothèse, mener $P$ courbes $C_r$, dont chacune touche $U'_m$ en $t-1$ points, autres que $x$, par des contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}$, tandis qu'elle la touche au point $x$ lui-même par un contact d'ordre $n_t-1$; $P$ ayant pour valeur

$$P = (n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_{t-1}+1)\cdot\begin{cases}[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-n_t-p]\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-n_t-p-1]\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-n_t-p-t+2]\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})-n_t-p-t+1].\end{cases}$$

Chacune de ces courbes coupe $U'_m$ en $Q$ autres points simples $y$, $Q$ ayant pour valeur $Q = rm-(n_1+1)-(n_2+1)-\cdots-(n_{t-1}+1)-p-t$; car ici la partie soustractive s'accroît du nombre $t$, savoir: le point $x$ et les $t-1$ points infiniment voisins, qui sont, aussi bien que les $p$ points donnés, pris sur $U'_m$. Ainsi, à un point $x$, il correspond $P.Q$ points $y$. Réciproquement, en vertu de la deuxième partie de l'hypothèse, par un point simple $y$ de $U'_m$, on peut mener $R$ courbes $C_r$, dont chacune la touche en $t-1$ autres points, par des contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-1}$, et en un $t^{\text{ième}}$ autre point $x$ par un contact d'ordre $n_t-1$; le nombre $R$ ayant pour valeur

$$R = (n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_{t-1}+1).n_t.\begin{cases}[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+(n_t-1))-p-1]\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+(n_t-1))-p-2]\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+(n_t-1))-p-3]\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ .[rm-(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+(n_t-1))-p-t].\end{cases}$$

Ainsi, à un point simple $y$, il correspond $R$ points $x$, dont chacun est, pour les courbes $C_r$, un point de contact d'ordre $n_t-1$. Donc il existe, entre $x$ et $y$, une relation algébrique de la forme

$$(c.)\qquad A.x^R(y^{P.Q}+B.y^{P.Q-1}+\cdots\text{ etc.})+C.x^{R-1}(y^{PQ}+\cdots\text{ etc.})+\cdots\text{ etc.} = 0.$$

Il est évident que le coefficient $A$ n'est pas nul en général. Car si l'on

suppose le point $y$ à l'infini, il n'y en a pas moins $R$ courbes $C_r$ tangentes à $U'_m$ dans les conditions précitées, et par conséquent $R$ points $x$ correspondants; ce qui exige que le terme $A.x^R$ existe dans l'équation.

Actuellement, si l'on suppose $x=y$, chacune des courbes pour lesquelles cette circonstance se présente, a $t$ contacts avec $U_m$, d'ordres $n_1$, $n_2 \ldots n_t$, respectivement, donc satisfait à l'énoncé de la question. Or, dans ce cas, la formule (*c.*) devient du degré $PQ+R$ en $x$ seul; donc il existe, en général, $PQ+R$ courbes satisfaisant aux conditions données; et il est aisé de voir que ce nombre est précisément celui qu'exprime la formule (*b.*).

VII. Troisième partie de la démonstration. Il s'agit enfin de démontrer l'exactitude des deux hypothèses sur lesquelles reposent les raisonnements des §. V. et VI.

Or, si l'on suppose que les courbes $C_r$ forment un faisceau, c'est-à-dire aient toutes les mêmes points d'intersection (dont $p$ situés sur $U'_m$), et qu'elles doivent toucher $U'_m$ par un contact simple, on prouve immédiatement, en raisonnant comme ci-dessus (V.), que le nombre des courbes qui satisfont à la question est $2(mr-p-1)$. Donc, en vertu de ce qui a été démontré (V.), s'il s'agit de courbes $C_r$, ayant en commun un, deux, ... $n_1-1$ points de moins que ci-dessus, mais en revanche ayant avec $U'_m$ *un seul* contact du premier, du second, ... du $n_1^{\text{ième}}$ ordre, le nombre des courbes satisfaisant à la question devient, respectivement,

$$3(rm-p-2);\quad 4(rm-p-3);\quad \ldots\quad (n_1+1)(rm-p-n_1).$$

Ensuite, en vertu de ce qui a été démontré (VI.), on trouverait pour *un deuxième* contact d'ordre 1, 2, 3, ... $n_2$ [le nombre des points communs aux $C_r$ diminuant successivement d'une unité, de telle sorte que le nombre total des conditions données soit toujours $\frac{r(r+3)}{2}$ ], on trouverait, disons-nous, les nombres respectifs:

$$(n_1+1).2[(rm-(n_1+1)-p).(rm-(n_1+1)-p-1)] \quad \text{pour } n_2=1;$$
$$(n_1+1).3[(rm-(n_1+2)-p).(rm-(n_1+2)-p-1)] \quad \text{pour } n_2=2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n_1+1)(n_2+1)[(rm-(n_1+n_2)-p).(rm-(n_1+n_2)-p-1)] \quad \text{pour } n_2=n_2;$$

Et ainsi de suite, de proche en proche, en s'élevant chaque fois d'une unité, soit dans l'ordre du contact, soit dans le nombre des contacts, jusqu'aux nombres et aux ordres de contacts exprimés dans les énoncés des deux hypothèses; ce qui démontre la proposition.

VIII. Remarquons que le nombre représenté par la formule (*b.*) est le nombre des groupes de points de contact. Si tous les indices $n_1, n_2 \ldots n_t$ sont inégaux, ainsi que le supposent les énoncés des théorèmes I. et II., c'est aussi le nombre des courbes $C_r$ qui satisfont à la question. Mais s'il y en a qui soient égaux entre eux, $q$ par exemple, chaque courbe se trouve, à cause de cette circonstance, répétée autant de fois qu'il y a d'arrangements possibles de $q$ choses entre elles, donc $1.2.3 \ldots q$, fois. Le nombre $N'$ doit alors être divisé par $1.2.3 \ldots q$, afin qu'il exprime sans répétition le nombre des courbes $C_r$ qui satisfont à la question.

Par exemple, si tous les indices sont égaux, $n_1 = n_2 = n_3 = \cdots = n_t$, la formule (*b.*) devient:

$$(d.) \quad N' = \frac{(n+1)^t}{1.2.3 \ldots q}(rm - tn - p)(rm - tn - p - 1) \ldots (rm - tn - p - t + 1).$$

IX. La courbe $U'_m$ peut être une conique *quelconque;* car les points d'une telle courbe se déterminent individuellement. Les formules (*b.*), (*d.*), où l'on fait $m = 2$, conviennent donc, sans modification, à une conique générale dans son degré.

Ces formules conviennent, par le même motif, à une simple ligne droite; ce qui donne lieu au théorème suivant:

Théorème III. *Le nombre des courbes $C_r$ qui ont, avec une droite fixe, $t$ contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_t$, et qui passent par $\frac{r(r+3)}{2} - \Sigma(n)$ points fixes, est égal à $\prod_1^t (n_i+1) . \prod_{i=t-1}^{i=0} [r - \Sigma(n) - i]$.*

Remarque. Une famille de courbes $C_r$ [ou *réseau* d'ordre $\Sigma(n)$], qui passent toutes par $\frac{r(r+3)}{2} - \Sigma(n)$ points fixes, peut toujours être représentée par une équation $F_r(x, y) = 0$, du degré $r$ en $x$ et $y$, dont les coefficients sont liés par $\frac{r(r+3)}{2} - \Sigma(n)$ équations linéaires, et par conséquent restent soumis à une indétermination d'ordre $\Sigma(n)$. Si l'on coupe le réseau par une droite arbitraire, chaque courbe donne naissance à un groupe de $r$ points; l'équation $F_r = 0$ devient du degré $r$ en $x$ seul, et les coefficients sont encore liés entre eux par $\frac{r(r+3)}{2} - \Sigma(n)$ équations linéaires seulement. Quand une courbe du réseau touche la droite par un contact d'ordre $n$, l'équation $F_r(x) = 0$ possède $(n+1)$ racines égales entre elles. Si une courbe

du réseau touche la droite en deux points, par deux contacts d'ordres $n_1$ et $n_2$, l'équation possède deux groupes de racines égales, l'un de $n_1+1$ racines, et l'autre de $n_2+1$; et ainsi de suite.

D'après cela, le théorème III. exprime une condition à laquelle les coefficients d'une équation du degré $m$ doivent satisfaire, pour que cette équation ait $t$ groupes de racines égales, $n_1^{\text{tuples}}$, $n_2^{\text{tuples}}$, ... etc., respectivement.

X. Nous venons de démontrer l'exactitude du premier terme de la formule $(a.)$, désigné par $N'$, dans le cas de $\mu = 1$. Nous allons, dans la même circonstance, justifier celle de tous les autres termes, dont nous avons désigné la somme par $N''$. On a déjà vu (II.) quelle est l'origine de ces termes. Leur somme exprime le nombre des courbes $C_r$ qui, passant par un ou plusieurs des points doubles que $U'_m$ possède en excédant de ceux de la courbe donnée $U_m$, satisfont aux conditions de la question, mais par des contacts singuliers. Il s'agit donc de déterminer la provenance, l'espèce, le nombre et l'ordre de multiplicité de ces courbes. Pour cela, nous commencerons par établir le *lemme* suivant.

XI. Lemme. *Quand une courbe $C_r$ passe par un point double $\delta$ d'une autre courbe $U'_m$, et y touche une des branches de celle-ci par un contact d'ordre $n-1$, cette $C_r$ touche $U'_m$, au point $\delta$, par un contact singulier d'ordre $n$, et en représente $\frac{n(n+1)}{2}$ superposées; c'est-à-dire que cette courbe doit être comptée pour $\frac{n(n+1)}{2}$.*

En premier lieu, il est évident qu'elle a, avec $U'_m$, un contact singulier d'ordre $n$, puisque, indépendamment du contact d'ordre $n-1$ qu'elle a, au point $\delta$, avec l'une des branches de $U'_m$, elle passe par ce point double, ce qui équivaut à un contact du premier ordre.

Pour démontrer l'influence que la seconde partie du lemme attribue à un point double, examinons le cas où les courbes $C_r$ doivent avoir, avec la courbe fixe, un seul contact d'ordre $n$, et supposons que cette courbe soit une conique. D'après ce qui a été dit (IX.), la formule $(a.)$ donne alors

$$N = (n+1)(2r-n).$$

Si la courbe fixe était une droite, on aurait $N' = (n+1)(r-n)$; donc, pour l'ensemble de deux droites, $N'' = 2N' = 2(n+1)(r-n)$. La différence entre les nombres $N$ et $N''$ exprime évidemment l'influence diminutive du point double dans la conique singulière que le système des deux droites représente; c'est-à-dire que $N-N''$ exprime le nombre des courbes $C_r$, osculatrices d'ordre $n$ à cette conique, auquel équivalent les deux $C_r$ qu'on peut mener

par le point d'intersection des deux droites, et par les $n-1$ points infiniment voisins, soit sur l'une, soit sur l'autre droite. Or on a $N-N''=n(n+1)$; donc chacune des deux $C_r$ dont il s'agit équivaut à $\frac{n(n+1)}{2}$ courbes $C_r$, osculatrices d'ordre $n$ à la conique. D'ailleurs le degré de cette dernière courbe est évidemment indifférent à l'influence propre du point double, et par conséquent le même nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ exprime cette influence sur une courbe d'ordre quelconque; ce qu'il fallait montrer *).

Corollaire. Si une courbe $C_r$ passe par deux points doubles d'une courbe $U'_m$ et possède, en ces points respectivement, des contacts singuliers d'ordres $n_1$, $n_2$ avec $U'_m$, la courbe $C_r$ en représente $\frac{n_1 n_2 (n_1+1)(n_2+1)}{4}$ superposées. Plus généralement, une $C_r$ qui passe par $q$ points doubles d'une courbe $U'_m$, et possède, en ces points respectivement, des contacts singuliers d'ordres $n_1$, $n_2$ ... $n_q$ avec $U'_m$, doit être comptée pour

$$\frac{n_1 n_2 n_3 \ldots n_q (n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)\ldots(n_q+1)}{2^q}$$

courbes $C_r$ possédant des contacts de même ordre avec $U'_m$, mais en des points autres que des points doubles.

XII. Cela posé, les contacts singuliers, dont nous cherchons le nombre, ne peuvent provenir que d'une des circonstances ci-après, désignées par $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, ... etc., savoir:

$(\alpha)$ Quand une courbe $C_r$ passe par $t$ points doubles de $U'_m$, et possède, en ces points respectivement, des contacts singuliers d'ordres $n_1$, $n_2$, ... $n_t$, avec l'une des branches de $U'_m$; cette $C_r$ est déterminée et unique;

$(\beta)$ quand une $C_r$ passe par $t-1$ points doubles de $U'_m$, y possède des contacts singuliers d'ordres $n_1$, $n_2$ ... $n_{t-1}$, respectivement, et touche $U'_m$, en un autre point indéterminé, par un contact de l'ordre $t$ non employé à l'un des $t-1$ points doubles;

$(\gamma)$ quand une $C_r$ passe par $t-2$ points doubles de $U'_m$, y possède des contacts singuliers d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-2}$, respectivement, et touche $U'_m$ en deux autres points indéterminés, par deux contacts respectifs d'ordres $n_{t-1}$, $n_t$;

. . . . . etc. . . . . .

$(\delta)$ quand une $C_r$ passe par deux points doubles de $U'_m$, y possède des contacts singuliers d'ordres $n_1$, $n_2$, par exemple, et touche $U'_m$ en $t-2$ autres points

*) On vérifiera aisément qu'en appliquant le même mode de raisonnement au cas de deux contacts d'ordre quelconque, on obtient identiquement le même résultat.

indéterminés, par des contacts d'ordres $n_3$, $n_4$, ... $n_t$, non employés aux points doubles;

($\varepsilon$) enfin, quand une $C_r$ passe par un point double de $U'_m$, y possède un contact singulier d'ordre $n_1$, par exemple, et touche $U'_m$ en $t-1$ autres points indéterminés, par des contacts d'ordres $n_2$, $n_3$, ... $n_t$.

Il faut donc chercher combien de fois chacune des circonstances ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$), ... ($\vartheta$), ($\varepsilon$), se présente, et quel est l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.

XIII. Occupons-nous, en premier lieu, de la circonstance désignée par ($\alpha$). Les $\frac{(m-1)(m-2)}{2} - d = D'$ points doubles que $U'_m$ possède en excédant de ceux de $U_m$ peuvent être combinés, $t$ à $t$, de plusieurs manières distinctes; le nombre de ces combinaisons est

$$\frac{D'(D'-1)(D'-2)\ldots(D'-t+1)}{1.2.3\ldots t}.$$

Dans chacune de ces combinaisons, on peut répartir les $t$ contacts de $1.2.3\ldots t$ manières différentes entre les $t$ points doubles qui la composent. Donc il existe, en totalité,

$$D'(D'-1)(D'-2)\ldots(D'-t+1) = \frac{D}{2}\left(\frac{D-2}{2}\right)\left(\frac{D-4}{2}\right)\cdots\left(\frac{D-2t+2}{2}\right)$$

arrangements différents de cette nature.

Puis, dans un même arrangement, on peut affecter le contact, tantôt à l'une des branches de chaque point double, tantôt à l'autre branche; ce qui donne $2^t$ variétés.

Enfin chacune des courbes $C_r$ ainsi déterminées doit être comptée pour

$$\frac{n_1 n_2 n_3 \ldots n_t}{2^t}(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)\ldots(n_t+1), \quad \text{(Lemme XI)};$$

donc la circonstance ($\alpha$) donne lieu, par équivalence, à

$$\prod_1^t (n_i+1)\cdot\frac{\sum_1^t (n)}{2^t}\cdot\prod_{i=t-1}^{i=0}(D-2i)$$

courbes $C_r$ satisfaisant à la question; c'est le dernier terme de la formule ($a$).

Passons à la circonstance désignée par ($\beta$).

Chaque courbe $C_r$, qui s'y trouve comprise, touche $U'_m$ en un point indéterminé, par un contact d'ordre $n_t$, et passe par $t-1$ points doubles. En chacun de ceux-ci, elle possède, y compris le point double, un point de plus en commun avec la courbe $U'_m$ qu'il n'y a d'unités dans l'ordre du contact singulier affecté à ce point double. Donc, en vertu de (IV.), pour chaque combinaison de $t-1$ points doubles et chaque répartition des contacts entre

les branches respectives de ces points doubles, il existe

$$(n_t+1)[rm-((n_1+1)+(n_2+1)+\cdots+(n_{t-1}+1))-n_t-p]$$

courbes $C_r$, dont chacune a un contact d'ordre $n_t$ en un point indéterminé; c'est-à-dire qu'il y en a, en totalité,

$$(n_t+1)(rm-\sum_1(n)-t-p+1) = (n_t+1)(X-t+1),$$

et chacune de ces courbes doit (XI.) être comptée pour

$$\frac{n_1 n_2 \ldots n_{t-1}}{2^{t-1}} \cdot \prod_{i=t-1}^{i=1}(n_i+1).$$

D'ailleurs les $D'$ points doubles de $U'_m$ fournissent

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(t-1)} D'(D'-1)(D'-2)\ldots(D'-t+2)$$

combinaisons distinctes, quand on les prend $t-1$ à $t-1$. Puis, dans chaque combinaison, les $t-1$ contacts de nom différent peuvent être répartis de $1.2.3\ldots(t-1)$ manières différentes entre les $t-1$ points. Donc cette répartition donne lieu à

$$D'(D'-1)\ldots(D'-t+2) = \frac{D}{2}\left(\frac{D-2}{2}\right)\cdots\left(\frac{D-2t+4}{2}\right).$$

A cause des combinaisons deux à deux des branches des points doubles, il faut multiplier le nombre précédent par $2^{t-1}$. Enfin chacune des courbes ainsi déterminées doit être comptée pour

$$\frac{n_1 n_2 n_3 \ldots n_{t-1}}{2^{t-1}}(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_{t-1}+1);$$

donc la circonstance ($\beta$) donne lieu, par équivalence, à

$$\frac{n_1 n_2 \ldots n_{t-1}}{2^{t-1}} \cdot \prod_{i=t-1}^{i=1}(n_i+1) \cdot \prod_{i=t-2}^{i=0}(D-2i).(X-t+1).(n_t+1)$$

contacts, tels que $n_t$, auxquels on affecte le privilége de toucher la courbe $U'_m$ en un point indéterminé.

Comme il faut assigner successivement ce même rôle aux $t-1$ autres contacts $n_1$, $n_2$, ... $n_{t-1}$, le nombre ci-dessus doit être répété $t$ fois, en faisant varier simplement chaque fois le numérateur du premier facteur fractionnaire, qui serait successivement

$$(n_1 n_2 \ldots n_{t-1}),\quad (n_1.n_2\ldots n_{t-2}.n_t),\quad (n_1.n_2\ldots n_{t-3}.n_{t-1}.n_t),\quad \text{etc.}$$

Donc la somme de tous les termes semblables, qui représente l'influence totale de la circonstance ($\beta$), est égale à

$$\prod_t(n_i+1).(X-t+1).\frac{\sum_{t-1}(n)}{2^{t-1}} \cdot \prod_{i=t-2}^{i=0}(D-2i);$$

c'est l'avant-dernier terme de la formule ($\alpha$).

Occupons nous actuellement de la circonstance $(\gamma)$.

Chacune des courbes $C_r$ qui s'y trouve comprise, passe par $t-2$ points doubles et y possède des contacts singuliers. D'après (IV.), on peut mener $(n_{t-1}+1)(n_t+1)(X-t+2)(X-t+1)$ courbes $C_r$, dont chacune touche $U'_m$ en deux points indéterminés par des contacts d'ordres $n_{t-1}$ et $n_t$, et possède, en $t-2$ points doubles, des contacts singuliers d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_{t-2}$, respectivement.

Les $D'$ points doubles, pris $t-2$ à $t-2$, fournissent $\frac{D'(D'-1)\ldots(D'-t+3)}{1.2.3\ldots(t-2)}$ combinaisons distinctes, dont chacune comporte $1.2.3\ldots(t-2)$ arrangements différents des $t-2$ contacts employés, entre les $t-2$ points doubles de chaque combinaison, et enfin $2^{t-2}$ combinaisons des branches de ces points doubles entre elles. Ainsi, pour chaque association de deux contacts, tels que $n_{t-1}$, $n_t$, auxquels on attribue le privilége de toucher $U_m$ en deux points indéterminés, on a, par équivalence, (chaque courbe devant être comptée

$$\frac{n_1 n_2 \ldots n_{t-2}}{2^{t-2}}(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_{t-2}+1) \text{ fois}),$$

$$\frac{n_1 n_2 \ldots n_{t-2}}{2^{t-2}} \cdot \prod_{i=t-2}^{i=1}(n_i+1) \cdot \prod_{i=t-3}^{i=0}(D-2i).(n_{t-1}+1)(n_t+1)(X-t+2)(X-t+1)$$

courbes $C_r$ satisfaisant à la question. D'ailleurs les $t$ contacts peuvent être associés deux à deux de $\frac{t(t-1)}{2}$ manières différentes, dont chacune fournit un terme analogue au précédent. On a donc enfin

$$\frac{\sum_{t-2}(n_i)}{2^{t-2}} \cdot \prod_{i=t}^{i=1}(n_i+1). \prod_{i=t-3}^{i=0}(D-2i).(X-t+2)(X-t+1)$$

courbes $C_r$ résultant de la circonstance $(\gamma)$; c'est précisément l'antépénultième terme de la formule $(a.)$.

En continuant à raisonner de la même manière, on arrive sans peine à reconnaître l'exactitude de tous les autres termes. La formule $(a.)$ est donc démontrée, du moins dans l'hypothèse de $\mu = 1$. Il faut maintenant examiner le cas où $\mu$ a une valeur différente de l'unité.

XIV. On se rappelle que nous avons appelé $\mu_r$ le nombre des courbes $C_r$ qui, satisfaisant à toutes les conditions proposées, autres que celles de toucher $U_m$ en des points indéterminés, par des contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_t$, passent en outre par $\sum_1(n)$ points fixes, ce qui achève de les déterminer. D'après cette définition, si l'on considère l'équation générale $F_r(x,y)$, du

degré $r$ entre les coordonnées $x, y$; qu'on y substitue successivement à $x$ et $y$ les coordonnées de ces $\sum_1(n)$ points; puis qu'on effectue l'élimination entre les $\sum_1(n)$ équations (linéaires par rapport aux coefficients) auxquelles ces substitutions donnent lieu, et les $\frac{r(r+3)}{2} - \sum_1(n)$ autres équations entre les coefficients de l'équation générale $F_r$, qui expriment les autres conditions données, le degré de l'équation finale résultant de l'élimination, est du degré $\mu$ par rapport à ces coefficients; car ceci n'est qu'une autre manière de présenter la définition de l'indice $\mu$.

Or, en prouvant l'exactitude de la formule (*a.*) dans le cas de $\mu = 1$, nous venons de démontrer que l'équation finale, qui résulte de l'élimination entre les équations (en fonction des coefficients) qui expriment les conditions des contacts $n_1, n_2, \ldots n_l$, avec $U_m$, et les $\frac{r(r+3)}{2} - \sum_1(n)$ équations (linéaires par rapport à ces coefficients) qui résultent de la substitution à $x$ et $y$, dans l'équation générale $F_r(x, y)$, des coordonnées de tous les points fixes qui, dans cette hypothèse de $\mu = 1$, complètent seuls la détermination des courbes, que cette équation finale, disons-nous, est du degré $N$ par rapport aux coefficients; $N$ ayant la valeur donnée par la formule (*a.*) dans laquelle on suppose $\mu = 1$.

Donc l'équation résultante de l'élimination entre l'équation générale $F_r(x, y)$, dont tous les coefficients sont indéterminés, et les $\frac{r(r+3)}{2}$ équations qui les déterminent en exprimant toutes les conditions données, quelles qu'elles soient, sera, *en général,* du degré $\mu N$; c'est-à-dire, qu'il y aura, en général, $\mu N$ systèmes de valeurs des coefficients qui, substitués dans l'équation générale du degré $r$, satisferont à toutes les conditions données, et par conséquent qu'il y aura un pareil nombre de courbes $C_r$ y satisfaisant aussi. C. q. f. d.

XV. En disant que la formule (*a.*) fait connaître *en général* le nombre des courbes $C_r$ qui satisfont à la question, nous faisons allusion aux solutions singulières qui peuvent y être confondues avec les autres. Alors le nombre donné par la formule est trop fort d'une quantité qui varie avec les conditions mêmes du problème, et qui doit, dans chaque cas, être l'objet d'une détermination spéciale, souvent difficile, parfois même impossible à effectuer dans l'état actuel de la science.

Si une telle circonstance se présentait inopinément, nous voulons dire

sans qu'on pût en être averti à l'avance, la formule (*a.*) et celles qui en dérivent perdraient de leur intérêt. Mais il n'en est heureusement pas ainsi, et il est généralement possible, en étudiant avec un peu d'attention les données particulières du problème, de décider *a priori* si la formule (*a.*) échappe ou non à ces cas d'exception qui la mettent en défaut numériquement.

Une discussion approfondie sur ce sujet nous entraînerait plus loin que ne le comportent les bornes du présent mémoire. Mais nous allons étudier avec quelques détails le cas où les conditions que doivent remplir les courbes $C_r$, outre celles des contacts prescrits avec $U_m$, sont de passer par des points fixes. On peut alors ($T$ étant le nombre de ces points) assigner au nombre $T$ une *limite*, au dessus de laquelle les solutions singulières sont impossibles, et où par conséquent la formule (*a.*) ne doit subir aucune réduction. Cette limite a d'ailleurs une plus grande généralité. Par exemple, s'il y a à la fois, parmi les conditions de la question, des droites ou des courbes, que les courbes $C_r$ doivent toucher (même par des contacts d'ordre supérieur) ou couper sous des angles donnés, et des points fixes qu'elles doivent traverser, il suffit encore que le nombre de ces points fixes quel que soit d'ailleurs celui des courbes ou des droites, soit compris dans la *limite favorable* dont nous venons de parler, pour qu'on soit certain *a priori* qu'il n'y a aucune solution singulière parmi celles dont la formule (*a.*) fait connaître le nombre; ce qui étend considérablement, comme on voit, l'usage et les applications utiles de cette formule.

XVI. On démontre d'abord que les seules courbes singulières que la formule (*a.*) puisse comprendre généralement, sont des courbes $C_r$ douées de branches doubles ou multiples, mais non pas des courbes $C_r$ décomposées en courbes simples de degrés inférieurs. En effet, comme les branches simples d'une courbe ainsi décomposée devraient satisfaire ensemble à toutes les conditions données, et que chacune d'elles en particulier ne peut satisfaire qu'à $\frac{1}{2}p(p+3)$ de ces conditions, si $p$ est son degré, il faudrait qu'on eût, $p+q+\cdots$ etc. étant égal à $r$,

$$\tfrac{1}{2}r(r+3) \geqq \tfrac{1}{2}p(p+3)+\tfrac{1}{2}q(q+3)+\cdots\text{etc.},$$

ce qui est impossible.

Au premier abord, il semble que le même motif devrait écarter aussi les courbes à branches multiples. Mais on remarquera qu'une courbe $C_r$ qui possède une branche double ou multiple, satisfait *par ce seul fait* à des conditions de contact, du même ordre de multiplicité que cette branche, non seulement avec les

droites ou les courbes données, mais aussi avec la courbe $U_m$ elle-même, ce qui diminue d'autant le nombre des conditions auxquelles les autres branches qui complètent cette $C_r$ doivent satisfaire. Par exemple, si la branche dont il s'agit est du degré $p$ et si son ordre de multiplicité est $q$, elle a, indépendamment de ses contacts effectifs, des contacts singuliers d'ordre $q-1$ avec toutes les courbes qu'elle rencontre, et il suffit qu'une autre courbe du degré $r-pq$ satisfasse en même temps à ceux des contacts proposés et passe par ceux des points donnés, auxquels la branche $(C_p)^q$ demeure étrangère.

Supposons donc, ainsi que nous l'avons annoncé, que les conditions du problème soient de toucher $U_m$ par $t$ contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_t$ et de passer par des points fixes en nombre $T$. Supposons aussi que la branche $(C_p)^q$ ne passe par aucun de ces points fixes, ou, si les conditions de contact avec $U_m$ sont insuffisantes pour la déterminer, qu'on ne lui affecte, parmi ces $T$ points, que ceux (en nombre $\alpha$) qui sont indispensables pour compléter cette détermination; de telle sorte (qu'on nous passe cette expression) qu'il en reste le plus possible à la charge de l'autre branche, qui est du degré $r-pq$. Ainsi la branche simple $C_p$ touche $U_m$, par $l$ contacts d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_l$, en des points indéterminés $x_1, x_2, \ldots x_l$, et passe par $\alpha$ points, pris parmi les points donnés, et on a

$$n_1+n_2+\cdots+n_l+\alpha = \tfrac{1}{2}p(p+3).$$

Si l'on regarde cette courbe comme superposée $q$ fois à elle-même, c'est-à-dire comme formant une branche de degré $p$, multiple d'ordre $q$, d'une courbe $C_r$, elle satisfait seule, à cause de cet ordre de multiplicité dont on la suppose douée, aux conditions suivantes, savoir:

1°. de toucher $U_m$ aux $l$ points indéterminés $x_1, x_2, \ldots x_l$, par des contacts d'ordres $q(n_1+1)-1$, $q(n_2+1)-1$, $\ldots$ $q(n_l+1)-1$, respectivement;

2°. de toucher $U_m$, par des contacts singuliers d'ordre $q-1$, en chacun des points $y_{l+1}, y_{l+2}, \ldots$ etc., où elle rencontre encore $U_m$.

Ces points $y_i$ peuvent, selon la valeur de $p$, être en nombre supérieur ou inférieur à $t-l$. Nous admettrons la première de ces deux hypothèses, parceque c'est la seule qui doive se présenter dans les applications que nous ferons bientôt (XXI. et XXII.) de la formule $(a.)$; ce qui d'ailleurs n'altère pas les conséquences que nous avons en vue.

Cela étant, il faut que l'autre branche de la courbe singulière totale $C_r$, laquelle est du degré $r-pq$,

1°. passe par les $T-\alpha$ points fixes restants;

2°. complète, en chacun des points $x_i$ et $y_i$, les contacts prescrits $n_1$, $n_2$, ... $n_t$.

Dans le cas où le nombre des points $x_i$ et $y_i$ réunis serait inférieur, d'une quantité $\beta$, au nombre $t$ des contacts $n_i$, la branche $C_{r-pq}$ devrait avoir encore, avec $U_m$, $\beta$ contacts d'ordres prescrits, en des points indéterminés, autres que les points $x_i$ et $y_i$.

D'après ces conditions, pour que l'existence d'une courbe singulière $C_r$, ayant une branche $(C_p)^q$, soit possible, il faut qu'on ait la relation

$$\frac{(r-pq)(r-pq+3)}{2} = T-\alpha+\sum_{i=l}^{i=1}(n_i-qn_i'-q+1)+\sum_{i=t}^{i=l+1}(n_i-q+1),$$

d'où l'on tire

$$T = \frac{(r-pq)(r-pq+3)}{2}-\sum_{i=t}^{i=1}(n_i)+q.\sum_{i=l}^{i=1}(n_i')+t(q-1)+\alpha,$$

et par conséquent la limite cherchée est

$$(m.)\qquad T > \frac{(r-pq)(r-pq+3)}{2}-\sum_{i=t}^{i=1}(n_i)+q.\sum_{i=l}^{i=1}(n_i')+t(q-1)+\alpha,$$

relativement aux solutions singulières de l'espèce $[C_{r-pq}+(C_p)^q]$.

XVII. Examinons en particulier les solutions singulières de l'espèce $(C_{r-2}+C_1^2)$, c'est-à-dire celles où une courbe $C_r$ se décompose en une courbe du degré $r-2$ et en une *droite double* ou conique infiniment aplatie. Dans ce cas, la limite assignée par la formule (*m.*) devient, à cause de $p=1$ et $q=2$,

$$(n.)\qquad T>\frac{r(r-1)}{2}-\sum_{i=t}^{i=1}(n_i)+2.\sum_{i=l}^{i=1}(n_i')+t+\alpha-1.$$

Quatre cas peuvent se présenter; car une droite peut occuper quatre positions différentes par rapport à $U_m$, savoir:

1°. être une tangente d'inflexion de $U_m$;

2°. toucher $U_m$ en deux points;

3°. toucher $U_m$ en un seul point, et passer par un des points donnés, ce qui achève de la déterminer;

4°. être simplement sécante de $U_m$ et passer par deux des points donnés.

La première circonstance suppose que l'un au moins des contacts $n_i$ soit $>4$; car une tangente d'inflexion, prise deux fois, a un contact du cinquième ordre avec $U_m$;

la seconde suppose que tous les indices $n_i$ sont $<5$ et que deux d'entre eux au moins sont $>2$;

la troisième implique que l'un des indices $n_i$ est $>2$, $<5$;
enfin la quatrième suppose que tous les indices $n_i$ sont $<3$.

Dans les deux premiers cas, on a $\alpha=0$ et $\Sigma(n_i')=2$; la limite est donc

$$T>\frac{r(r-1)}{2}-\sum_{i=t}^{i=1}(n_i)+t+3.$$

Dans le troisième cas, on a $\alpha=1$ et $\Sigma(n_i')=1$; la limite est

$$T>\frac{r(r-1)}{2}-\sum_{i=t}^{i=1}(n_i)+t+2.$$

Enfin, dans le dernier cas, on a $\alpha=2$, $\Sigma(n_i)=0$; et par conséquent

$$T>\frac{r(r-1)}{2}-\sum_{i=t}^{i=1}(n_i)+t+1.$$

Ce sont ces trois limites que nous avons fait connaître dans une *communication* insérée aux *Comptes-Rendus* de l'Académie des sciences (Septembre 1866). Les solutions singulières de l'espèce $(C_{r-2}+C_1^2)$ seront donc écartées toutes les fois que le nombre $T$ satisfera, selon le cas, à l'une des relations qui précèdent, les autres conditions étant d'ailleurs celles qui sont indiquées plus haut.

XVIII. La formule $(a.)$ suppose essentiellement que tous les indices $n_1, n_2, \ldots n_t$, sont inégaux. Les remarques déjà faites à ce sujet (VIII.) trouvent encore ici leur application. Si $q$ de ces indices sont égaux entre eux, il faut diviser le nombre qu'elle exprime par le produit $1.2.3 \ldots q$.

XIX. Pour mieux fixer les idées, nous avons d'abord supposé que la courbe donnée $U_m$ n'a que des points doubles. Si elle possède à la fois des points multiples d'un ordre plus élevé et des points doubles (qui pourtant ne soient pas des points de rebroussement), on commence par évaluer le nombre total $d$ des points doubles, auquel les points doubles et multiples de $U_m$ réunis sont équivalents, en se rappelant qu'un point multiple d'ordre $s$ équivaut à $\frac{1}{2}s(s-1)$ points doubles; c'est le nombre $d$ ainsi obtenu, qu'il y a lieu de substituer dans l'expression de $D$, pour qu'on puisse, dans cette circonstance, faire usage de la formule $(a.)$.

XX. Avant d'aller plus loïn, montrons par quelques exemples que les résultats de cette formule s'accordent avec ceux que d'autres géomètres ont obtenus, par des méthodes très-différentes, dans le cas particulier de $r=2$ *).

*) *Zeuthen,* Nyt Bidrag til laeren om systemer af Keglesnit. Kjöbenhavn 1865. *A. Cayley,* nombre des coniques déterminées par cinq conditions de contact. — Comptes-Rendus de l'Académie des sciences, t. LXIII. p. 9. (Juillet 1866.)

C'est d'abord ce qu'on vérifie immédiatement, à l'égard des formules données par M. *Zeuthen* dans tous les cas où le nombre $T$ des points fixes, par où les coniques doivent passer, satisfait aux conditions de limite exprimées dans le §. XV.

Supposons, qu'on demande $N.[(U_m)^2, U_\theta, 1p]$, c'est-à-dire le nombre des coniques qui passent par un point fixe, touchent en un point désigné $\theta$ une courbe du degré $m$, douée de $d$ points doubles, et touchent cette même courbe, en un point indéterminé, par un contact du second ordre.

On a $r=2$, $t=1$, $n_1=2$, $T=3$ et $p=2$ infiniment voisins sur $U_m$, d'où $\mu=1$. La formule (*a.*) donne donc, pour le nombre cherché,

$$N=3(m^2-m-2d-2)=3(m'-2) \qquad (\textit{Zeuth.}\ \text{p. 64}).$$

Si les données sont $r=2$, $t=1$, $n_1=1$, $T=4$ et $p=3$ infiniment voisins sur $U_m$ au point $\theta$, d'où $\mu=1$, la formule (*a.*) donne

$$N[(U_\theta)^2, (U_{m_1}), 1p)] = 2m+m'-6 \qquad (\textit{Zeuth.}\ \text{p. 69}).$$

Si l'on a $r=2$, $t=2$, $n_1=n_2=2$, $T=1$, $p=0$, d'où $\mu=1$; on trouve, en ayant égard à la remarque du §. VIII.,

$$N[2(U_{m_1})^2, 1p] = \tfrac{9}{2}m'^2-9m'-9t' \qquad (\textit{Zeuth.}\ \text{p. 77}),$$

en posant $t'=3m(m-2)-6d$.

Soit encore $r=2$, $n=2$, $T=2$ et les coniques doivent toucher une droite donnée, d'où $\mu=2$; la formule (*a.*) donne

$$N(U_m^2, 2p, 1d) = 6m' \qquad (\textit{Zeuth.}\ \text{p. 56}).$$

etc. etc.

XXI. Quand le nombre $T$ n'est pas compris dans les limites favorables, la formule (*a.*) englobe à la fois les courbes pures qui satisfont à la question, et les solutions singulières produites par les courbes à branches multiples qui y satisfont aussi. Dans le cas de $r=2$, qui nous occupe en ce moment, ces solutions singulières, dont le nombre est à défalquer, sont des coniques infiniment aplaties ou *droites doubles*. Il est souvent facile de les discerner. Citons quelques exemples.

Soit $r=2$, $t=2$, $n_1=n_2=1$, $T=3$ et $p=2$, infiniment voisins en $\theta$ sur $U_m$, d'où $\mu=1$.

La formule (*a.*) donne, pour le double du nombre total des solutions,

$$2N[U_\theta, 2(U_m), 1p] = m^4+2m^3-17m^2-2m+4d^2-4m^2d-4md+36d+40.$$

Les solutions singulières proviennent de la droite, regardée comme double, qui joint le point donné au point $\theta$; elles sont donc au nombre de $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, et chacune doit être comptée pour deux. Le nombre à soustraire est donc $2(m^2-3m+2)$, et il vient

$$2N = m^4+2m^3-19m^2+4m-4m^2d-4md+4d^2+36d+36;$$

ce qui s'accorde avec la formule ($10^{\alpha}$.) de M. *Zeuthen*, p. 49, en y faisant, conformément aux formules de M. *Plücker*,

$$n = m(m-1)-2d \quad \text{et} \quad 2t = (n-m)(n+m-9)+2d.$$

Le cas de $N(U_m^3, U_m, 1p)$ donne lieu à une verification semblable.

Pour $r=2$, $t=3$, $n_1=n_2=n_3=1$, $T=2$, $p=0$, $d=0$, $\mu=1$, la formule ($a$.) donne, en ayant égard à (VIII.),

$$N[(3U_m, 2p] = \tfrac{1}{6}m(m-2)(m^4+5m^3-17m^2-45m+104).$$

Il faut retrancher de ce nombre celui des solutions singulières produites par la droite qui joint les deux points donnés, regardée comme double ou comme étant une conique infiniment aplatie. Il y en a donc $\frac{m(m-1)(m-2)}{3}$, dont chacune doit être comptée pour 4; ainsi il faut retrancher $\frac{4}{3}m(m-1)(m-2)$, et il vient

$$N.[3U_m, 2p] = \tfrac{1}{6}m(m-2)(m^4+5m^3-17m^2-49m+108) \quad (\textit{Zeuth.}\ \text{p. 37}).$$

On vérifierait de même la formule relative à $N(U_m^2, 2U_m, 1p)$.

Soit encore $r=2$, $t=2$, $n_1=3$, $n_2=2$, $T=0$, et, pour simplifier, $d=0$.

La formule ($a$.) donne

$$N = 18m^4-48m^3-114m^2+288m.$$

Les solutions singulières sont dues aux tangentes doubles de $U_m$ dont chacune serait regardée comme une conique infiniment aplatie et comptée six fois. Le nombre à soustraire est donc ici

$$\Delta = 3m(m-2)(m^2-9) = 3m^4-6m^3-27m^2+54m.$$

Et il vient

$$N[(U_m)^3, (U_m)^2] = 15m^4-42m^3-87m^2+234m;$$

résultat conforme à celui que M. *A. Cayley* a énoncé dans les *Comptes-Rendus, loco citato.*

Nous ne multiplierons pas ces exemples, qui se réduisent à de simples vérifications numériques, et nous nous bornerons à ajouter qu'on trouve ainsi directement, par la formule ($a$.), un grand nombre de celles contenues dans

le mémoire de M. *Zeuthen*. On peut ensuite en déduire d'autres par la transformation polaire, les coniques ne changeant pas par cette transformation.

Quelques-unes, en petit nombre, ne semblent pas pouvoir se conclure aussi facilement, ou du moins aussi directement, des considérations qui précèdent. Par exemple, si l'on cherche, $N(4(U_m), 1p)$ ou $N((U_m)^3, 2(U_m))$, toute droite double menée par le point donné dans le premier cas, et toute tangente de $U_m$, regardée comme droite double, dans le second cas, satisfait à la question, à titre de solution singulière. Cette infinité de solutions, qui entraîne indétermination, dénote simplement qu'il est alors nécessaire d'employer un autre procédé pour découvrir le nombre des solutions singulières. C'est ainsi que M. *Zeuthen*, profitant d'une circonstance particulière aux sections coniques, est habilement parvenu à des résultats très-complets concernant ces courbes. Les exemples que nous venons de citer montrent comment ces résultats se rattachent à la formule générale (*a.*).

## Deuxième mode de solution. — Réflexions générales.

XXII. C'est en faisant usage d'une courbe $U_m$, douée de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, que nous sommes parvenu à résoudre la question générale que nous nous étions proposée, et il est clair, par des motifs identiques, qu'on y pourrait employer avec le même succès d'autres courbes $U_m$, douées de points multiples, pourvu que leurs points se puissent déterminer individuellement; car c'est la seule condition indispensable qu'elles doivent remplir. De ce nombre sont, par exemple, les courbes douées d'un point multiple d'ordre $m-1$, dont nous faisions déjà usage en 1861 pour démontrer diverses propriétés des courbes les plus générales *). Mais il est clair, par le même motif, qu'il n'est pas moins légitimement permis d'employer, dans les recherches de cette nature, les courbes du degré $m$ qui, au lieu de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, en possèdent $\frac{m(m-1)}{2}$, c'est-à-dire de simples systèmes de $m$ droites; car les points de chacune des branches d'une telle courbe, peuvent aussi se déterminer individuellement.

*) Voir dans le Journal de *Liouville*, 2e série, t. VI, 1861, notre mémoire sur les courbes géométriques, §. XVI.

Nous reviendrons tout à l'heure, et avec quelques détails, sur ce principe qui peut surprendre au premier abord; car nous aurons d'autres conséquences à en tirer. Mais avant d'aborder ce sujet d'une manière plus générale, montrons que l'emploi d'un système de $m$ droites eût pu nous conduire à la solution du problème qui fait l'objet de ce mémoire, aussi bien que l'a fait une courbe proprement dite, douée de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles.

XXIII. On conçoit d'abord qu'en raisonnant sur les $m$ droites, abstraction faite de leurs points d'intersection (qui sont les *points doubles* de cette quasi-courbe du degré $m$), on obtiendra une formule analogue à la formule (*b.*) du §. IV. Ensuite, calculant l'influence diminutive des $\frac{m(m-1)}{2}$ points doubles, comme il est dit dans les §. XI. et suivants, on trouvera un nombre qui, ajouté au précédent, sera précisément le nombre cherché. La formule qui exprime celui-ci sera donc, quant à sa composition et à sa forme, semblable à la formule (*a.*). Mais il y a plus; les deux résultats sont identiques. Sans entrer à cet égard dans de longs détails, nous nous bornerons à prouver l'accord des résultats dans deux cas individuels de la question, savoir, celui d'un contact d'ordre $n$ avec une courbe fixe $U_m$, et celui de deux contacts d'ordres $n_1$ et $n_2$.

Il suffit d'effectuer cette vérification dans l'hypothèse de $\mu = 1$.

1^er^ cas. On démontre d'abord, comme nous l'avons fait (VI.), que le nombre des courbes $C_r$ qui satisfont à la question, quand la courbe $U_m$ est une simple droite, est égal à $(n+1)(r-n-p)$, ce qui en donne $(n+1).m(r-n-p)$, pour les $m$ droites. Reste à calculer le nombre et l'ordre de multiplicité de celles qui ont un contact singulier d'ordre $n$ en l'un des points doubles. Il n'y en a évidemment que deux pour chaque point double, passant chacune par ce point double et par les $n-1$ points infiniment voisins sur chaque branche (c. à. d. sur chacune des deux droites qui s'y croisent); ces courbes doivent d'ailleurs être comptées pour $\frac{1}{2}n(n+1)$. Donc les $\frac{1}{2}m(m-1)$ points doubles donnent lieu à $\frac{n(n+1)}{2}\cdot m(m-1)$ courbes $C_r$, satisfaisant à la question par un contact singulier. Ajoutant ce nombre au précédent, on trouve enfin, pour le cas d'une courbe $U_m$ générale dans son degré,

$$N = (n+1).m(r-n-p) + \frac{n+1}{2}\cdot nm(m-1) = \frac{n+1}{2}\cdot(2r+mn-3n-2p);$$

ce qui s'accorde avec la formule (*a.*).

2e cas. $t=2$, les contacts donnés sont d'ordres $n_1$, $n_2$. La formule ($a$.), développée, si l'on y suppose $p=0$, pour plus de simplicité, donne

$$(k.)\quad N=\frac{(n_1+1)(n_2+1)}{4}\cdot m\begin{cases} m^3.n_1n_2+m^2(2rn_1+2rn_2-6n_1n_2)\\ +m(4r^2-6rn_1-6rn_2-2n_1^2-2n_2^2-2n_1-2n_2+7n_1n_2)\\ -4r(n_1+n_2+1)+6(n_1^2+n_2^2)+6(n_1+n_2)+6n_1n_2. \end{cases}$$

Cherchons le même nombre par l'autre procédé.

On a d'abord des courbes $C_r$ ayant, avec chacune des $m$ droites, deux contacts d'ordres $n_1$ et $n_2$; puis des courbes $C_r$, ayant un contact d'ordre $n_1$ avec une droite et un contact d'ordre $n_2$ avec une autre droite. Le nombre total de ces courbes est, comme il est aisé de le voir par ce qui précède, égal à

$$m(n_1+1)(n_2+1)(r-n_1-n_2)(r-n_1-n_2-1)$$
$$+m(m-1)(n_1+1)(n_2+1)(r-n_1)(r-n_2).$$

Il faut actuellement chercher combien il y en a, par équivalence, qui satisfont aux conditions données, en touchant les droites par des contacts singuliers, en leurs points mutuels d'intersection.

Celles qui ont un contact singulier en un point double avec une droite, et qui touchent, par le deuxième contact proposé, en un point indéterminé, une autre droite ne passant pas par ce point double, sont, par équivalence, au nombre de

$$\frac{n_1(n_1+1)}{2}(n_2+1).m(m-1)(m-2)(r-n_2)$$
$$+\frac{n_2(n_2+1)}{2}(n_1+1).m(m-1)(m-2)(r-n_1).$$

Celles qui passent par deux points doubles, en y touchant deux droites par des contacts singuliers d'ordres $n_1$, $n_2$, respectivement, sont équivalentes à

$$\frac{n_1n_2}{4}(n_1+1)(n_2+1).m(m-1)(m^2-m-2).$$

Celles qui ont, avec une droite, un contact singulier en un point double et qui ont, avec cette même droite, l'autre contact donné, mais en un point indéterminé, sont, par équivalence, au nombre de

$$\frac{n_1(n_1+1)}{2}(n_2+1).m(m-1)(r-n_2-n_1)$$
$$+\frac{n_2(n_2+1)}{2}(n_1+1)m.(m-1)(r-n_1-n_2).$$

Enfin celles qui ont, avec une droite, un contact singulier en un point double, et qui touchent par l'autre contact, mais en un point indéterminé, la deuxième droite passant par ce point double, sont équivalentes à

$$\frac{n_1(n_1+1)}{2}(n_2+1).m(m-1)(r-n_2-1)$$

$$+\frac{n_2(n_2+1)}{2}(n_1+1).m(m-1)(r-n_1-1).$$

Ajoutant ensemble tous les nombres qu'on vient de trouver, on reproduit identiquement la formule (*k.*); ce qu'il s'agissait de constater.

La même vérification peut se faire pour trois, pour quatre ou pour un nombre quelconque de contacts. Après ce que nous venons de dire, ce n'est qu'une question de patience et de calcul numérique, sur laquelle il nous semble inutile d'insister.

XXIV. Ces exemples et beaucoup d'autres qu'on pourrait citer confirment, au point de vue pratique et numérique, la vérité du principe dont nous avons fait usage en disant qu'on peut légitimement conclure les propriétés d'une courbe générale du degré $m$, de celles d'une autre courbe particulière du même degré, *pourvu qu'on tienne un compte exact de l'influence exercée par les particularités de celle-ci sur la solution de la question proposée.*

Au fond, ce principe découle directement de la *loi de continuité*, à laquelle sont soumises les fonctions algébriques, et il revient à dire que, dans toute question concernant ces fonctions, le *nombre* des solutions reste invariable, quelles que soient les conditions particulières qu'on y introduise, pourvu qu'on ait égard aux solutions nulles, infinies, imaginaires, et à l'ordre de multiplicité de chacune d'elles; car ceci n'est, en dernière analyse, qu'une autre manière d'exprimer le théorème fondamental de la théorie des équations, savoir, qu'une équation algébrique entière et rationnelle du degré $n$, possède toujours $n$ racines réelles, ou imaginaires de la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Il peut sans doute se présenter des difficultés dans l'appréciation du nombre des solutions dissimulées ou confondues en une seule, mais jamais disparues, dont il y a lieu de tenir compte quand on veut remonter au cas général de la question; il peut même arriver des cas d'indétermination plus embarassants encore *); mais ces difficultés exceptionnelles, qui prouvent sim-

*) Cela arrive, quand le cas particulier qui a été choisi rend infini le nombre des solutions cherché. Il faut alors, à défaut du cas général, choisir un autre cas particulier qui ne donne pas lieu à une telle indétermination.

plement la nécessité d'une grande attention et d'une réserve prudente dans l'emploi du principe dont il s'agit, n'en infirment en aucune façon la vérité.

XXV. Quand on fait usage d'une courbe proprement dite du degré $m$, douée de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, la seule difficulté consiste à tenir compte de l'influence d'un de ces points doubles. Car si cette influence est connue pour un seul point double, on en conclut aisément celle qui doit être attribuée à deux ou à un plus grand nombre d'entre eux. Or cette détermination est facile. Car les coniques étant des courbes dont les points se déterminent individuellement, on sait, en général, résoudre directement, à l'égard de ces courbes, la question qu'on a en vue; et comme on sait aussi, par le même motif, la résoudre relativement à une simple droite, on peut, en considérant le système de deux droites comme représentant une conique à point double, et comparant les deux résultats obtenus ainsi, l'un directement et l'autre indirectement, on peut, disons-nous, en conclure sans incertitude l'influence du point double, et particulièrement l'ordre de multiplicité de chacune des solutions auxquelles il participe; ce qui est, en général, le nœud principal de la difficulté (XI.).

XXVI. Quand on fait usage, pour découvrir ou démontrer un théorème, non plus d'une courbe $U_m$ proprement dite, douée de points doubles, mais d'un système de $m$ droites, outre la difficulté relative aux points doubles, qui est la même que précédemment et se résout aussi de même, il s'en présente, dans certains cas, une autre provenant de ce que chaque droite peut être regardée à la fois comme étant une branche de la courbe, et comme étant une tangente d'ordre quelconque menée à la courbe par un point pris arbitrairement sur cette droite. Alors il ne semble pas aisé de déterminer l'ordre de multiplicité qu'il convient d'attribuer à chacune de ces tangentes, confondues avec la courbe selon une seule et même ligne droite *). Mais nous devons ajouter que cette dernière ambiguité se présente rarement dans

*) Certaines considérations, en partie théoriques et en partie numériques, semblent indiquer que chacune des droites du système doit être comptée comme représentant autant de tangentes simples, doubles, . . . multiples, du premier, du second, . . . du $n^{ième}$ ordre, qu'il est marqué dans le tableau ci-après; ces tangentes étant confondues en une seule, et comme couchées sur la droite elle-même qui est une des branches de la courbe. Nous ne donnons toutefois ces nombres que *sous toutes réserves*, attendu que nous n'attribuons pas aux raisons, d'où nous les avons déduits, la valeur d'une démonstration.

Quand une courbe $U_m$ dégénère en $m$ droites, chacune de ces droites devrait, quand la question le comporte, être considérée comme représentant:

les applications, et semble être bornée, sauf peut être un petit nombre de questions, au cas où $r=2$, c'est-à-dire au cas où les courbes, mises en relation avec la courbe fixe $U_m$, sont des coniques.

---

$2(m-1)$ tangentes simples de $U_m$

ou $\frac{1}{2}\cdot 2^2(m-2)(m-3)$ tangentes doubles de $U_m$

ou $\frac{1}{2.3}\cdot 2^3(m-2)(m-3)(m-4)$ tangentes triples de $U_m$

. . . . . .

ou $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot 2^n(m-2)(m-3)\ldots(m-n-1)$ tangentes $n^{\text{tuples}}$

ou $3(m-2)$ tangentes d'inflexion,

ou $4(m-2)$ tangentes de double inflexion (quadri-ponctuelle)

. . . . . .

ou $n(m-2)$ tangentes $n$-ponctuelles

} superposées.

En les comptant pour telles, on trouve immédiatement, pour le nombre $t'$ des tangentes d'inflexion d'une courbe générale $U_m$, la formule connue

$$t' = 3m(m-2).$$

S'il s'agit des tangentes doubles d'une courbe $U_m$, le tableau ci-dessus indique que les $m$ droites représentent d'abord $2m(m-2)(m-3)$ tangentes doubles. En outre, chacune des droites qui joint un point double à un autre point double étranger aux deux droites qui passent par celui-là, représente quatre tangentes doubles superposées. Or il y en a $\frac{1}{2}\left[\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{(m-2)(m-3)}{2}\right] = \frac{1}{8}m(m-2)(m^2-4m+3)$; donc ces droites sont équivalentes à $\frac{1}{8}m(m-2)(m^2-4m+3)$; et si l'on ajoute ce nombre au précédent, on retrouve la formule connue

$$t = \tfrac{1}{8}m(m-2)(m^2-9).$$

Supposons qu'on cherche, toujours par le même procédé, le nombre des coniques qui, passant par deux points fixes, touchent une courbe $U_m$ en trois points distincts.

On trouve d'abord, par un calcul facile, pour le nombre $N'$ des coniques proprement dites, la formule

$$N' = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m^3+6m^2-19m-12).$$

Mais il faut encore ajouter à ce nombre celui des coniques à point double, dont chacune se compose de la droite qui joint les deux points donnés conjointement avec l'une des $m$ droites dont est formée la courbe particulière $U_m$ qui sert à l'investigation.

Or, d'après le tableau ci-dessus, chacun de ces coniques doit être comptée pour $\frac{1}{8}(m-2)(m-3)(m-4)$. Donc, puisqu'il y en a $m$ pareilles, le nombre à ajouter est $\frac{1}{8}m(m-2)(m-3)(m-4)$, et il vient

$$N = \tfrac{1}{8}m(m-2)(m^4+5m^3-17m^2-49m+108),$$

ce qui s'accorde avec le résultat donné par M. *Zeuthen*, p. 37, et avec celui que j'ai moi-même trouvé plus haut (XXI).

Supposons encore qu'on demande le nombre des coniques qui, passant par deux points fixes, touchent une courbe $U_m$ par un contact du troisième ordre, et qu'on emploie, pour cette recherche, un système de $m$ droites. On a d'abord:

XXVII. S'il était nécessaire d'invoquer des autorités à l'appui des considérations précédentes, nous citerions le *Traité des propriétés projectives*, dans lequel M. *Poncelet* se sert souvent, pour découvrir les propriétés de coniques quelconques, de celles du cercle, c'est-à-dire de la plus simple de toutes les courbes du second degré. Nous pourrions citer aussi l'exemple

---

1°. $4\frac{m(m-1)}{2} = 2m(m-1)$ coniques à point double, dont chacune est formée par les deux droites qui joignent les deux points donnés à chacun des points d'intersection des $m$ droites deux à deux, et doit être comptée pour 4;

2°. $4m(m-2)$ coniques à point double, dont chacune est formée par la droite qui joint les deux points donnés conjointement avec l'une des $m$ droites, comptée pour $4(m-2)$ d'après le tableau ci-dessus. On a donc, en totalité $N = 2m(3m-5)$; ce qui s'accorde avec le résultat donné par M. *Zeuthen*, p. 81, et avec mes formules. On trouverait pareillement, en employant les mêmes moyens de détermination, $N[(U_m)^3, 1p.1d] = 2m(5m-9)$; ce qui est exact. Ce nombre résulte des $2m(m-1)$ coniques infiniment aplaties, qui joignent le point donné à chacun des points d'intersection du système, et des $4(m-2)$ coniques à point double, dont chacune se compose de l'une des $m$ droites du système conjointement avec la droite qui joint le point fixe au point d'intersection de la droite donnée par cette droite du système, et doit être comptée pour deux à cause du point double qu'elle possède sur la droite donnée.

Etc. Etc.

Au surplus, la difficulté résultant du rôle qu'il faut attribuer à chacune des $m$ droites du système, ne se présente guère que dans les questions relatives aux contacts multiples ou d'ordre supérieur avec une courbe donnée $U_m$. Dans les autres questions, ce motif d'indécision n'existe pas.

C'est ainsi que, dès 1859, nous avions trouvé les formules générales relatives aux contacts des sections coniques avec une, deux, ... cinq courbes données d'ordre quelconque, et si nous fumes le premier à ne pas accorder à ces résultats, qui étaient exacts, la confiance qu'ils méritaient *de facto*, c'est surtout parce qu'ils se trouvaient en désaccord avec un résultat (sans doute conjectural) de M. *Steiner*, dont l'autorité était pour nous l'objet d'un légitime respect.

En ce qui concerne les contacts multiples des coniques avec une même courbe $U_m$, nous avons donné plus tard, dans les *Nouvelles Annales* pour 1864, trois formules *conjecturales*, dont nous venons de rappeler la plus simple (celle relative aux contacts triples), en la complétant; mais nous ne soupçonnions pas alors le rôle multiple que jouent, dans ces sortes de questions, les droites mêmes du système. On voit, d'après ce que nous venons de dire à ce sujet, que les deux autres formules, qui se rapportent aux contacts quadruples et quintuples, auraient besoin d'une correction analogue, [sans préjudice de la faute d'addition qui, pour la dernière et à cause de l'omission du nombre $+50$, a vicié le terme constant qui devait être $+15$ au lieu de $-35$; nous saisissons l'occasion qui se présente ici de remercier M. *Théodore Berner* de nous avoir mis en mesure, par une observation qu'il a fait insérer dans les *Nouvelles Annales* pour 1865, de remarquer cette inadvertance numérique et de la rectifier].

Au surplus, après le beau et complet travail de M. *Zeuthen* sur la théorie des coniques, les trois formules dont il s'agit sont aujourd'hui sans intérêt, et nous nous serions abstenu d'en parler, si nous n'y avions été conduit en nous occupant du procédé particulier (employé par nous depuis longtemps dans quelques circonstances) qui nous les avait fait obtenir.

de MM. *Chasles, Cayley, Cremona, Zeuthen,* qui les ont à l'occasion mises en oeuvre de diverses manières.

Au surplus, ce n'est que dans les questions concernant les *propriétés projectives* des courbes (ou des surfaces) qu'on a occasion de faire usage du principe qui nous occupe. Cela se conçoit: Dans les questions de cette nature, qui se rattachent presque exclusivement au *nombre* des choses, la *courbure* est un élément qui, en vertu de la *loi de continuité,* ne doit, en général, y jouer aucun rôle essentiel, tandis qu'elle exerce, au contraire, toute son influence dans les questions relatives à la *mesure.* Aussi, dans ces dernières, qui exigent presque toujours l'intervention des méthodes infinitésimales, la connaissance des résultats concernant des cas particuliers d'une question, n'est-elle presque jamais d'aucune ressource pour arriver à ceux qui se rapportent au cas général.

XXVIII. C'est aussi dans cet ordre de considérations, qu'il faut, ce nous semble, chercher la raison intime d'un fait important, qui se manifeste dans la théorie des courbes et dans celle des surfaces, et dont la répétition constante découle vraisemblablement d'une loi générale qui mérite d'être recherchée. Qu'on nous permette, à ce sujet, une courte digression.

On sait qu'un grand nombre de questions, concernant les familles de coniques assujéties à quatre conditions communes, sont aisément résolues, dès qu'on connaît deux quantités $\mu$, $\nu$, dont l'une $\mu$ exprime le nombre des coniques du *système* qui passent par un point quelconque, et dont l'autre $\nu$ exprime le nombre des coniques qui touchent une droite quelconque *). Ces deux quantités, dont l'une $\mu$ avait été antérieurement introduite par nous dans la science sous le nom de *indice de la série* des courbes ou des surfaces **), ont été nommées par M. *Chasles,* les *caractéristiques du système.* Le grand nombre de questions que la simple connaissance de ces caractéristiques permet de résoudre presque immédiatement ***), a donné lieu de conjecturer que les propriétés intrinsèques, non pas métriques mais projectives, d'un système de courbes ou de surfaces, et que les relations d'un tel système avec une courbe ou une surface fixes, *dépendent toujours* de ces

*) Dans la théorie des systèmes de surfaces, il y a une troisième quantité $\varrho$, qui exprime le nombre des surfaces du système tangentes à un plan quelconque.

**) Voir le Journal de *Liouville,* avril 1861.

***) Non seulement pour les coniques, mais aussi pour les courbes et les surfaces d'ordre quelconque.

seules quantités $\mu$, $\nu$, et même peuvent être exprimées par des fonctions linéaires des caractéristiques *).

Les considérations qui précèdent nous paraissent donner la clef de ce fait expérimental, particulièrement quand il s'agit d'une famille de courbes dont on cherche les relations avec des courbes fixes. Car on peut, pour en découvrir l'expression générale, prendre, au lieu de celles-ci, le cas particulier où elles dégénèrent en $m$ droites; et comme les courbes variables ne se trouvent plus alors en présence que de points et de lignes droites, toute la question se réduit à savoir comment le système de ces courbes variables se comporte à l'égard d'un point et à l'égard d'une droite, ce qui implique (du moins pour les systèmes du premier ordre d'indétermination) la seule connaissance des caractéristiques $\mu$ et $\nu$, ou $\mu$, $\nu$ et $\varrho$ s'il s'agit de surfaces. De telle sorte qu'en résumé, la difficulté des questions proposées, quand elles touchent aux propriétés projectives des figures, se réduit presque exclusivement à celle qui concerne *le point*, *la ligne* et *le plan*, abstraction faite de la courbure.

Quand il s'agit des propriétés projectives intrinsèques de la famille de courbes donnée, c'est-à-dire des propriétés indépendantes de toute circonstance étrangère au système, ou des propriétés du système relatives à un autre système donné, il est moins facile, à cause de la trop grande généralité d'un tel énoncé, de montrer *a priori* que la question dépend toujours de la connaissance des caractéristiques. On conçoit pourtant que, comme ces propriétés sont le plus ordinairement relatives à des questions de *lieux*, on soit amené à examiner ce qui se passe relativement à une droite ou à un point quelconque de la figure, c'est-à-dire, en dernière analyse, combien il y a de courbes du système qui passent par un point et combien il y en a qui touchent une droite.

Pour citer au moins un exemple qui éclaircisse notre pensée, supposons qu'on demande quel *est le lieu des pieds des normales abaissées, d'un point fixe P, sur les courbes d'un système du premier ordre* **) $(\mu, \nu)$ *de courbes*

*) Voir la note B. ci-après à l'*Appendice*, page 320.

**) Nous appelons *système d'ordre n*, une famille de courbes d'un degré quelconque, soumises à $\frac{r(r+3)}{2} - n$ conditions communes. Par conséquent les *séries* ou *systèmes*, tels qu'on les a considérés jusqu'ici, sont des systèmes du premier ordre, parce que l'indétermination qui y subsiste, disparaît dès qu'on se donne une seule condition de plus.

*d'un degré quelconque.* On voit d'abord aisément que ce problème est un cas particulier du suivant:

*Etant donnés: un segment ef sur une droite L, et un système* $(\mu, \nu)$, *du premier ordre, de courbes de degré quelconque, quel est le lieu d'un point tel, que la tangente en ce point à l'une des courbes du système qui y passent, et la droite qui le joint à un point fixe P, divise harmoniquement le segment ef.*

Car, pour passer de ce problème au précédent, il suffit d'y supposer que la droite $L$ est à l'infini, et que le segment $ef$ est le segment imaginaire qu'un cercle quelconque y intercepte.

La question sera résolue, si l'on détermine le nombre de points que le lieu cherché possède sur la droite $L$ elle-même. Or il y en a évidemment $\mu$ confondus en un seul au point $e$, et pareil nombre au point $f$; donc $2\mu$. En outre, il y a $\nu$ courbes qui touchent $L$, et chaque point de contact fait une seule fois partie du lieu, qui est par conséquent du degré $2\mu+\nu$; car aucun autre point $L$ ne satisfait à la question.

XXIX. Nous ne pousserons pas plus loin ces réflexions auxquelles le sujet du présent mémoire nous a naturellement amené, et nous terminerons en concluant que, soit comme procédé d'investigation, soit comme moyen de démonstration, dans les questions où le *nombre* seul est en jeu, il est permis de raisonner sur le cas particulier où la courbe fixe $U_m$ possède le nombre *maximum* de points doubles ou plus généralement est *unicursale* *), et même sur celui où elle dégénère en un système de $m$ droites, pourvu qu'on ait, au préalable, déterminé avec précision l'influence que la présence des points doubles exerce sur le nombre des solutions. Grâce à cette précaution, la méthode dont il s'agit ne saurait induire en erreur, et par conséquent elle est précieuse dans les circonstances où quelque difficulté empêche d'aborder directement les cas généraux des questions proposées.

## Appendice.

### Note A.

Les considérations présentées dans la dernière partie du présent mémoire s'appliquent d'elles-mêmes aux relations projectives d'une famille de surfaces d'ordre quelconque avec une courbe à double courbure donnée. Dès

*) M. *Cayley* a désigné par cette expression commode, les courbes dont les points peuvent être déterminés individuellement (*C. R.* Mars 1866).

qu'on connaît le degré $M$ de cette courbe gauche et le degré $M'$ de la surface développable qui lui est circonscrite (ce qui est le mode le plus général de la définir), on peut, en vertu de la loi de continuité et sous les conditions mentionnées plus haut, lui substituer, dans la recherche des propriétés projectives, un simple système de $M$ droites dans l'espace, ayant entre elles $\frac{1}{2}M'$ points de rencontre.

Dans cet ordre d'idées, le cas où la courbe gauche proposée est l'intersection complète de deux surfaces de degrés $m$ et $n$, correspond à celui de droites provenant de la rencontre d'un système de $m$ plans par un autre système de $n$ plans, et possédant par conséquent $\frac{1}{2}mn(m+n-2)$ points d'intersection mutuelle. Par exemple, on voit immédiatement qu'une telle courbe, de degré $mn$, a pour perspective sur un plan quelconque une courbe plane douée de

$$\tfrac{1}{2}mn(mn-1)-\tfrac{1}{2}mn(m+n-2) = \tfrac{1}{2}mn(m-1)(n-1)$$

points doubles; ce qui est un théorème connu. Mais on en conclut cette autre proposition plus générale, qui ne nous paraît pas avoir encore été remarquée, savoir: que *la perspective sur un plan d'une courbe gauche de degré $M$ et de rang $M'$, possède $\frac{1}{2}(M(M-1)-M')$ points doubles, si cette courbe gauche n'a pas de points de rebroussement, ou $\frac{1}{2}(M(M-1)-M'-3\beta)$, si elle a $\beta$ points de rebroussement* *).

Si, pour nous rapprocher du sujet de ce mémoire, nous supposons qu'on veuille déterminer le nombre $N$ des surfaces $S_r$, de degré $r$, qui ont, avec une courbe gauche donnée, autant de contacts d'ordre quelconque qu'on voudra; on déterminera le nombre $N'$ relatif à une simple droite, on le multipliera par $M$, et on ajoutera à ce produit un nombre $N''$ représentant l'influence des $\frac{1}{2}M'$ points doubles de la courbe gauche ainsi décomposée.

Le nombre $N'$ est, en vertu des mêmes raisonnements qui ont été employés pour les courbes planes (IV et suiv.),

$$N' = M(r-\textstyle\sum_1(n_i)-p)(r-\sum_1(n_i)-p-1)\ldots(r-\sum_1(n_i)-p-t+1).$$

Quant au nombre $N''$, il suffit, pour l'obtenir, de procéder comme nous l'avons fait (XI, XII et XIII).

---

*) Les nombres qu'on déduit de ces deux formules s'accordent avec ceux que M. *G. Salmon* a fait connaître, pour les cas particuliers de $M = 3$, 4 et 5, dans un très-intéressant mémoire intitulé: *On the classification of curves of double curvature*, inséré au *Cambridge and Dublin mathematical Journal* pour le mois de février 1850.

D'où l'on voit que, sauf un simple changement dans la signification de la lettre $D$ et une légère modification dans l'expression de son premier terme, la formule ($a$.) peut aussi s'appliquer au cas du contact des surfaces avec une courbe gauche. Les solutions singulières naissent ici de la présence des nappes doubles ou multiples, et commencent à se présenter au delà de certaines limites, dont la recherche s'effectuerait par des considérations analogues à celles des §. XV, XVI et XVII.

---

## Note B. (page 317).

Non seulement la solution d'une foule de questions relatives aux propriétés projectives d'un *système* semble dépendre presque exclusivement de la connaissance des caractéristiques de ce système; mais encore il est très-vraisemblable, d'après les faits connus jusqu'ici et présentés par M. *Chasles* à l'appui de cette opinion, qu'il suffit de connaître les caractéristiques des *systèmes élémentaires* *), d'où les autres se déduisent par voie de substitution. On conçoit d'après cela l'intérêt qui s'attache à la détermination des valeurs de ces dernières caractéristiques. Or nous avons fait voir, ailleurs **), qu'il y a des règles très-simples pour y arriver dans un grand nombre de cas, non pas accidentels, mais au contraire nettement définis.

Si l'on suppose tous les systèmes élémentaires rangés dans l'ordre décroissant du nombre des points fixes qui font partie des conditions données, la valeur des deux caractéristiques est donnée exactement par la formule $\nu = 2(m-1)\mu$, $m$ étant le degré des courbes du système, à partir du simple *faisceau* jusques et y compris celui de ces systèmes consécutifs dans lequel le nombre des points est égal à $\frac{m(m-1)}{2}+2$.

Au delà de cette limite, les systèmes suivants contiennent tous des solutions singulières, qui sont englobées dans la formule ci-dessus, et dont le nombre est à peu près impossible à déterminer dès que $m > 2$.

Dans les systèmes de surfaces, les caractéristiques se calculent par les formules

$$\nu = 2(m-1)\mu \quad \text{et} \quad \varrho = 3(\overline{m-1})^2\mu,$$

---

*) Ceux où les conditions communes sont simplement des points, des droites tangentes ou des plans tangents.

**) Voir le *Giornale di Matematiche;* livraison du mois de Janvier 1866.

exactes, c'est-à-dire dégagées des solutions singulières pour tous les systèmes élémentaires qui se suivent, depuis le faisceau de surfaces, jusques et y compris celui pour lequel le nombre $T$ des points donnés satisfait à l'une des relations ci-après, savoir:

$$T > \frac{m(m-1)(m+1)}{6} + 2,$$

si les conditions sont exclusivement des points et des droites tangentes, avec ou sans l'adjonction d'un seul plan tangent;

$$\text{ou} \qquad T > \frac{m(m-1)(m+1)}{6} + 5,$$

pour toutes les autres combinaisons de ces conditions élémentaires.

Au reste, la connaissance des caractéristiques de tous les systèmes élémentaires n'est pas nécessaire pour aborder et résoudre des questions même dificiles. On en a un exemple dans le mémoire précité (Journal de *Liouville*, 1861), où nous étions parvenu, sans leur secours, à une formule très-générale concernant les contacts d'une courbe d'ordre quelconque avec des courbes données, que M. *Bischoff* avait donnée le premier dans le t. LVI de ce Journal, et qui est exacte, toutes les fois que le nombre de ces courbes fixes et des points donnés s'accorde avec la limite fixée plus haut, comme M. *Zeuthen* en a, de son côté, fait la remarque expresse (p. 100 de son mémoire).

Paris, 5. octobre 1866.

# Ueber die Kettenbruchentwickelung der *Gauss*schen Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$.

(Von Herrn *L. W. Thomé.*)

Die Function, welche *Gauss* (commentationes Gottingenses ad a. 1812) durch das Symbol $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bezeichnet hat, ist für die Werthe des Argumentes $x$, die innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 liegen, durch eine Potenzreihe, die hypergeometrische Reihe: $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$ definirt.

Die Fortsetzung dieser Function über den Convergenzkreis der Potenzreihe hinaus ergiebt sich aus der linearen Differentialgleichung, welcher die Reihe genügt, nämlich der Gleichung:

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dF}{dx}-\frac{\alpha.\beta}{x(1-x)}F=0.$$

Hierbei kommt folgender Satz über die linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten in Anwendung, welchen ich den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* verdanke. Liegt eine lineare Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten vor, und beschreibt man um einen Punkt $x_0$ einen Kreis, in welchem die Coefficienten stetig bleiben, so genügt dieser Differentialgleichung eine, und zwar eine einzige, innerhalb des ganzen Kreises eindeutige und stetige Function des Argumentes $x$, welche mit ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen im Punkte $x_0$ vorgeschriebene Werthe annimmt.

Diesem Satze zufolge lässt sich die Function der hypergeometrischen Reihe über alle Punkte des Convergenzkreises dieser Reihe, mit Ausnahme des Punktes $x=1$, hinaus als eindeutige und stetige fortsetzen, und sie behält diesen Charakter, so lange das Argument eine beliebige, sich selbst nicht schneidende Linie, welche vom singulären Punkte $x=1$ aus ins Unendliche gezogen wird, nicht überschreitet.

Wird die Function dagegen über diese Linie hinaus fortgesetzt, so hört die Eindeutigkeit derselben im Allgemeinen auf, wie die Formel von Herrn *Kummer* (Bd. 15 dieses Journals) zeigt, welche $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch die particulären Integrale der Differentialgleichung, die von $(1-x)$ abhängen, ausdrückt:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$
$$= AF(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)+B(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x),$$
$$A=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}, \qquad B=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)},$$

wo

$$\Pi(x) = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{1.2.3\ldots n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}n^x\right\}$$

ist. Denn solange $(\gamma-\alpha-\beta)$ keine ganze Zahl ist, gilt diese Formel, und wenn alsdann weder $\alpha$, noch $\beta$ der Null oder einer negativen ganzen Zahl gleich ist, so verschwindet $B$ nicht, und ist $x=1$ Verzweigungspunkt der Function.

In seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe hat *Gauss* den Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ formal in einen unendlichen Kettenbruch entwickelt.

Er geht dazu aus von den Beziehungen:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}xF(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x),$$

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)=F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,x)-\frac{(\beta+1)(\gamma-\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}xF(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3,x).$$

Aus diesen ergiebt sich folgendes System linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1-a_1xf_2, \\ f_1 &= f_2-a_2xf_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-2} &= f_{n-1}-a_{n-1}xf_n, \end{aligned}$$

worin

$$f_{2m} = F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+2m, x), \qquad a_{2m} = \frac{(\beta+m)(\gamma-\alpha+m)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)},$$

$$f_{2m+1} = F(\alpha+m, \beta+m+1, \gamma+2m+1, x), \quad a_{2m+1} = \frac{(\alpha+m)(\gamma-\beta+m)}{(\gamma+2m)(\gamma+2m+1)}$$

ist. Hierdurch entsteht die Entwickelung:

$$\frac{f_1}{f_0} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\ddots\,1-\cfrac{a_{n-2}x}{1-a_{n-1}x\frac{f_n}{f_{n-1}}}}}}.$$

Denkt man sich diese Entwickelung ins Unendliche fortgesetzt, so fragt es sich, ob der Näherungswerth des dadurch entstehenden unendlichen Kettenbruches, wenn man den Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ beliebige, reelle oder imaginäre Werthe beilegt, überhaupt in irgend einem Gebiete der Ebene gegen eine bestimmte Grenze convergirt, und welches dann das eigentliche Convergenzgebiet desselben ist, ferner ob die Grenze, der er sich nähert, mit der erzeugenden Function übereinstimmt.

Indem ich mich mit diesen Fragen auf Anregung von Herrn *Weierstrass* näher beschäftigte, wurde ich durch die Ausdrücke, welche Herr *Heine* in seinem Handbuche der Kugelfunctionen für die Kugelfunctionen mit unendlich grossen Indices entwickelt hat, darauf geführt, vermittelst derselben das Verhalten des bekannten Kettenbruches von $2xF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^2) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ zu bestimmen, bei dem die Nenner der Näherungsbrüche, sowie die Functionen $f_{n-1}$ und $f_n$ mit den Kugelfunctionen in Zusammenhang stehen.

Ich versuchte darauf, die entsprechenden Grenzwerthe der Nenner der Näherungsbrüche und die der Functionen $f_{n-1}$ und $f_n$ für $n = \infty$ im Allgemeinen zu ermitteln, um dann den obigen Kettenbruch in einfacher Weise untersuchen zu können. Dies ist für den Fall, wo $\beta = 0$ ist, vollständig gelungen, also nach Vertauschung von $\gamma$ mit $(\gamma - 1)$ für den Kettenbruch der Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$, welcher die bekannteren Kettenbrüche

$$\log(1-x) = -xF(1, 1, 2, x), \quad (1-x)^{\mu} = F(-\mu, 1, 1, x), \quad \text{etc.}$$

enthält, die *Gauss* im Art. 13 seiner Abhandlung anführt.

Von diesem Kettenbruche hat sich bei beliebigen, reellen oder imaginären Werthen der Grössen $\alpha$, $\gamma$ ergeben, dass derselbe in dem ganzen Gebiete der Ebene ausserhalb der Strecke auf der Abscissenaxe $x = +1 \cdots +\infty$ gegen die erzeugende Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ convergirt. Dies vorzulegen ist der Zweck nachstehender Abhandlung.

## §. 1.

Es mögen die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche eines Kettenbruches mit $Z$ und $N$ bezeichnet werden, und derjenige Näherungsbruch des Kettenbruches

$$\cfrac{\lambda_1}{\mu_1+\cfrac{\lambda_2}{\mu_2+}}\ddots\cfrac{\lambda_{r-1}}{\mu_{r-1}+\cfrac{\lambda_r}{\mu_r+}}\ddots,$$

welcher aus der Reihe der aufeinander folgenden Brüche: $\frac{\lambda_r}{\mu_r}$, $\frac{\lambda_{r-1}\mu_r}{\mu_{r-1}\mu_r+\lambda_r}$, etc. hervorgeht, werde $=\frac{Z_r}{N_r}$ gesetzt.

Nun gelten bekanntlich die Formeln:

$$Z_r = \mu_r Z_{r-1}+\lambda_r Z_{r-2},$$
$$N_r = \mu_r N_{r-1}+\lambda_r N_{r-2};$$

und hieraus folgt:

$$Z_r N_{r-1}-Z_{r-1}N_r = (-1)^{r-1}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r.$$

Aus letzterer Gleichung ergiebt sich die Entwickelung von $\frac{Z_r}{N_r}$ in nachstehende Reihe:

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{\lambda_1}{N_1}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{N_1N_2}+\cdots(-1)^{r-1}\frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}{N_{r-1}N_r}.$$

Betrachtet man jetzt in dem von der Strecke $x=+1\cdots+\infty$ begrenzten Gebiete der Ebene die Entwickelung:

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-}}}\ddots\cfrac{}{1-\cfrac{a_{n-2}x}{1-a_{n-1}x\cfrac{f_n}{f_{n-1}}}},$$

so sieht man aus dem Vorhergehenden, dass diese Entwickelung in folgende ihr identische übergeht:

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \frac{1}{N_1}+\frac{a_1x}{N_1N_2}+\frac{a_1a_2x^2}{N_2N_3}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{a_1a_2\ldots a_{n-2}x^{n-2}}{N_{n-2}N_{n-1}}+\frac{a_1a_2\ldots a_{n-1}x^{n-1}f_n}{N_{n-1}(f_{n-1}N_{n-1}-a_{n-1}xf_nN_{n-2})}.$$

Der $(n-1)^{\text{te}}$ Näherungswerth des unendlichen Kettenbruches wird aber darge-

stellt durch die Reihe:

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} = \frac{1}{N_1} + \frac{a_1 x}{N_1 N_2} + \frac{a_1 a_2 x^2}{N_2 N_3} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-2} x^{n-2}}{N_{n-2} N_{n-1}}.$$

Damit also dieser Näherungswerth in einem solchen endlichen Theile des betrachteten Gebietes, in welchem der Quotient $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ stetig ist, endlich bleibe, sobald $n$ eine gewisse Zahl überschritten hat und dann gegen die erzeugende Function $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ convergire, ist nothwendig und hinreichend, dass das Restglied in der Entwickelung des Quotienten, nämlich

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x^{n-1} f_n}{N_{n-1}(f_{n-1} N_{n-1} - a_{n-1} x f_n N_{n-2})}$$

mit wachsendem $n$ unendlich klein werde.

Die Ausdrücke von $Z_r$ und $N_r$ hat Herr *Heine* (Bd. 57 dieses Journals) angegeben. Durch die Relation $f_{r-1} N_{r-1} - a_{r-1} x f_r N_{r-2} = f_0$, die er daselbst entwickelt, reducirt sich das vorstehende Restglied auf

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x^{n-1} f_n}{N_{n-1} \cdot f_0}.$$

Bei dem Kettenbruche der Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$, der hier behandelt werden soll, ist nun

$$a_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad a_{2m} = \frac{m(\gamma - \alpha + m - 1)}{(\gamma + 2m - 2)(\gamma + 2m - 1)}, \quad a_{2m+1} = \frac{(\alpha + m)(\gamma + m - 1)}{(\gamma + 2m - 1)(\gamma + 2m)},$$

$$N_{2m} = F(1 - \alpha - m, -m, 2 - \gamma - 2m, x), \quad f_{2m} = F(\alpha + m, m, \gamma + 2m - 1, x),$$

$$N_{2m+1} = F(-\alpha - m, -m, 1 - \gamma - 2m, x), \quad f_{2m+1} = F(\alpha + m, m + 1, \gamma + 2m, x).$$

Es werden jetzt für die Functionen $N_{2m}$, $N_{2m+1}$, $f_{2m}$, $f_{2m+1}$ Grenzwerthe für $m = \infty$ bestimmt werden. Jede dieser Functionen wird nämlich in zwei Factoren zerlegt werden, wovon der erste die Potenz einer von $m$ unabhängigen Function von $x$ ist mit dem Exponenten $(2m + c)$, wo $c$ eine Constante bedeutet, und wovon der zweite mit wachsendem $m$ gegen eine endliche Function von $x$ convergirt.

## §. 2.

I. Setzt man in $N_{2m}(\alpha, \gamma, x)$, $N_{2m+1}(\alpha, \gamma, x)$

$$x = y^{-2}$$

und bildet die Produkte $y^{2m} N_{2m}(\alpha, \gamma, y^{-2})$, $y^{2m+1} N_{2m+1}(\alpha, \gamma, y^{-2})$, so erhält man ganze Polynome in $y$ vom $2m^{\text{ten}}$, bezüglich $(2m+1)^{\text{ten}}$ Grade, welche für

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$ bekanntlich mit den Kugelfunctionen $P_0^{(2m)}y$, $P_0^{(2m+1)}y$ übereinstimmen, die durch die Gleichung:

$$(1-2ay+a^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty a^n \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} P_0^{(n)}y$$

definirt sind.

Von letzteren Polynomen hat Herr *Heine* (Handbuch der Kugelfunctionen) die Grenzwerthe für $m = \infty$ bestimmt durch Anwendung der Substitution

$$y = \frac{\xi + \xi^{-1}}{2}, \quad \xi = y + \sqrt{y^2-1}.$$

Ausserhalb der Strecke $y = -1 \cdots +1$, wo die Function $\sqrt{y^2-1}$ eindeutig bleibt, ist der Modul von $\xi$ fortwährend entweder $> 1$, oder $< 1$, je nachdem für reelle, positive Werthe von $y$ die Wurzel positiv oder negativ genommen wird. Denn in diesem Gebiete sind die Grössen $y$ und $\sqrt{y^2-1}$ in den Zeichen der reellen, sowie der imaginären Theile im ersteren Falle fortwährend übereinstimmend, im zweiten entgegengesetzt; es ist aber $(y+\sqrt{y^2-1})(y-\sqrt{y^2-1}) = 1$. Wird daher das Wurzelzeichen dem ersten Falle gemäss bestimmt, so entspricht jedem Punkte $y$ ausserhalb der Strecke $y = -1 \cdots +1$ ein Punkt $\xi$ ausserhalb des Kreises mit dem Radius 1 und umgekehrt.

Durch Einführung von $\xi$ erhält Herr *Heine*

$$P_0^{(n)}y = (\tfrac{1}{2}\xi)^n F\left(\tfrac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right)$$

und, indem er in den Coefficienten von $F$ zur Grenze übergeht, findet er, solange Mod. $\xi > 1$ ist,

$$\lim_{n=\infty} F = F(\tfrac{1}{2}, 1, 1, \xi^{-2}) = (1-\xi^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Dies veranlasst zur näheren Untersuchung, ob für alle Werthe von $\alpha$, $\gamma$, wenn

$$y^{2m} N_{2m}(\alpha, \gamma, y^{-2}) = (\tfrac{1}{2}\xi)^{2m} \varphi_{2m}(\alpha, \gamma, \xi^{-2}),$$
$$y^{2m} N_{2m+1}(\alpha, \gamma, y^{-2}) = (\tfrac{1}{2}\xi)^{2m} \varphi_{2m+1}(\alpha, \gamma, \xi^{-2})$$

gesetzt werden, die Polynome $2m^{\text{ten}}$ Grades in $\xi^{-2}$: $\varphi_{2m}$ und $\varphi_{2m+1}$ mit wachsendem $m$ sich endlichen Grenzen nähern, so lange Mod. $\xi > 1$ ist.

Es werde zuerst wieder $x$ eingeführt durch die Gleichung:

$$x = y^{-2},$$

wobei der vorhin ausgenommenen Strecke $y = -1 \cdots +1$ die Strecke $x = +1 \cdots +\infty$ entspricht. Man erhält $y^{-1}.\xi = 1 + \sqrt{1-x}$, $\xi^{-2} = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}$, wo $\sqrt{1-x}$ den Werth 1 für $x = 0$ annimmt. Setzt man $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = z$, so wird

$\frac{4z}{(1+z)^2} = x$; jedem Punkte $x$ ausserhalb der Strecke $x = +1 \cdots +\infty$ entspricht ein Punkt $z$ innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 und umgekehrt.

Die obigen Gleichungen gehen nun durch Einführung von $z$ in folgende über:

$$N_{2m}(\alpha, \gamma, x) = (1+z)^{-2m} \varphi_{2m}(\alpha, \gamma, z),$$
$$N_{2m+1}(\alpha, \gamma, x) = (1+z)^{-2m} \varphi_{2m+1}(\alpha, \gamma, z),$$

und es sollen die Grenzwerthe von $\varphi_{2m}(z)$ und $\varphi_{2m+1}(z)$ bestimmt werden.

Zunächt ergiebt sich aus folgender Relation zwischen den Functionen $\varphi$, die aus der entsprechenden zwischen den $N$ folgt:

$$\varphi_{2m+1}(z) = (1+z)^{-2} \varphi_{2m+2}(z) + \frac{(\alpha+m)(\gamma+m-1)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)} 4z (1+z)^{-2} \varphi_{2m}(z),$$

dass man nur $\lim_{n=\infty} \varphi_{2m}(z)$ zu ermitteln braucht.

Dies wird mit Hülfe der linearen Differentialgleichung für $\varphi_{2m}(z)$ geschehen, die man aus jener für $N_{2m}(x)$ ableitet:

$$z(1-z^2)\frac{d^2\varphi_{2m}(z)}{dz^2} + \{2-\gamma+2.(2\alpha-\gamma)z-\gamma z^2-2m(1-z^2)\}\frac{d\varphi_{2m}(z)}{dz}$$
$$-2m\{2\alpha-\gamma+(1-\gamma)z\}\varphi_{2m}(z) = 0.$$

Wird $\varphi_{2m}(z) = 1+a_1 z+a_2 z^2+\cdots+a_{2m} z^{2m}$ gesetzt, so ist $a_r = a_{2m-r}$, und man erhält aus der Differentialgleichung folgendes Gesetz der Coefficienten:

Von $r = 0$ bis $r = 2m-3$:

$$a_{r+2} = \frac{2(\gamma-2\alpha)(m-r-1)}{(r+2)(2m-r-3+\gamma)} a_{r+1} + \frac{(r-1+\gamma)(2m-r)}{(r+2)(2m-r-3+\gamma)} a_r$$
$$\frac{2(\gamma-2\alpha)m}{2m-2+\gamma} = a_1, \quad 1 = a_0.$$

Untersucht man aber die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_m$, so ergiebt sich dieses:

Für $r$ lässt sich ein so grosser Werth $\varrho$ bestimmen, dass, sobald $m$ und $r$ die Bedingung $m \geqq r \geqq \varrho$ erfüllen,

$$\text{Mod.}\left\{\frac{2(\gamma-2\alpha)(m-r-1)}{(r+2)(2m-r-3+\gamma)}\right\} < \text{Mod.}\left\{\frac{2(\gamma-2\alpha)(m-1)}{(r+2)(m-3+\gamma)}\right\} < \varepsilon$$

wird, wo $\varepsilon$ eine beliebig klein angenommene positive Grösse ist, und

$$\text{Mod.}\left\{\frac{(r-1+\gamma)(2m-r)}{(r+2)(2m-r-3+\gamma)}\right\} < 1+\varepsilon.$$

Die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_{\varrho+1}$ bleiben für jedes $m$ dem Modul nach unterhalb einer positiven Constanten $A$; um so mehr

$$\text{Mod.}\, a_0 < A, \quad \text{Mod.}\, a_1 < A(1+\varepsilon), \quad \ldots \quad \text{Mod.}\, a_{\varrho+1} < A(1+\varepsilon)^{\varrho+1}.$$

Aus dem Vorhergehenden folgt nun, dass für $m > \varrho$ auch

$$\text{Mod.}\, a_{\varrho+2} < A(1+\varepsilon)^{\varrho+2}, \quad \text{Mod.}\, a_{\varrho+3} < A(1+\varepsilon)^{\varrho+3}, \quad \ldots \quad \text{Mod.}\, a_m < A(1+\varepsilon)^m$$

ist. Da aber $a_r = a_{2m-r}$, so hat man, wenn $m > \varrho$ ist, allgemein von $r = 0$ bis $r = 2m$:

$$\text{Mod.}\, a_r < A(1+\varepsilon)^r.$$

Die Reihe $\sum_0^{2m} A(1+\varepsilon)^r z^r$ convergirt für $m = \infty$, so lange $\text{Mod.}\, z < \frac{1}{1+\varepsilon}$. Daher bleibt die Function $\varphi_{2m}(z)$ dem Modul nach unterhalb einer endlichen Grösse, so lange $\text{Mod.}\, z < \frac{1}{1+\varepsilon}$. Dasselbe gilt von jeder einzelnen Ableitung von $\varphi_{2m}(z)$ nach $z$. Da aber $\varepsilon$ beliebig klein angenommen werden konnte, so hat die Function $\varphi_{2m}(z)$ mit ihren Ableitungen die angegebene Eigenschaft innerhalb des ganzen Kreises mit dem Radius 1.

Die Differentialgleichung von $\varphi_{2m}(z)$ werde jetzt auf die Form gebracht:

$$\frac{d\varphi_{2m}(z)}{dz} + \frac{2\alpha - \gamma + (1-\gamma)z}{1-z^2}\varphi_{2m}(z) + \frac{1}{2m}\chi_{2m}(z) = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$\chi_{2m}(z) = -\frac{z(1-z^2)\frac{d^2\varphi_{2m}(z)}{dz^2} + \{2-\gamma+2(2\alpha-\gamma)z-\gamma z^2\}\frac{d\varphi_{2m}z}{dz}}{1-z^2}$$

gesetzt ist. Durch Integration erhält man:

$$\varphi_{2m}(z) = e^{-\int_0^z \frac{2\alpha-\gamma+(1-\gamma)z}{1-z^2}dz}\left\{1 - \frac{1}{2m}\int_0^z \chi_{2m}(z).e^{\int_0^z \frac{2\alpha-\gamma+(1-\gamma)z}{1-z^2}dz}\,dz\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\lim_{m=\infty}\varphi_{2m}(z) = e^{-\int_0^z \frac{2\alpha-\gamma+(1-\gamma)z}{1-z^2}dz} = (1-z)^{\frac{2\alpha-2\gamma+1}{2}}(1+z)^{\frac{1-2\alpha}{2}}$$

Ebenso convergiren die Ableitungen von $\varphi_{2m}(z)$ gegen die entsprechenden von $\lim_{m=\infty}\varphi_{2m}(z)$. Aus der oben aufgestellten Relation zwischen $\varphi_{2m}(z)$ und $\varphi_{2m+1}(z)$ ersieht man, dass $\lim_{m=\infty}\varphi_{2m+1}(z) = (1+z)^{-1}\lim_{m=\infty}\varphi_{2m}(z)$ ist. Es werde nun allgemein in $N_r$ die $(-r)^{\text{te}}$ Potenz von $(1+z)$ als Factor herausgenommen und

$$N_r(\alpha, \gamma, x) = (1+z)^{-r}\Phi_r(\alpha, \gamma, z)$$

gesetzt. Das Polynom $\Phi_r$ und seine Ableitungen convergiren dann gegen die Grösse $(1-z)^{\frac{2\alpha-2\gamma+1}{2}}(1+z)^{\frac{1-2\alpha}{2}}$ bezüglich deren Ableitungen.

II. Auf gleiche Weise werden die Grenzwerthe von

$f_{2m}(\alpha,\gamma,x) = F(\alpha+m, m, \gamma+2m-1, x)$, $f_{2m+1}(\alpha,\gamma,x) = F(\alpha+m, m+1, \gamma+2m, x)$

für $m = \infty$ bestimmt.

Setzt man in $f_{2m+1}(\alpha,\gamma,x)$, $f_{2m+2}(\alpha,\gamma,x)$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$, $x = y^{-2}$ und multiplicirt die erste Function mit $y^{-2m-1}$, die zweite mit $y^{-2m-2}$, so erhält man allgemein

$$y^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, y^{-2}\right).$$

Dieses ist das zweite particuläre Integral der Differentialgleichung der Kugelfunctionen:

$$(1-y^2)\frac{d^2s}{dy^2} - 2y\frac{ds}{dy} + n(n+1)s = 0.$$

Für dasselbe hat Herr *Heine* ebenfalls den Grenzwerth auf die im Anfange dieses Paragraphen angegebene Weise bestimmt.

Er erhält

$$y^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, y^{-2}\right) = (\tfrac{1}{2}\xi)^{-n-1} F\left(\tfrac{1}{2}, n+1, \frac{2n+3}{2}, \xi^{-2}\right)$$

und durch Uebergang zur Grenze in den Coefficienten:

$$\lim_{n=\infty} F\left(\tfrac{1}{2}, n+1, \frac{2n+3}{2}, \xi^{-2}\right) = F(\tfrac{1}{2}, 1, 1, \xi^{-2}) = (1-\xi^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Es sollen jetzt für alle Werthe von $\alpha$, $\gamma$ die Grenzwerthe von $f_{2m}(\alpha,\gamma,x)$ und $f_{2m+1}(\alpha,\gamma,x)$ bestimmt werden.

Statt beider Functionen betrachte man die allgemeinere

$$F(\alpha+m-1, \beta+m, \gamma+2m-2, x),$$

aus welcher beide für $\beta = 0$ hervorgehen, die erste nach Vertauschung von $\alpha$ und $\gamma$ mit $(\alpha+1)$ und $(\gamma+1)$, die zweite nach Vertauschung von $m$ mit $(m+1)$. Die Function $F(\alpha+m-1, \beta+m, \gamma+2m-2, x)$ wird durch die Substitution $x = \frac{4z}{(1+z)^2}$ in eine Function von $z$ verwandelt, welche für die Werthe von $z$ innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 eindeutig und stetig ist. Setzt man nun, der Function

$$N_{2m} = F(1-\alpha-m, -m, 2-\gamma-2m, x) = (1+z)^{-2m}\varphi_{2m}(\alpha,\gamma,z)$$

entsprechend,

$$F(\alpha+m-1, \beta+m, \gamma+2m-2, x) = (1+z)^{2(m+\beta)}\psi_{2m}(\alpha,\beta,\gamma,z),$$

so erhält man für $\psi_{2m}(z)$ die Differentialgleichung:

$$z(1-z^2)\frac{d^2\psi_{2m}(z)}{dz^2} - \{2-\gamma+2\beta+2(2\alpha-\gamma)z+(4-\gamma+2\beta)z^2-2(m+\beta)(1-z^2)\}\frac{d\psi_{2m}(z)}{dz}$$
$$-2(m+\beta)\{2\alpha-\gamma+(2\beta-\gamma+3)z\}\psi_{2m}(z) = 0.$$

$\psi_{2m}(z)$ lässt sich für die Werthe von $z$ innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 durch eine Potenzreihe $\sum_0^\infty b_r z^r$ entwickeln. Aus der Differentialgleichung erhält man folgendes Gesetz der Coefficienten:

Von $r = 0 \ldots \infty$:

$$b_{r+2} = \frac{2(2\alpha-\gamma)(m+r+1+\beta)}{(r+2)(2m+r-1+\gamma)} b_{r+1} + \frac{(r+3+2\beta-\gamma)(2m+r+2\beta)}{(r+2)(2m+r-1+\gamma)} b_r,$$

$$\frac{2(2\alpha-\gamma)(m+\beta)}{2m-2+\gamma} = b_1, \qquad 1 = b_0.$$

Für $r$ giebt es hier wiederum einen so grossen Werth $\varrho$, dass, wenn $r > \varrho$ ist,

$$\text{Mod.}\left\{\frac{2(2\alpha-\gamma)(m+r+1+\beta)}{(r+2)(2m+r-1+\gamma)}\right\} < \varepsilon$$

bleibt, wo $\varepsilon$ eine beliebig klein angenommene positive Grösse ist, und

$$\text{Mod.}\left\{\frac{(r+3+2\beta-\gamma)(2m+r+2\beta)}{(r+2)(2m+r-1+\gamma)}\right\} < 1+\varepsilon.$$

Die Coefficienten $b_0, b_1, \ldots b_{\varrho+1}$ bleiben für jedes $m$ dem Modul nach unterhalb einer positiven Constanten $B$. Durch Wiederholung der bei $\varphi_{2m}(z)$ gemachten Betrachtungen ergiebt sich dann, dass allgemein $\text{Mod.}\, b_r < B(1+\varepsilon)^r$ ist. Indem man nun gerade wie oben weiter verfährt, erhält man:

$$\lim_{m=\infty} \psi_{2m}(\alpha, \beta, \gamma, z) = e^{\int_0^z \frac{2\alpha-\gamma+(2\beta-\gamma+3)z}{1-z^2} dz} \cdot (1-z)^{\frac{2\gamma-2\alpha-2\beta-3}{2}} (1+z)^{\frac{2\alpha-2\beta-3}{2}}.$$

Wird daher

$$f_r(\alpha, \gamma, x) = (1+z)^r \Psi_r(\alpha, \gamma, z)$$

gesetzt, so convergiren $\Psi_r(\alpha, \gamma, z)$ und seine Ableitungen gegen die Grösse $(1-z)^{\frac{2\gamma-2\alpha-3}{2}} (1+z)^{\frac{2\alpha-1}{2}}$ bezüglich deren Ableitungen.

## §. 3.

Nachdem die Grenzwerthe, auf die in §. 1 hingewiesen wurde, gefunden sind, wird an die dortigen Betrachtungen wieder angeknüpft.

Den Entwickelungen des §. 1 zufolge kommt es jetzt darauf an, zu zeigen, dass in dem Gebiete ausserhalb der Strecke $x = +1 \cdots +\infty$ der Ausdruck

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x^{n-1} f_n}{N_{n-1} f_0}$$

mit wachsendem $n$ unendlich klein werde.

Wird dieser Ausdruck nach dem vorigen Paragraphen durch Substitution von $x = \frac{4z}{(1+z)^2}$ transformirt, so erhält man:

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(4z)^{n-1} \Psi_n(\alpha, \gamma, z).(1+z)}{\Phi_{n-1}(\alpha, \gamma, z)}.$$

Nun ist

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{\Psi_n(\alpha, \gamma, z).(1+z)}{\Phi_{n-1}(\alpha, \gamma, z)} \right\} = (1-z)^{2\gamma-2\alpha-2}(1+z)^{2\alpha}.$$

Das Product $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(4z)^{n-1}$ wird aber mit wachsendem $n$ unendlich klein; denn die Reihe $\sum_1^\infty a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(4z)^{n-1}$, deren allgemeines Glied jenes Product ist, convergirt für $\lim_{n=\infty} \mathrm{Mod.}(a_n 4z) = \mathrm{Mod.}(z) < 1$.

Also ist

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x^{n-1} f_n}{N_{n-1} f_0} \right\} = 0.$$

Die Reihe

$$\frac{1}{N_1} + \frac{a_1 x}{N_1 N_2} + \frac{a_1 a_2 x^2}{N_2 N_3} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-2} x^{n-2}}{N_{n-2} N_{n-1}}$$

bleibt also in einem beliebigen endlichen Theile des betrachteten Gebietes endlich, sobald $n$ eine gewisse Zahl überschritten hat und convergirt mit wachsendem $n$ gegen die Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$.

Es ist leicht zu zeigen, auf welche Weise die in den ersten Gliedern dieser Reihe etwa auftretenden unendlich grossen Werthe sich wegheben.

Der Grenzwerth von $N_r$ zeigte sofort, dass, sobald $r$ eine gewisse Zahl überschritten hat, $N_r$ in dem angenommenen endlichen Theile der Ebene nicht mehr verschwindet. Verschwindet dagegen in einem Punkte dieses Bereiches einer der früheren Nenner $N_\varrho$, so verschwindet in demselben Punkte weder $N_{\varrho-1}$ noch $N_{\varrho+1}$, weil aus den linearen Gleichungen zwischen den $N$ (§. 1.), $N_{\varrho+1} = N_\varrho + \lambda_{\varrho+1} N_{\varrho-1}$ und den folgenden, sich ergeben würde, dass alle folgenden Nenner in demselben Punkte verschwänden, was nicht der Fall ist.

Dann ist aber

$$\frac{(-1)^{\varrho-1}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\varrho}{N_{\varrho-1}N_\varrho} + \frac{(-1)^{\varrho}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{\varrho+1}}{N_\varrho N_{\varrho+1}} = \frac{(-1)^{\varrho-1}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\varrho(N_{\varrho+1}-\lambda_{\varrho+1}N_{\varrho-1})}{N_{\varrho-1}N_\varrho N_{\varrho+1}}$$

$$= \frac{(-1)^{\varrho-1}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\varrho}{N_{\varrho-1}N_{\varrho+1}}.$$

Das Resultat ist also dieses:

Der Näherungswerth des unendlichen Kettenbruches

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\cfrac{a_3 x}{1-\ddots}}}}$$

worin $a_1 = \frac{\alpha}{\gamma}$, $a_{2m} = \frac{m(\gamma-\alpha+m-1)}{(\gamma+2m-2)(\gamma+2m-1)}$,

$$a_{2m+1} = \frac{(\alpha+m)(\gamma+m-1)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)}.$$

ist, welcher, wenn er der $(n-1)^{te}$ Näherungswerth ist, dargestellt wird durch die Reihe

$$1+\sum_1^{n-2} \frac{a_1 a_2 \dots a_r x^r}{N_r N_{r+1}},$$

worin

$$N_{2m} = F(1-\alpha-m, -m, 2-\gamma-2m, x),$$
$$N_{2m+1} = F(-\alpha-m, -m, 1-\gamma-2m, x)$$

ist, bleibt in einem beliebigen endlichen Theile des Gebietes, welches ausserhalb der Strecke auf der Abscissenaxe $x = +1 \cdots +\infty$ liegt, endlich, sobald $n$ eine gewisse Zahl überschritten hat und convergirt mit wachsendem $n$ gegen die Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$.

Die Strecke $x = +1 \cdots +\infty$ selbst ist, wie in der Einleitung angegeben wurde, im Allgemeinen Verzweigungslinie der Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$, so dass eine eindeutige Entwickelung die Function bis auf diese Linie hin, nur in einem Zweige vollständig darstellen könnte. Wenn aber die Grössen $\alpha$, $\gamma$ reell sind, wird die Function, wie man aus der in der Einleitung angegebenen Formel von Herrn *Kummer* sieht, auf der genannten Strecke imaginär, so dass die Kettenbruchentwickelung, die dort aus reellen Elementen besteht, die Function in keinem der beiden Zweige wiedergiebt.

## §. 4.

Es ist nun noch zu zeigen, dass die den Kettenbruch vertretende Reihe

$$1+\sum_1^{\infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_r x^r}{N_r N_{r+1}}$$

sich differentiiren lässt.

Wird diese Reihe durch die Substitution $x = \frac{4z}{(1+z)^2}$ transformirt, so erhält man nach §. 2:

$$1+\sum_1^{\infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_r (4z)^r (1+z)}{\Phi_r(z)\Phi_{r+1}(z)}.$$

Der Quotient $\frac{1}{\Phi_r(z)\Phi_{r+1}(z)}$ und seine Ableitungen nach $z$ convergiren mit wachsendem $r$ gegen die Grösse $(1-z)^{2\gamma-2\alpha-1}(1+z)^{2\alpha-1}$ bezüglich ihre Ableitungen. Es sei nun $\varrho$ derjenige Werth, welchen $r$ überschreiten muss, damit

der Quotient $\frac{1}{\Phi_r(z)\Phi_{r+1}(z)}$ für die Werthe von $z$ in einem Bereiche innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 nicht mehr unendlich wird. Von $r=\varrho$ an bleibt dann der Quotient und eine endliche Anzahl seiner Ableitungen in diesem Bereiche dem Modul nach unterhalb einer positiven Grösse $g$.

Die Potenzreihe

$$g(1+z)\sum_{\varrho}^{\infty} a_1 a_2 \ldots a_r (4z)^r$$

convergirt aber nach dem vorigen Paragraphen innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 unbedingt (d. h. die Reihe der Moduln convergirt). Dasselbe findet für die durch Differentiation der Glieder aus ihr abgeleiteten Reihen statt.

Daraus ersieht man, dass auch die Reihe

$$\sum_{\varrho}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \ldots a_r (4z)^r (1+z)}{\Phi_r(z)\Phi_{r+1}(z)},$$

so wie ihre abgeleiteten in dem betrachteten Theile des Kreises unbedingt convergiren. Und zwar convergirt jede einzelne dieser Reihen in dem angenommenen Bereiche in gleichem Grade, d. h. die Summe der späteren Glieder wird dort überall gleichzeitig unendlich klein. Differentiirt man aber eine in einem stetigen Bereiche in gleichem Grade convergirende Reihe in den einzelnen Gliedern, so ist, wenn man dadurch eine ebenso convergirende Reihe erhält, bekanntlich letztere die Ableitung der durch die erstere ausgedrückten stetigen Function nach dem Satze über die bestimmte Integration einer in gleichem Grade convergenten Reihe durch Integration der Glieder. Damit ist für die ursprüngliche Reihe

$$1+\sum_{1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \ldots a_r x^r}{N_r N_{r+1}}$$

bewiesen, dass sie und die durch Differentiation ihrer Glieder abgeleiteten Reihen in einem endlichen Theile des Gebietes, welches ausserhalb der Strecke $x=+1\cdots+\infty$ liegt, unbedingt und in gleichem Grade convergiren von jenem Gliede an, wo die Nenner $N$ in dem betrachteten Bereiche nicht mehr verschwinden. Die durch Differentiation abgeleiteten Reihen sind dann die Ableitungen der durch die ursprüngliche Reihe dargestellten Function.

## §. 5.

Ueber die Wurzeln der Gleichungen

$$N_{2m} = F(1-\alpha-m, -m, 2-\gamma-2m, x) = 0,$$
$$N_{2m+1} = F(-\alpha-m, -m, 1-\gamma-2m, x) = 0$$

lassen sich für den Fall, wo die Grössen $\alpha$, $\gamma$ reell sind, folgende allgemeinere Angaben machen.

Dass diese Wurzeln alle von einander verschieden sind, sieht man aus den Gleichungen für $F(a, b, c, x)$:

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}+\{c-(a+b+1)x\}\frac{dF}{dx}-abF = 0,$$

$$x(1-x)\frac{d^{r+2}F}{dx^{r+2}}+\{c+r-(a+b+2r+1)x\}\frac{d^{r+1}F}{dx^{r+1}}-(a+r)(b+r)\frac{d^rF}{dx^r} = 0.$$

Hierbei ist nur der Punkt $x=1$ näher ins Auge zu fassen.

Für $x=1$ wird

$$c+r-(a+b+2r+1)x = \alpha-\gamma-r$$

und

$$-(a+r)(b+r) = \begin{cases} -(1-\alpha-m+r)(-m+r) \\ -(\ -\alpha-m+r)(-m+r) \end{cases} \text{ bei } \begin{matrix} N_{2m} \\ N_{2m+1}. \end{matrix}$$

Daher verschwinden für $x=1$ weder die Polynome $N_{2m}$, $N_{2m+1}$ noch eines ihrer abgeleiteten Polynome, so lange nicht $(\alpha-\gamma)$ der Null oder einer positiven ganzen Zahl gleich ist.

In letzterem Falle und in dem Falle, wo $\alpha$ der Null oder einer negativen ganzen Zahl gleich ist, ist der Kettenbruch ein endlicher, weshalb diese Fälle aus der ferneren Untersuchung ausgeschlossen bleiben können.

Nun zeigen schon die Ausdrücke von $N_{2m}$ und $N_{2m+1}$ für $m=1$ und 2, dass die Wurzeln der Nenner bei reellen Werthen von $\alpha$, $\gamma$ im Allgemeinen jede beliebige Lage annehmen können. Es fragt sich aber, welche Bedingungen für $\alpha$, $\gamma$ erfüllt sein müssen, damit die Nenner von einem bestimmten an ihre Wurzeln beständig auf der ausgeschiedenen Strecke $x=+1\cdots+\infty$ liegen haben.

Zuerst werde hierzu $N_{2m}$ untersucht.

Ist $m$ so gross geworden, dass $(2-\gamma-2m+m-1)$ negativ bleibt, so sind in dem Polynom $N_{2m}$ nur unter der Bedingung soviel Zeichenwechsel, als der Grad der Gleichung beträgt, vorhanden, dass $\alpha$ positiv ist. Dieses ist also nach der *Descartes*schen Zeichenregel die erste Bedingung, welche nothwendig erfüllt sein muss, damit die Nenner $N_{2m}$ die angegebene Eigenschaft haben. Man kann nun weiter nach der Methode von *Sturm* verfahren. Die Reihe $N_{2m}$, $\frac{dN_{2m}}{dx}$, $\frac{d^2N_{2m}}{dx^2}$, $\cdots$ $\frac{d^mN_{2m}}{dx^m}$ hat nämlich, wenn $\alpha$ positiv ist, auf der Strecke $x=+1\cdots+\infty$ die charakteristischen Eigenschaften einer *Sturm*schen Reihe. Erstens, wenn $N_{2m}$ verschwindet, so verschwindet $\frac{dN_{2m}}{dx}$

nicht; und bei wachsendem $x$ haben die beiden Glieder, unmittelbar vor dem Verschwinden von $N_{2m}$ entgegengesetzte, nachher gleiche Zeichen. Zweitens sieht man aus der oben aufgestellten Relation zwischen je drei Gliedern der Reihe, dass wenn auf der bezeichneten Strecke eines der folgenden Glieder verschwindet, die beiden angrenzenden entgegengesetzte Zeichen haben. Setzt man jetzt in dieser Reihe $x=+\infty$ und $x=+1$, so erhält man im ersten Falle beständig Zeichengleichheit. Im zweiten Falle kann man die Reihe der Zeichen leicht aus der obigen Relation beurtheilen, in welcher für $x=1$ das Glied $\frac{d^{r+2}F}{dx^{r+2}}$ ausfällt. Man findet als nothwendige und hinreichende Bedingung dass $m$ Zeichenwechsel vorhanden seien, die, dass $\alpha-\gamma<0$ ist. Sind aber die angegebenen Bedingungen, nämlich $0<\alpha<\gamma$ erfüllt, so haben sämmtliche Nenner $N_{2m}$ von dem ersten an ihre Wurzeln auf der ausgeschiedenen Strecke.

Auf dieselbe Weise lässt sich $N_{2m+1}$ untersuchen, und man erhält hier als nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die Wurzeln auf der Strecke $x=+1\cdots+\infty$ liegen, die, dass $-1<\alpha<\gamma$ ist.

Wendet man dieses auf die Kettenbrüche von

$$\log(1-x) = -xF(1,1,2,x),$$
$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2xF(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},x^2),$$
$$(1-x)^{\mu} = F(-\mu,1,1,x)$$

an, so ergiebt sich, dass in dem ersten die Nenner $N_{2m}$ und $N_{2m+1}$ ihre Wurzeln beständig auf der Strecke $x=+1\cdots+\infty$ liegen haben, in dem zweiten auf den Strecken $x=-\infty\cdots-1$ und $x=+1\cdots+\infty$. Was das Binomium angeht, so haben, wenn $-1<\mu<0$ ist, sowohl die Nenner $N_{2m}$, als auch $N_{2m+1}$ ihre Wurzeln auf der ausgeschiedenen Strecke. In dem Falle, wo $0<\mu<1$ ist, findet dasselbe noch für die Nenner $N_{2m+1}$ statt. Man kann dann je zwei aufeinander folgende Glieder der Kettenbruchreihe, wie in §. 3 angegeben worden ist, zusammenfassen und erhält die Reihe $1+\sum_{1}^{\infty}\frac{a_1a_2\ldots a_{2r-1}x^{2r-1}}{N_{2r-1}N_{2r+1}}$, in welcher bloss die Nenner $N_{2m+1}$ vorkommen.

In beiden Fällen liefert die Multiplication der Kettenbruchreihe mit $(1-x)^n$, wo $n$ eine beliebige, positive oder negative ganze Zahl ist, eine nach rationalen Functionen fortschreitende Reihe, wovon kein Glied innerhalb des Gebietes, welches durch die Strecke $x=+1\cdots+\infty$ begrenzt ist, unendlich wird, und welche das Binomium mit beliebigem reellen Exponenten in diesem ganzen Gebiete darstellt.

# Ueber die Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten.

(Von Herrn *L. W. Thomé.*)

In §. 2 der vorhergehenden Abhandlung sind hypergeometrische Reihen, die von der ganzen Zahl $m$ abhängen, betrachtet und deren Grenzwerthe für $m = \infty$ ermittelt worden. Auf diese hypergeometrischen Reihen lassen sich als specielle Fälle die Kugelfunctionen zurückführen. Durch die Untersuchungen der Herren *Heine* und *Neumann* kennt man die Entwickelung der eindeutigen und stetigen Functionen eines complexen Argumentes in Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten. Die Gesetze der Convergenz und Differentiation der allgemeinen Reihen von Kugelfunctionen bei beliebigen Coefficienten lassen sich nun in einfacher Weise nach der in der vorigen Abhandlung angewandten Methode bestimmen, welche auf der Betrachtung des Grenzwerthes des allgemeinen Gliedes in der Reihe beruht. Um diese Untersuchung übersichtlicher zu machen, möge es zunächst gestattet sein, die Sätze der Herren *Heine* und *Neumann* kurz anzugeben.

Entwickelt man die Integrale der Differentialgleichung der Kugelfunctionen

$$(1-x^2)\frac{d^2s}{dx^2} - 2x\frac{ds}{dx} + n(n+1)s = 0$$

nach absteigenden Potenzen von $x$, so erhält man folgende Ausdrücke derselben:

$$x^n F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{-n}{2}, \frac{1-2n}{2}, x^{-2}\right),$$

$$x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{2n+3}{2}, x^{-2}\right).$$

Diese gehen nach §. 2 der vorigen Abhandlung durch die Substitution $x = \frac{\xi + \xi^{-1}}{2}$ in nachstehende über:

$$(\tfrac{1}{2}\xi)^n F\left(\tfrac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right),$$

$$(\tfrac{1}{2}\xi)^{-n-1} F\left(\tfrac{1}{2}, n+1, \frac{2n+3}{2}, \xi^{-2}\right),$$

wovon der erste eine ganze Function von $x$ $n^{\text{ten}}$ Grades, der zweite eine

Function von $x$ darstellt, die ausserhalb der Strecke $x=-1\cdots+1$ eindeutig und stetig bleibt.

Herr *Heine* gebraucht (Handbuch der Kugelfunctionen) die Ausdrücke dieser Functionen durch bestimmte Integrale:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}x^n F\left(\frac{1-n}{2},\frac{-n}{2},\frac{1-2n}{2},x^{-2}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n d\varphi = P^{(n)}x,$$
$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)}x^{-n-1}F\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+2}{2},\frac{2n+3}{2},x^{-2}\right)$$
$$=\int_0^{\infty}(x+\cos it\sqrt{x^2-1})^{-n-1}dt = Q^{(n)}x,$$

wo das Wurzelzeichen so bestimmt wird, wie in §. 2 der vorigen Abhandlung angegeben worden ist; und er beweist mit Hülfe dieser Integrale, dass die Gleichung

$$\frac{1}{v-u} = \sum_0^{\infty}(2n+1)Q^{(n)}v\,P^{(n)}u$$

stattfindet und zwar unter der Bedingung

$$\text{Mod.}(v+\sqrt{v^2-1}) > \text{Mod.}(u+\sqrt{u^2-1}).$$

Herr *Neumann* zeigt in der Abhandlung: „Ueber die Entwickelung einer Function mit imaginärem Argumente nach den Kugelfunctionen erster und zweiter Art“ (Halle 1862), dass diese Bedingung dann erfüllt ist, wenn in dem Systeme confocaler Ellipsen mit den Brennpunkten $x=\pm 1$ $v$ auf einer grösseren, als $u$ liegt. Er entwickelt ferner das Integral in der *Cauchy*schen Formel:

$$fx = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{fv}{v-x}dv$$

durch die Reihe von Herrn *Heine* und erhält den Satz:

Eine Function des complexen Argumentes $x$, die für die Werthe von $x$ innerhalb einer Ellipse mit den Brennpunkten $x=\pm 1$ eindeutig und stetig ist, lässt sich in diesem Bereiche durch folgende Formel nach Kugelfunctionen entwickeln:

$$fx = \sum_0^{\infty}\frac{2n+1}{2\pi i}\int fv\,Q^{(n)}v\,dv\,P^{(n)}x,$$

wo die Integration über den Rand der Ellipse in positiver Richtung (von der positiven Seite der Abscissenaxe zur positiven der Ordinatenaxe hin) auszuführen ist.

Gleicherweise leitet er aus der Formel:

$$fx = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int \frac{fv}{v-x}\,dv + \int \frac{fu}{x-u}\,du\right\}$$

den Satz ab:

Eine Function von $x$, die für die Werthe von $x$ innerhalb des Ringes zwischen zwei confocalen Ellipsen mit den Brennpunkten $x = \pm 1$ eindeutig und stetig ist, wird in diesem Bereiche durch folgende Doppelreihe nach Kugelfunctionen entwickelt:

$$fx = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2\pi i}\int fv\, Q^{(n)}v\,dv\, P^{(n)}x + \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2\pi i}\int fu\, P^{(n)}u\,du\, Q^{(n)}x,$$

wo die erste Integration über den Rand der äusseren, die zweite über den der inneren Ellipse in positiver Richtung auszuführen ist.

Es werden daher hier Reihen von der Form

$$\sum_0^\infty A_n P^{(n)}x, \quad \sum_0^\infty B_n Q^{(n)}x,$$

wo $A_n$, $B_n$ beliebige Coefficienten sind, näher untersucht werden.

## §. 1.

Zu dem angegebenen Zwecke werden die Grenzausdrücke von $P^{(n)}x$ und $Q^{(n)}x$ für $n = \infty$ gebraucht. Dieselben sind in §. 2 der vorigen Abhandlung bestimmt worden.

Es war

$$P^{(n)}x = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}(\tfrac{1}{2}\xi)^n \quad F\left(\tfrac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right),$$

$$Q^{(n)}x = \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)}(\tfrac{1}{2}\xi)^{-n-1}F\left(\tfrac{1}{2}, n+1, \frac{2n+3}{2}, \xi^{-2}\right);$$

nach §. 2 der vorigen Abhandlung convergiren $F\left(\frac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right)$ und $F\left(\frac{1}{2}, n+1, \frac{2n+3}{2}, \xi^{-2}\right)$ mit ihren Ableitungen nach $\xi^{-2}$ mit wachsendem $n$ gegen die Grösse $(1-\xi^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ bezüglich ihre Ableitungen.

Es werde jetzt die Reihe $\sum_0^\infty A_n P^{(n)}(x)$ untersucht.

Transformirt man dieselbe durch Einführung von $\xi$, so erhält man

$$\sum_0^\infty A_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}(\tfrac{1}{2}\xi)^n F\left(\tfrac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right).$$

Die Function $F\left(\frac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right)$ und eine endliche Anzahl ihrer Ableitungen nach $\xi$ bleiben dem Modul nach in einem endlichen Bereiche von $\xi$ ausserhalb des Kreises mit dem Radius 1 unterhalb einer positiven Grösse $g$.

Die Potenzreihe

$$g\sum_0^\infty A_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}(\tfrac{1}{2}\xi)^n$$

hat aber denselben Convergenzkreis, wie die Reihe $\sum_0^\infty A_n\xi^n$. Denn der der letzteren ist nicht grösser, weil $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} < 1$ ist, und er ist nicht kleiner, weil in der Reihe

$$2\xi.\sum_0^\infty A_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\tfrac{1}{2}n(\tfrac{1}{2}\xi)^{n-1} = \sum_0^\infty A_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)}\xi^n$$

der Factor $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)} > 1$ ist. Der Radius dieses Kreises werde mit $R$ bezeichnet.

Ist $R > 1$, so convergirt die Reihe

$$\sum_0^\infty A_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}(\tfrac{1}{2}\xi)^n F\left(\tfrac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right)$$

mit den durch Differentiation nach $\xi$ abgeleiteten für die Werthe von $\xi$ in dem Ringe zwischen den Kreisen mit den Radien 1 und $R$ unbedingt (d. h. die Reihen der Moduln convergiren). Dagegen divergirt die Reihe ausserhalb des Kreises mit dem Radius $R$. Denn ausserhalb dieses Kreises divergirt die Reihe $\sum_0^\infty A_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}(\tfrac{1}{2}\xi)^n$; und, da diese eine Potenzreihe ist, so bleibt das allgemeine Glied derselben nicht unterhalb einer endlichen Grenze. Das Verhältniss dieses Gliedes zu dem entsprechenden der Reihe

$$\sum_0^\infty A_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}(\tfrac{1}{2}\xi)^n F\left(\tfrac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right)$$

convergirt gegen $(1-\xi^{-2})^{-\frac{1}{2}}$; also wird auch das allgemeine Glied der letzteren nicht unendlich klein.

Ist ferner $R \gtreqless 1$, so divergirt aus demselben Grunde die vorliegende Reihe für die Werthe von $\xi$ ausserhalb des Kreises mit dem Radius 1.

Betrachtet man jetzt die Reihe als Function von $x$, so hat man den zu $\xi$ gehörenden Ort von $x$ zu bestimmen.

Es ist

$$x = \frac{\xi+\xi^{-1}}{2}, \qquad \xi = x+\sqrt{x^2-1}.$$

Wird $\xi = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$ gesetzt, so erhält man:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)\cos\theta + i\,\tfrac{1}{2}\left(\varrho-\frac{1}{\varrho}\right)\sin\theta.$$

Durchläuft also $\xi$ den Kreis mit dem Radius $\varrho$ in positiver Richtung, so durch-

läuft $x$ die Ellipse mit den Halbaxen $\frac{1}{2}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)$ und $\frac{1}{2}\left(\varrho-\frac{1}{\varrho}\right)$, also mit den Brennpunkten $x=\pm 1$; und zwar in positiver oder negativer Richtung, je nachdem $\varrho>1$ oder $<1$. Diese Ellipse wächst im ersten Falle mit wachsendem $\varrho$, im zweiten mit abnehmendem $\varrho$.

Hieraus ergiebt sich nun für die Reihe

$$\sum_0^\infty A_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}(\tfrac{1}{2}\xi)^n F\left(\tfrac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right),$$

als Function von $x$ betrachtet, Folgendes:

$R>1$. Diese Reihe und die durch Differentiation nach $x$ von ihr abgeleiteten convergiren in dem Ringe zwischen der Strecke $x=-1\cdots+1$ und der Ellipse mit den Brennpunkten $x=\pm 1$ und der grossen Halbaxe $\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)$ unbedingt.

Ferner sieht man aber aus der Formel

$$P^{(n)}x = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}(\tfrac{1}{2}\xi)^n F\left(\tfrac{1}{2}, -n, -\frac{2n-1}{2}, \xi^{-2}\right),$$

in welcher die Coefficienten positiv sind, dass auf einer Ellipse mit den Brennpunkten $x=\pm 1$ der Werth von $P^{(n)}x$ auf der positiven Seite der Abscissenaxe positiv und gleich oder grösser ist, als der Modul von $P^{(n)}x$ für irgend einen anderen Punkt derselben Ellipse, und dass dieser Werth von $x=1$ an mit wachsendem $x$ wächst. Dasselbe gilt nach der Formel von Herrn *Christoffel:*

$$\frac{d}{dx}P^{(n)}x = (2n-1)P^{(n-1)}x+(2n-5)P^{(n-3)}x+(2n-9)P^{(n-5)}x+\cdots$$

von sämmtlichen Ableitungen von $P^{(n)}x$.

Daher convergirt die obige Reihe mit ihren abgeleiteten überall innerhalb der angegebenen Ellipse unbedingt und zwar jede einzelne Reihe in diesem Bereiche in gleichem Grade. Unter Wiederholung der in §. 4 der vorigen Abhandlung gemachten Bemerkungen sieht man daher, dass die abgeleiteten Reihen die Ableitungen der durch die ursprüngliche Reihe bestimmten stetigen Function sind. Dagegen divergirt die vorliegende Reihe ausserhalb der angegebenen Ellipse.

$R\gtreqless 1$. Die Reihe divergirt ausserhalb der Ellipse mit den Brennpunkten $x=\pm 1$ und der grossen Halbaxe 1 überall.

Nimmt man nun die Begrenzung der Convergenzellipse aus, so kann man die Resultate in *folgenden Satz* zusammenfassen:

Bezeichnet $R$ den Radius des Convergenzkreises der Potenzreihe

$$\sum_0^\infty A_n x^n,$$

so hat die Reihe

$$\sum_0^\infty A_n P^{(n)} x$$

zur Convergenzgrenze die Ellipse mit den Brennpunkten $x = \pm 1$ und der grossen Halbaxe $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right), & \text{wenn } R > 1, \\ \frac{1}{2}(1+1), & \text{wenn } R \gtreqless 1 \text{ ist.} \end{cases}$

Ausserhalb dieser Ellipse divergirt die Reihe.

Innerhalb derselben convergirt sie mit den durch Differentiation der Glieder aus ihr abgeleiteten unbedingt, und zwar jede einzelne dieser Reihen in dem ganzen Bereiche in gleichem Grade. Die abgeleiteten Reihen sind die Ableitungen der durch die ursprüngliche Reihe bestimmten stetigen Function.

Auf gleiche Weise leitet man für die Reihe $\sum_0^\infty B_n Q^{(n)} x$ den *entsprechenden Satz* ab:

Bezeichnet $R_1$ den Radius des Convergenzkreises der Potenzreihe

$$\sum_0^\infty B_n x^n,$$

so hat die Reihe

$$\sum_0^\infty B_n Q^{(n)} x$$

zur Convergenzgrenze die Ellipse mit den Brennpunkten $x = \pm 1$ und der grossen Halbaxe $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(R_1+\frac{1}{R_1}\right), & \text{wenn } R_1 \leqq 1, \\ \frac{1}{2}(1+1), & \text{wenn } R_1 > 1 \text{ ist.} \end{cases}$

In dem Ringe zwischen dieser Ellipse und der Strecke $x = -1 \cdots +1$ divergirt die Reihe.

Ausserhalb der Ellipse convergirt sie mit den durch Differentiation von ihr abgeleiteten unbedingt und jede einzelne in gleichem Grade. Die abgeleiteten Reihen sind die Ableitungen der durch die ursprüngliche ausgedrückten stetigen Function.

## §. 2.

Die hier zur Untersuchung von Reihen angewandte Methode, welche sich auf die Betrachtung des Grenzwerthes des allgemeinen Gliedes stützt, gestattet auch einen einfachen Beweis der *Heine*schen Reihe

$$\frac{1}{v-u} = \sum_0^\infty (2n+1) Q^{(n)} v P^{(n)} u.$$

In die Formel

$$\frac{1}{v-u} = \sum_0^\infty v^{-n-1} u^n$$

setze man den *Legendre*schen Ausdruck für $u^n$:

$$u^n =$$

$$\frac{1.2.3...n}{1.3.5...(2n+1)}\left\{(2n+1)P^{(n)}u+(2n-3)\frac{2n+1}{2}P^{(n-2)}u+(2n-7)\frac{(2n+1)(2n-1)}{2.4}P^{(n-4)}u+...\right\}.$$

Da $P^{(n)}u \leqq P^{(n)}1$, für $u=-1\cdots+1$, und $P^{(n)}1=1$ und daher

$$1 \geqq \frac{1.2.3...n}{1.3.5...(2n+1)}\left\{(2n+1)\,\text{Mod.}\,P^{(n)}u+(2n-3)\frac{2n+1}{2}\,\text{Mod.}\,P^{(n-2)}u+\cdots\right\}$$

ist, für $u=-1\cdots+1$, so darf man die Reihe $\sum_0^\infty v^{-n-1}u^n$ nach $P$ ordnen, wenn $u$ und $v$ die Bedingung $\begin{cases} u=-1\cdots+1 \\ \text{Mod.}\,v>1 \end{cases}$ erfüllen.

Der Coefficient von $P^{(n)}u$ ist

$$\frac{1.2.3...n}{1.3.5...(2n-1)}v^{-n-1}F\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+2}{2},\frac{2n+3}{2},v^{-2}\right) = (2n+1)Q^{(n)}v.$$

Daher ist die Gleichung

$$\frac{1}{v-u} = \sum_0^\infty (2n+1)\,Q^{(n)}v\,P^{(n)}u,$$

die Herr *Heine* durch eben diese Entwickelung zuerst erhalten hat, bewiesen für $\begin{cases} u=-1\cdots+1 \\ \text{Mod.}\,v>1. \end{cases}$ Transformirt man nun diese Reihe durch die Substitutionen:

$$u=\frac{\eta+\eta^{-1}}{2}, \quad v=\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2},$$

so erhält man

$$\sum_0^\infty (\tfrac{1}{2}\zeta)^{-n-1}(\tfrac{1}{2}\eta)^n F\left(\tfrac{1}{2},n+1,\frac{2n+3}{2},\zeta^{-2}\right)F\left(\tfrac{1}{2},-n,-\frac{2n-1}{2},\eta^{-2}\right).$$

Indem man jetzt, wie in §. 1 weiter verfährt, findet man, dass die vorliegende Reihe, als Function von $u$ und $v$ betrachtet und die durch Differentiation nach $u$ und $v$ aus ihr abgeleiteten unbedingt und einzeln in gleichem Grade convergiren, während $u$ in dem Systeme confocaler Ellipsen mit den Brennpunkten $x=\pm 1$ auf einer kleineren, als $v$ liegt, dass dagegen, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, die vorliegende Reihe divergirt.

Die Reihe $\sum_0^\infty (2n+1)\,Q^{(n)}v\,P^{(n)}u$ stellt demnach, so lange $u$ innerhalb einer der bezeichneten Ellipsen, $v$ ausserhalb derselben liegt, eine eindeutige und stetige Function der beiden complexen Argumente $u$ und $v$ dar, deren Identität mit der Function $\frac{1}{v-u}$ für $\begin{cases} u=-1\cdots+1 \\ \text{Mod.}\,v>1 \end{cases}$ bereits nachgewiesen worden ist. Diese Identität gilt also in dem ganzen Convergenzgebiete der Reihe.

# Ueber die Erzeugung der Curven dritter Klasse und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes.

(Von Herrn *Siebeck* in Liegnitz.)

Lässt man die Punkte zweier sich in wenigstens zwei reellen Punkten schneidender Kegelschnitte einander so entsprechen, dass je zwei entsprechende Punkte mit einem der Durchschnittspunkte $P$ der Kegelschnitte in gerader Linie liegen, so erhält man eine besondere Art projectivischer Punktreihen, welche man perspectivisch nennen könnte, und welche das Eigenthümliche haben, dass wenn man in je zwei einander entsprechenden Punkten Tangenten legt, die von den Durchschnittspunkten der letzteren gebildete Curve zwar von der vierten Ordnung nicht aber von der sechsten Klasse ist, wie es bei der allgemeinen Annahme projectivischer Punktreihen der Fall sein müsste, (vergleiche die Abhandlung des Herrn *Schröter* im 54sten Bande dieses Journals) sondern nur von der dritten Klasse. Der Umstand, dass auf diese Weise die Curven dritter Klasse — vorläufig allerdings nur diejenigen, welche eine Doppeltangente besitzen — unmittelbar durch Bewegung eines Punktes erzeugt werden, gab mir Veranlassung, die aus dieser Erzeugungsweise entspringenden Eigenschaften dieser Curven aufzusuchen. Die Beziehung in welcher diese Betrachtungen zu den Arbeiten von *Steiner* und *Cremona* über eine besondere Curve dieser Art stehen, insbesondere die Ableitung der *Hesse*schen Curve, habe ich nicht weiter erörtert, da sie der kundige Leser selbst leicht findet. Ebenso habe ich diejenigen Erörterungen unterlassen, welche den vorstehenden nach den Polaritätsgesetzen complementär gegenüberstehen.

## 1.

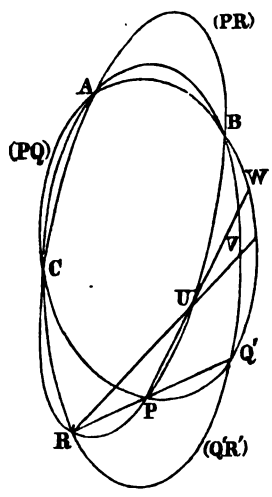
Sind in einer Ebene drei projectivische Strahlbüschel gegeben, deren Centra $P$, $Q$, $R$ in gerader Linie liegen, und bilden $p$, $q$, $r$ eine Gruppe entsprechender Strahlen dieser Büschel, so werden sich die Ecken des von letzteren gebildeten Dreiecks $LMN$, wenn die Strahlen ihre Richtung ändern, auf drei Kegelschnitten $(PQ)$, $(QR)$ und $(PR)$ bewegen, von denen jeder

durch zwei der Centra geht, und die sich ausserdem in denselben drei Punkten $A$, $B$, $C$ schneiden; denn liegt z. B. der Punkt $A$ zugleich in $(PQ)$ und $(QR)$, so liegt er gleichzeitig in allen drei Strahlen der bezüglichen Strahlengruppe, folglich auch in $(PR)$. Seien nun $p$, $q$, $r$ und $p'$, $q'$, $r'$ zwei beliebige Strahlengruppen, von welchen die Dreiecke $LMN$ und $L'M'N'$ gebildet werden, so werden, da je zwei entsprechende Seiten der letzteren sich in drei in gerader Linie liegenden Punkten $P$, $Q$, $R$ schneiden, die Verbindungslinien entsprechender Ecken nach einem bekannten Satze in einem Punkte $X$ zusammenkommen, und dies wird auch dann der Fall sein, wenn die Dreiecke $LMN$ und $L'M'N'$ einander unendlich nahe liegen und somit die Linien $LX$, $MX$, $NX$ Tangenten der Kegelschnitte werden. Der Punkt $X$ aber wird, wenn die Strahlen $p$, $q$, $r$ sich um ihre Centra das zwischen ihnen festgestellte Gesetz der Projectivität befolgend drehen, eine Curve $C$ beschreiben, deren Natur und Eigenschaften zu untersuchen unsere Aufgabe ist. Man ersieht sogleich, dass diese Curve durch die Punkte $P$, $Q$, $R$, $A$, $B$, $C$ vollkommen gegeben ist, da jeder der drei Kegelschnitte durch fünf dieser Punkte geht, also völlig bestimmt ist. Das Dreieck $ABC$ wollen wir das Fundamentaldreieck, und die drei in gerader Linie liegenden Punkte $P$, $Q$, $R$ eine Involutionsgruppe der Curve $C$ nennen. Wir werden nämlich bald beweisen, dass unter Beibehaltung des Fundamentaldreiecks die Curve $C$ aus unendlich vielen solcher Gruppen erzeugt werden kann; dass insbesondere jede gerade Linie in der Ebene unendlich viele solcher Gruppen enthält, welche eine Involution dritter Ordnung bilden.

Zunächst leuchtet ein, dass wenn es sich eben nur um die Erzeugung der Curve handelt, eine der drei Ecken des Dreiecks $LMN$ nicht nöthig ist. Die Curve wird im Einklange mit der im Eingange dargelegten Anschauungsweise in der That schon erzeugt, wenn man um einen der Durchschnittspunkte $P$, zweier sich in $A$, $B$, $C$, $P$ schneidender Kegelschnitte $(PQ)$ und $(PR)$ eine Gerade sich drehen lässt, und in den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit den Kegelschnitten Tangenten an letztere legt, welche sich in $X$ schneiden. Daher ist auch nicht einmal die Lage der Punkte $Q$ und $R$ auf diesen beiden Kegelschnitten eine bestimmte, sondern nur an die Bedingung gebunden, dass sie mit $P$ in gerader Linie liegen. Somit bildet jede durch $P$ gehende Gerade in ihren drei Durchschnittspunkten $P$, $Q'$, $R'$ mit $(PQ)$ und $(PR)$ eine Involutionsgruppe der Curve $C$; ebenso natürlich jede durch $Q$ gehende Gerade in ihren drei Durchschnittspunkten mit $(PQ)$ und $(QR)$, und jede durch $R$ gehende

Gerade in ihren Durchschnittspunkten mit $(PR)$ und $(QR)$. Wir haben somit schon drei Schaaren von Involutionsgruppen der Curve $C$ nachgewiesen, welche aber alle noch der Beschränkung unterworfen sind, dass in jeder Gruppe einer der drei Punkte $P$, $Q$, $R$ von denen wir ausgegangen sind, vorkommen muss. Von dieser Beschränkung werden wir uns frei machen.

Betrachten wir zu dem Ende diejenige Kegelschnittschaar $\mathfrak{S}$, welche entsteht, wenn man durch den Punkt $P$ unendlich viele Gerade zieht, welche die beiden durch $P$ gehenden ursprünglichen Kegelschnitte $(PQ)$ und $(PR)$ in $Q'$ und $R'$, $Q''$ und $R''$, etc. schneiden, und dann durch $Q'R'$ einen dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kegelschnitt $(Q'R')$ legt, ebenso durch $Q''$ und $R''$ den dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kegelschnitt $(Q''R'')$ etc. Zu dieser Schaar gehören offenbar die Kegelschnitte $(PQ)$ und $(PR)$ selbst, indem sie denjenigen Richtungen der sich um $P$ drehenden Geraden entsprechen, in welchen dieselbe resp. $(PR)$ und $(PQ)$ berührt. Sodann aber lässt sich beweisen, dass wenn man zwei beliebige Kegelschnitte $(Q'R')$ und $(Q''R'')$ aus der Schaar herausnimmt und aus ihnen unter Beibehaltung des Fundamentaldreiecks in derselben Weise eine neue Schaar $\mathfrak{S}''$ bildet, wie wir sie vorher aus $(PQ)$ und $(PR)$ gebildet haben, diese neue Schaar mit der Schaar $\mathfrak{S}$ identisch ist. Denn um zunächst eine vermittelnde Schaar $\mathfrak{S}'$ aus $(PR)$ und $(Q'R')$ zu bilden, legen wir durch den Durchschnittspunkt $R'$ von $(PR)$ und $(Q'R')$ eine beliebige Gerade, welche $(PR)$ zum zweiten Male in $U$, $(Q'R')$ zum zweiten Male in $V$ treffen mag; legen wir dann durch $U$ und $V$ einen dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kegelschnitt $(UV)$, so gehört derselbe zu der Schaar $\mathfrak{S}'$, und es ist zu beweisen, dass er auch zur Schaar $\mathfrak{S}$ gehört. Das letztere wird aber der Fall sein, wenn $(UV)$ auch durch denjenigen Punkt geht, in welchem $(PQ)$ zum zweiten Male von der Geraden $PU$ geschnitten wird; was auf folgende Art bewiesen wird.




Es liegen die sechs Punkte $R'$, $V$, $Q'$, $A$, $B$, $C$ in einem Kegelschnitt $(Q'R')$, und es muss insofern bei Anwendung einer bekannten Bezeichnungsweise

$$(1.)\quad R'(ABCQ')\overline{\wedge}\,V(ABCQ'),$$

$$(2.)\quad R'(ABCV)\overline{\wedge}\,Q'(ABCV)$$

sein. Ebenso muss aber auch, da die sechs Punkte $R'$, $U$, $P$, $A$, $B$, $C$ in

einem Kegelschnitte $(PR)$ liegen,

$$(3.) \quad R'(ABCP) \overline{\wedge} U(ABCP),$$

$$(4.) \quad R'(ABCU) \overline{\wedge} P(ABCU)$$

sein. Es folgt aber einerseits aus (1.) und (3.), da die Strahlen $R'Q'$ und $R'P$ identisch sind,

$$(5.) \quad V(ABCQ') \overline{\wedge} U(ABCP),$$

woraus hervorgeht, dass der Durchschnittspunkt $W$ von $VQ'$ und $UP$ auf dem Kegelschnitt $(UV)$ liegt. Andererseits folgt aus (2.) und (4.), da die Strahlen $R'U$ und $R'V$ identisch sind,

$$(6.) \quad Q'(ABCV) \overline{\wedge} P(ABCU),$$

woraus hervorgeht, dass $W$ auf dem Kegelschnitt $(PQ)$ liegt. Folglich treffen sich die Kegelschnitte $(UV)$ und $(PQ)$ und die Gerade $PU$ wirklich in einem und demselben Punkte $W$, und wir haben somit bewiesen, dass die aus $(PQ)$ und $(PR)$ gebildete Schaar $\mathfrak{S}$ mit der aus $(PR)$ und $(Q'R')$ gebildeten Schaar $\mathfrak{S}'$ zusammenfällt.

Durch ein analoges Räsonnement wird aber gezeigt, dass die aus $(PR)$ und $(QR')$ gebildete Schaar $\mathfrak{S}'$ mit der aus $(Q'R')$ und $(Q''R'')$ gebildeten Schaar $\mathfrak{S}''$ identisch ist. Folglich ist auch $\mathfrak{S}''$ mit $\mathfrak{S}$ identisch und demnach der vorhin aufgestellte Satz allgemein bewiesen.

Man kann somit jeden der Schaar $\mathfrak{S}$ angehörigen Kegelschnitt aus zwei beliebigen Kegelschnitten der Schaar in derselben Weise erhalten, wie wir oben die Kegelschnitte $(Q'R')$, $(Q''R'')$ etc. aus $(PQ)$ und $(PR)$ erhalten haben. Hieraus folgt aber sofort, dass alle Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ in gleicher Beziehung zur Curve $C$ stehen und in derselben Weise zur Erzeugung derselben dienen können, wie die ursprünglichen Kegelschnitte. Dieses Hauptgesetz wird durch folgenden Satz ausgedrückt:

*Die drei vierten Durchschnittspunkte irgend dreier Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ liegen immer in gerader Linie und bilden eine Involutionsgruppe der Curve C. Die Curve C aber kann auf unendlich verschiedenartige Weise erzeugt werden, indem man zwei beliebige Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ auswählt und um ihren vierten Durchschnittspunkt eine Gerade sich drehen lässt; legt man dann in den Durchschnittspunkten der letzteren mit den zwei Kegelschnitten Tangenten, so wird der Durchschnittspunkt dieser Tangenten immer dieselbe Curve C beschreiben.*

Durch jeden Punkt der Ebene mit Ausnahme der Punkte $A$, $B$, $C$

gehen offenbar nur zwei Kegelschnitte der Schaar. Denn ginge beispielsweise durch den Punkt $P$ ausser $(PQ)$ und $(PR)$ noch ein dritter Kegelschnitt $(Q'R')$, so würden die drei in gerader Linie liegenden Punkte $P'$, $Q'$, $R'$ zugleich auf diesem dem Dreieck $ABC$ umschriebenen Kegelschnitt liegen, was nicht möglich ist. Hieraus ist aber leicht zu ersehen, dass jede Gerade in der Ebene unendlich viele Involutionsgruppen der Curve $C$ enthält. Sei nämlich $P'$ ein beliebiger Punkt einer beliebigen Geraden $L$, so werden die beiden durch ihn gehenden und vollkommen bestimmten Kegelschnitte diese Gerade noch in zwei Punkten $Q'$ und $R'$ schneiden, durch welche noch ein dritter Kegelschnitt der Schaar geht. Die Punkte $P'$, $Q'$, $R'$ werden somit eine Involutionsgruppe von $C$ bilden, und es kann überhaupt jeder Punkt von $L$ als zu einer solchen Gruppe gehörend betrachtet werden, und die beiden anderen Punkte der Gruppe sind dann durch ihn mit bestimmt. Da ferner aus jedem einzelnen Punkte einer solchen Gruppe die beiden anderen in gleicher Weise gefunden werden, so müssen sie auf der Geraden eine Involution der dritten Ordnung bilden. Auch leuchtet ein, dass, wenn das Fundamentaldreieck gegeben ist, durch drei beliebige in gerader Linie liegende Punkte $P$, $Q$, $R$, welche eine Gruppe bilden, alle anderen in der Ebene befindlichen Gruppen mit bestimmt sind.

Betrachten wir nun zwei einander unendlich nahe liegende Kegelschnitte $(PQ)$ und $(PR)$ der Schaar $\mathfrak{S}$, welche von einem beliebigen dritten $(QR)$ in $Q$ und $R$ geschnitten werden, so werden auch die Punkte $Q$ und $R$ einander sehr nahe liegen und somit die gerade Linie $PQR$ den Kegelschnitt $(QR)$ berühren. Zugleich aber ist $P$ als Durchschnittspunkt zweier einander unendlich naher Kegelschnitte ein Punkt der Enveloppe der Schaar $\mathfrak{S}$. Wir erhalten somit den Satz:

> *Irgend ein Kegelschnitt der Schaar $\mathfrak{S}$ wird von sämmtlichen übrigen Kegelschnitten der Schaar in dem jedesmaligen vierten Durchschnittspunkte so geschnitten, dass die Tangenten, welche man in demselben an die letzteren legen kann, in einem Punkte zusammentreffen und dieser Punkt ist zugleich derjenige, in welchem der erstere Kegelschnitt die Enveloppe der Schaar berührt.*

Wir wollen diesen Punkt den Hauptpunkt des betreffenden Kegelschnittes nennen. Ferner:

> *Fallen zwei Punkte einer Involutionsgruppe zusammen, so liegt der dritte Punkt auf der Enveloppe der Schaar.*

Nimmt man endlich auch den dritten beliebig angenommenen Kegelschnitt $(QR)$ dem $(PQ)$ nnd $(PR)$ sehr nahe an, so fallen die Punkte $Q$ und $R$ mit $P$ zusammen und man hat den Satz:

*Die Enveloppe der Schaar* $\mathfrak{S}$ *ist der Ort aller Punkte der Ebene, in welchen je drei Punkte einer Involutionsgruppe vereinigt sind.*

Da endlich, wenn wieder $(PQ)$ und $(PR)$ zwei beliebige Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ sind, der die Curve $C$ beschreibende Punkt $X$ der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten ist, welche sich in den Durchschnittspunkten $L$ und $M$ einer sich um $P$ drehenden Geraden mit den Kegelschnitten $(PQ)$ und $(PR)$ an diese Kegelschnitte legen lassen, so muss der Punkt $X$ der Hauptpunkt des Kegelschnitts $(LM)$ sein.

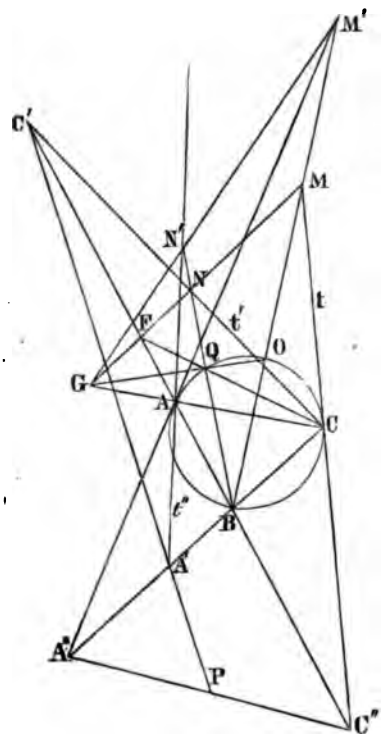
*Somit ist die Enveloppe der Schaar* $\mathfrak{S}$ *mit der Curve C identisch.*

Und da sich in jeder Geraden $L$ der Ebene vier Involutionsgruppen von der Beschaffenheit befinden müssen, dass zwei Punkte einer solchen Gruppe zusammenfallen, so *ist die Curve C von der vierten Ordnung.*

Zu gleicher Zeit geht aber aus vorstehender Betrachtung eine neue Erzeugungsweise der Schaar $\mathfrak{S}$ hervor. Ist nämlich *ein* Kegelschnitt der Schaar und mit ihm zugleich sein Hauptpunkt gegeben, so ist dies gleichbedeutend damit, dass zwei (unendlich nahe) Kegelschnitte von $\mathfrak{S}$ gegeben sind also die Schaar vollkommen bestimmt. Da nun alle Kegelschnitte der Schaar in gleicher Weise sich verhalten, so erhalten wir den Satz: Ist ein System einem festen Dreieck umschriebener Kegelschnitte so beschaffen, dass einer derselben von allen übrigen in dem jedesmaligen vierten Durchschnittspunkt so geschnitten wird, dass die Tangenten, welche man an jeden derselben in dem resp. Durchschnittspunkte legen kann, in einem und demselben Punkte des ersten Kegelschnitts zusammentreffen, so wird auch jeder andere Kegelschnitt des Systems von den übrigen in derselben Weise geschnitten.

## 2.

Wir haben eben gesehen, dass die Schaar $\mathfrak{S}$ völlig bestimmt ist, wenn ausser dem Fundamentaldreieck *ein* Kegelschnitt der Schaar und ausserdem sein Hauptpunkt gegeben ist. Sei daher $K$ ein solcher Kegelschnitt und $O$ sein Hauptpunkt, sei ferner $Q$ ein beliebiger Punkt von $K$, so wird durch $Q$ noch ein zweiter Kegelschnitt $K'$ der Schaar $\mathfrak{S}$ gehen, und zwar wird er $OQ$ in $Q$ berühren. Bezeichnen wir nun die Tangenten an $K$ und $K'$ im




Punkte $C$ durch $t$ und $t'$, so kann man $t'$ und $BQ$, $CA$ und $OQ$, $AB$ und $CQ$ als drei Paar gegenüberstehende Seiten eines dem $K'$ einbeschriebenen Sechsecks betrachten und es müssen nach dem *Pascal*schen Satze die Durchschnittspunkte dieser Paare, die wir resp. durch $N$, $G$, $F$ bezeichnen wollen, in gerader Linie liegen. Aus demselben Grunde müssen aber auch die drei Durchschnittspunkte der Linienpaare $t$ und $BO$, $CA$ und $OQ$, $AB$ und $CQ$, also die Punkte $M$, $G$, $F$ (wenn $M$ der Durchschnittspunkt von $t$ und $BO$ ist) in gerader Linie liegen. Folglich liegen die vier Punkte $G$, $F$, $N$, $M$ in gerader Linie und man kann $t'$ einfach dadurch construiren, dass man $G$, den Durchschnittspunkt von $OQ$ und $AC$, mit $M$ verbindet; ist dann $N$ der Durchschnittspunkt von $GM$ und $BQ$, so ist $CN$ die gesuchte Tangente $t'$. Ebenso findet man die Tangente $t''$ von $K'$ in $A$. Ist nämlich $M'$ der Durchschnittspunkt der Tangente von $K$ in $A$ und von $BO$, so ziehe man die Gerade $GM'$, welche von $BQ$ in $N'$ geschnitten wird; dann ist $AN'$ die Tangente $t''$. Es lässt sich aber nun leicht zeigen, dass, wenn man ($O$ selbstverständlich als fest betrachtet) $Q$ sich auf $K$ bewegen lässt, so dass man also allmählich alle Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ erhält, die von den Tangenten $t'$ und $t''$ gebildeten Strahlbüschel projectivisch sind. Es sind nämlich alsdaun auch die Punkte $M$ und $M'$ als fest zu betrachten, und es sind die Strahlbüschel $OQ$ und $BQ$, da $Q$ sich in einem durch $O$ und $B$ gehenden Kegelschnitt bewegt, projectivisch; ebenso sind, da $G$ sich auf der Geraden $CA$ bewegt, die Strahlbüschel $OQ$ und $MG$ projectivisch; folglich sind auch die Strahlbüschel $BQ$ und $MG$ projectivisch, d. h. der Punkt $N$ bewegt sich in einem Kegelschnitt, und zwar geht der letztere auch durch $C$, da $N$ und $Q$ zugleich nach $B$ gelangen. Somit ist auch der Strahlbüschel $CN$ mit dem Strahlbüschel $MN$ projectivisch, und da, wie schon erwähnt, der Strahlbüschel $MN$ (oder $MG$) zu $OQ$ projectivisch ist, so ist auch der Strahlbüschel $CN$ dem Strahlbüschel $OQ$ projectivisch. Da man nun ebenso beweisen kann, dass auch der Strahlbüschel $AN'$ dem Strahlbüschel $OQ$ projectivisch ist, so müssen auch die

Strahlbüschel $CN$ und $AN'$ projectivisch sein. Wir haben somit bewiesen, dass die Tangenten der Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ in den festen Punkten $A$, $B$, $C$ projectivische Strahlbüschel bilden. Bezeichnen wir nun den Durchschnittspunkt von $AN'$ und $BC$ durch $A'$, und den von $CN$ und $AB$ durch $C'$, so werden auch die Punktreihen $A'$ und $C'$ projectivisch sein. Gelangt aber $Q$ nach $B$, so fallen die Punkte $A'$ und $C'$, wie man sogleich sieht, ebenfalls in $B$ zusammen. Somit sind die Punktreihen $A'$ und $C'$ *perspectivisch*, und da bekanntlich die drei Tangenten, welche man an einen, einem Dreieck umschriebenen Kegelschnitt in den Ecken des Dreiecks legen kann, die gegenüberstehenden Seiten immer in drei in gerader Linie liegenden Punkten treffen, so haben wir jetzt folgenden Satz bewiesen:

*Legt man an jeden der Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ in den Ecken des Fundamentaldreiecks Tangenten, welche die gegenüberstehenden Seiten des Dreiecks immer in drei in gerader Linie $L$ liegenden Punkten schneiden, so gehen alle diese Linien $L$ durch einen festen Punkt.*

Wir wollen diesen festen Punkt ein für allemal durch $P$ bezeichnen und werden zeigen, dass die Curve $C$ drei Rückkehrtangenten hat und dass $P$ der gemeinsame Durchschnittspunkt der letzteren ist. Unter den Kegelschnitten der Schaar $\mathfrak{S}$ befinden sich nämlich drei, von denen jeder aus einem System von zwei Geraden besteht; diejenigen nämlich, welche man erhält, wenn man den Punkt $Q$ in die Ecken des Fundamentaldreicks verlegt. Jeder dieser Kegelschnitte besteht aus zwei Seiten dieses Dreiecks, und wir wollen daher den aus den Geraden $AB$ und $AC$ bestehenden Kegelschnitt durch $A$, ebenso die beiden anderen entsprechend durch $B$ und $C$ bezeichnen. Die Tangenten des Kegelschnitts $A$ gehen sämmtlich durch den Punkt $A$, aber nur eine von ihnen kann zugleich als Tangente der Enveloppe von $\mathfrak{S}$, nämlich als Tangente im Hauptpunkte $A$ des Kegelschnitts $A$ betrachtet werden. Diese aber ist keine andere als die Verbindungslinie des Punktes $A$ mit dem festen Punkte $P$; denn die durch $P$ gehende Gerade, welche wir in dem zuletzt bewiesenen Satze mit $L$ bezeichnet haben, fällt bezüglich des Kegelschnitts $A$ offenbar mit $AP$ zusammen. Sind dann $K'$ und $K''$ die dem Kegelschnitt $A$ unendlich nahen Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ (von denen wir den einen als dem $A$ vorhergehend, den anderen als nachfolgend betrachten können), so treffen dieselben den Kegelschnitt $A$ in zwei dem Punkt $A$ unendlich nahen Punkten $R$ und $T$, und es müssen dann nach einem eben bewiesenen Satze die Tangenten, welche man in $R$ und $T$ an $K'$ und $K''$ legen kann, durch

den Hauptpunkt $A$ des Kegelschnitts $A$ gehen. Da aber offenbar $R$ und $T$ auch als Hauptpunkte von $K'$ und $K''$ betrachtet werden können, so gehen in dem vorliegenden Falle drei auf einander folgende Tangenten der Enveloppe von $\mathfrak{S}$ durch den Punkt $A$; somit ist $A$ ein Rückkehrpunkt der Enveloppe und $AP$ eine Rückkehrtangente. Dasselbe gilt von $B$ und $C$. Wir erhalten somit den Satz:

*Die Curve C hat drei Rückkehrpunkte, welche in die Ecken des Fundamentaldreiecks fallen, und die drei Rückkehrtangenten schneiden sich in dem Punkte P.*

Da endlich jeder Rückkehrpunkt die Klassenzahl einer Curve um drei Einheiten vermindert, so haben wir zugleich bewiesen, *dass die Curve C von der dritten Klasse ist.* Sie heisse daher fortan $C_3$.

Wenn in der Ebene eines Dreiecks $ABC$ ein Punkt $\Pi$ und eine Gerade $\pi$ eine solche gegenseitige Lage haben, dass, wenn $\pi$ die Seite $BC$ in $A'$, $AC$ in $B'$, $AB$ in $C'$ schneidet, die Geraden $A\Pi$ und $AA'$ harmonisch sind zu den Dreiecksseiten $AB$ und $AC$ und ein analoger Sachverhalt bezüglich der übrigen Ecken stattfindet, so nennt man bekanntlich $\Pi$ und $\pi$ Pol und Polare in Bezug auf das Dreieck; und zwar ist diese Bezeichnung zutreffend, sowohl wenn man das von den drei Seiten des Dreiecks gebildete System von Geraden als Curve dritter Ordnung, als auch wenn man das von den Ecken des Dreiecks gebildete Punktsystem als Curve dritter Klasse ansieht. Ist in dem Dreieck nur eine Ecke und die ihr gegenüberstehende Seite reell, während die beiden anderen Ecken durch ein in dieser Seite angenommenes Involutionssystem mit zwei imaginären Doppelpunkten gegeben sind, so hat gleichwohl jeder reelle Pol eine reelle Polare; es reicht aber die eben gegebene Definition alsdann nicht mehr zur Construction aus. Diese Schwierigkeit hebt sich aber sogleich, wenn man bedenkt, dass für den Fall eines reellen Dreiecks, wenn wir die Durchschnittspunkte von $A\Pi$ mit $\pi$ und $BC$ respective durch $\Pi'$ und $A''$ bezeichnen, immer das Schnittverhältniss $\frac{A\Pi}{A''\Pi}$ einen doppelt so grossen absoluten Werth haben muss, als das Schnittverhältniss $\frac{A\Pi'}{A''\Pi'}$ (was leicht bewiesen werden kann). Dieses Gesetz muss aber auch dann noch stattfinden, wenn das Dreieck $ABC$ imaginär ist.

Ist daher $A$ die reelle Ecke des Fundamentaldreiecks und $a$ die ihr gegenüberstehende reelle Seite, so findet man zu einem gebenen Pol $\Pi$ die Polare, indem man $A\Pi$ bis zu dem der soeben angegebenen Bedingung ent-

sprechenden Punkte $\Pi'$ verlängert und ausserdem auf $a$ den dem $A''$ in dem gegebenen Involutionssystem entsprechenden Punkt $A'$ aufsucht; alsdann ist $A'\Pi'$ die gesuchte Polare. Der Ort der Pole aller Geraden, welche durch einen festen Punkt $P$ gehen, ist ein dem Dreieck umschriebener Kegelschnitt, welcher die conische Polare von $P$ in Bezug auf das Dreieck ist, letzteres als Curve dritter Ordnung betrachtet; auch ist dieser Kegelschnitt leicht zu construiren, da er die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$ zu Tangenten hat. Andererseits ist die Enveloppe der Polaren aller Punkte einer festen Geraden $p$ ein dem Dreieck einbeschriebener Kegelschnitt, welcher die conische Polare von $p$ in Bezug auf das Dreieck ist, letzteres als Curve dritter Klasse betrachtet. Sind $p$ und $P$ Pol und Polare in Bezug auf das Dreieck, so findet zwischen dem einbeschriebenen und dem umschriebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung Statt, und zwar sind die beiden Berührungspunkte imaginär, wenn alle drei Ecken des Dreiecks reell sind; dagegen sind sie reell, wenn das Dreieck nur eine reelle Ecke hat. Die Berührungssehne aber ist identisch mit der Geraden $p$, und der Durchschnittspunkt der beiden gemeinschaftlichen Tangenten identisch mit dem Punkte $P$.

Dieses vorausgeschickt, ersehen wir aus dem in Betreff der Schaar $\mathfrak{S}$ zuletzt bewiesenen Hauptsatze, dass die in Bezug auf das Fundamentaldreieck genommenen Pole der Kegelschnitte dieser Schaar von der Beschaffenheit sind, dass ihre geraden Polaren durch einen festen Punkt $P$ gehen, und dass sie somit selbst in demjenigen dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitt $\Theta$ liegen, welcher die conische Polare von $P$ ist. Und umgekehrt werden, wenn irgend ein Kegelschnitt $\Theta$ dem Dreieck umschrieben ist, die conischen Polaren der Punkte desselben in Bezug auf die Curve dritter Ordnung $ABC$, alle oben gezeigten Eigenschaften der Schaar $\mathfrak{S}$ besitzen. Zieht man sodann an $\Theta$ eine beliebige Tangente, so ist ihr Pol der Durchschnittspunkt zweier unendlich naher Kegelschnitte der Schaar, also ein Punkt der Enveloppe $C_3$.

*Die Curve $C_3$ ist somit der Ort der in Bezug auf das Fundamentaldreieck genommenen Pole der Tangenten eines diesem Dreieck umschriebenen Kegelschnitts.*

Von diesem Gesichtspunkte aus lässt sich auch leicht beweisen, dass sie vierter Ordnung und dritter Klasse ist. Eine beliebige Gerade $L$ nämlich wird die Curve $C_3$ so vielmal schneiden, als Punkte in der Geraden vorhanden sind, welche Tangenten von $\Theta$ zu Polaren haben. Die Enveloppe der Polaren aller Punkte von $L$ ist aber, wie oben erwähnt, ein dem Dreieck einbeschriebener

Kegelschnitt, und dieser hat mit $\Theta$ vier gemeinsame Tangenten; daher ist $C_3$ von der vierten Ordnung. Lässt man nun die Gerade $L$ sich um einen ihrer Punkte $O$ drehen, so erhält man eine Schaar dem Dreieck einbeschriebener Kegelschnitte, welche sämmtlich eine feste Gerade $o$, die Polare von $O$, berühren. So oft nun von den vier einem Kegelschnitt dieser Schaar mit dem $\Theta$ gemeinsamen Tangenten zwei zusammenfallen, so oft also ein Kegelschnitt dieser Schaar $\Theta$ berührt, ebenso oft wird die Gerade $L$ eine Tangente von $C_3$ sein. Da es aber immer sechs Kegelschnitte giebt, welche vier feste Gerade und zugleich einen gegebenen Kegelschnitt berühren, so lassen sich demnach sechs Tangenten von $O$ an $C_3$ ziehen. Unter diesen sechs Tangenten befinden sich aber immer drei, welche nach den festen Punkten $A$, $B$, $C$ gehen und folglich nicht mitzuzählen sind. Somit ist $C_3$ eine Curve dritter Klasse. Zugleich kann man nun auch die Lage der Doppeltangente bestimmen. Letztere muss offenbar in diejenige Linie fallen, für welche die Enveloppe der Polaren der einzelnen Punkte derjenige dem Dreieck $ABC$ einbeschriebene Kegelschnitt ist, welcher $\Theta$ doppelt berührt, also in die Polare $p$ des Durchschnittspunkts der Rückkehrtangenten $P$ in Bezug auf das Dreieck. Sie ist eine isolirte Tangente, wenn das Dreieck $ABC$ reell ist; dagegen sind beide Berührungspunkte reell, wenn das Dreieck nur *eine* reelle Ecke und *eine* reelle Seite hat. Die Berührungspunkte fallen nämlich offenbar in die Durchschnittspunkte der Doppeltangente mit dem Kegelschnitt $\Theta$. Hierdurch ist dann auch der letztere Kegelschnitt bezüglich seiner Lage zur Curve $C_3$ hinlänglich charakterisirt, und wir können die jetzt gewonnenen Resultate kurz so zusammenfassen:

> *Der durch die drei Rückkehrpunkte und die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente einer Curve dritter Klasse und vierter Ordnung $C_3$ gehende und somit völlig bestimmte Kegelschnitt ist der Ort der in Bezug auf das von den Rückkehrpunkten gebildete Dreieck genommenen Pole der Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$, die Curve $C_3$ selbst aber ist der Ort der Pole der Tangenten dieses Kegelschnitts.*

Zu gleicher Zeit stellt sich auch noch ein interessantes Gesetz bezüglich der Involutionsgruppen heraus. Sind nämlich $Q$, $R$, $T$ die vierten Durchschnittspunkte dreier Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ $(QR)$, $(QT)$, $(RT)$, und sind resp. $L, M, N$ die Pole dieser Kegelschnitte, welche also auf $\Theta$ liegen, so ist $NM$ die Polare von $Q$ in Bezug auf das Fundamentaldreieck, $LN$ die

Polare von $R$, $MN$ die Polare von $Q$. Da nun die beiden Dreiecke $ABC$ und $LMN$ einem und demselben Kegelschnitt $\Theta$ einbeschrieben sind, so sind sie nach einem bekannten Satze auch einem und demselben Kegelschnitt umschrieben, und zwar ist letzterer Kegelschnitt die Enveloppe der Polaren der Punkte der Geraden $QRT$. Lässt man nun das Dreieck $LMN$ sich so herumbewegen, dass es fortwährend dem $\Theta$ einbeschrieben und dem anderen Kegelschnitt umschrieben ist, so bewegen sich die Pole der Seiten desselben auf der Geraden und bilden hierbei die dieser Geraden angehörenden Involutionsgruppen der Curve $C_3$.

3.

Sind von einer Curve $C_3$ die drei Rückkehrpunkte $A$, $B$, $C$ und der Durchschnittspunkt $P$ der Rückkehrtangenten gegeben, so können wir durch eine einfache Construction zu beliebigen Punkten der Curve gelangen. Es ist hierzu hinreichend, den Polarkegelschnitt von $P$ zu construiren und von den Tangenten desselben die Pole in Bezug auf das Dreieck $ABC$ zu suchen. Wir können aber dann unter Anderem die Frage aufwerfen: wie sind zwei Tangenten des Kegelschnitts zu wählen, damit ihre entsprechenden Pole solche Punkte der Curve $C_3$ sind, dass ihre Verbindungslinie selbst die Curve $C_3$ berührt, dass also die zugehörigen Tangenten conjugirt sind; ferner: wie sind drei Tangenten des Kegelschnitts zu wählen, damit die entsprechenden Tangenten der Curve $C_3$ sich in einem Punkte schneiden?

Die erste Frage ist leicht zu beantworten. Da nämlich conjugirte Tangenten in einer reciproken Beziehung stehen, so müssen die entsprechenden Tangenten von $\Theta$ d. h. die in Bezug auf das Fundamentaldreieck genommenen Polaren der Berührungspunkte je zweier conjugirter Tangenten ein Involutionssystem bilden, folglich müssen sich je zwei solcher Tangenten des Kegelschnitts $\Theta$ in einer festen Geraden treffen. Diese Gerade aber muss mit der Doppeltangente $p$ von $C_3$ identisch sein; denn die Doppelstrahlen des von den Tangenten des Kegelschnitts $\Theta$ gebildeten Involutionssystems sind offenbar diejenigen Tangenten, welche die Durchschnittspunkte der Doppeltangente mit dem Kegelschnitt $\Theta$ zu Berührungspunkten haben. Wir erhalten somit den Satz:

*Legt man von einem beliebigen Punkte O der Doppeltangente einer Curve dritter Klasse und vierter Ordnung $C_3$ zwei Tangenten an den durch die drei Rückkehrpunkte und die beiden Berührungspunkte der Dop-*

*peltangente gehenden Kegelschnitt, und nimmt von diesen Tangenten die Pole in Bezug auf das von den Rückkehrpunkten gebildete Dreieck so sind dies zwei solche Punkte der Curve $C_3$, deren Tangenten conjugirt sind.*

Sind ferner $P'$ und $P''$ die Berührungspunkte der beiden in Rede stehenden Tangenten von $\Theta$, so müssen dieselben mit dem Hauptpol $P$ in gerader Linie liegen; somit muss der Pol $P'''$ der Geraden $P'P''$ in Bezug auf das Dreieck $ABC$ selbst auf dem Kegelschnitt $\Theta$ liegen. Der Punkt $P'''$ ist aber der Durchschnittspunkt derjenigen Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$, welche den Punkten $P'$ und $P''$ polar sind, und deren Hauptpunkte folglich die entsprechenden Punkte der Curve $C_3$ sind. Folglich schneiden sich je zwei Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$, welche die Curve $C_3$ in zwei solchen Punkten berühren, deren Tangenten conjugirt sind, auf dem Kegelschnitt $\Theta$. Ausserdem aber müssen sich, da sich in dem Punkte $O$ der Doppeltangente die beiden Tangenten $OP'$ und $OP''$ von $\Theta$ treffen, die Pole dieser drei Geraden in Bezug auf das Dreieck $ABC$ selbst auf einem diesem Dreieck umschriebenen Kegelschnitt befinden. Wir erhalten somit den Satz:

*Jeder durch die drei Rückkehrpunkte und den Durchschnittspunkt der Rückkehrtangenten einer Curve dritter Klasse und vierter Ordnung gehende Kegelschnitt schneidet diese Curve noch in zwei solchen Punkten, zu welchen conjugirte Tangenten derselben gehören.*

Behufs Beantwortung der zweiten Frage wollen wir annehmen, dass $F$ ein fester Punkt der Curve $C_3$ und $t$ die zugehörige Tangente sei, welche $C_3$ ausserdem in $G$ und $H$ schneiden mag; seien ferner $M$, $P'$, $P''$ die auf dem Kegelschnitt $\Theta$ liegenden Pole der die Curve $C_3$ in $F$, $G$, $H$ berührenden Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$; so dass also $P'$ und $P''$, da die Punkte $G$ und $H$ die Berührungspunkte conjugirter Tangenten von $C_3$ sind, mit $P$ in gerader Linie liegen. Bewegt sich dann ein Punkt $Z$ auf der Geraden $t$, und denkt man sich von demselben zwei Tangenten $t'$ und $t''$ an $C_3$ gezogen, so sind die Berührungspunkte derselben zugleich Hauptpunkte zweier Kegelschnitte $T'$ und $T''$ der Schaar $\mathfrak{S}$, deren in Bezug auf das Dreieck $ABC$ genommene Pole $Q'$ und $Q''$ auf dem Kegelschnitt $\Theta$ ein Involutionssystem bilden. Die Doppelpunkte dieser Involution sind die Punkte $P'$, $P''$; ist daher wieder $O$ der auf der Doppeltangente liegende Pol der Geraden $P'P''$ in Bezug auf $\Theta$, so geht die Gerade $Q'Q''$, während $Z$ sich bewegt, fortwährend durch den Punkt $O$. Und umgekehrt schneidet jede durch einen festen Punkt $O$ der Doppeltangente gehende Gerade den Kegelschnitt $\Theta$ in zwei solchen Punkten,

deren zugehörige Tangenten in Bezug auf das Dreieck Polaren sind zweier Punkte der Curve $C_3$, deren zugehörige Tangenten $t'$ und $t''$ sich auf einer festen Tangente $t$ schneiden. Bezeichnen wir nun den Durchschnittspunkt der Kegelschnitte $T'$ und $T''$ mit $X$, so wird, während sich $Z$ auf der festen Tangente $t$ bewegt, $X$ sich auf einem festen Kegelschnitt $K$ bewegen, nämlich auf dem Polarkegelschnitt von $O$. Da die Punkte $X$ und $Z$ sich nur eindeutig entsprechen, so werden sie auf der Geraden $t$ und dem Kegelschnitt $K$ projectivische Punktreihen bilden; und da der Punkt $P$ auf dem Kegelschnitt $K$ liegt, so werden die Strahlen $PZ$ und $PX$ projectivische Büschel bilden. Es lassen sich mehr als zwei Strahlen des einen dieser beiden Büschel nachweisen, welche auf die entsprechenden Strahlen des anderen Büschels fallen. Verlegt man nämlich $Z$ in den Durchschnittspunkt von $t$ mit einer der Rückkehrtangenten $AP$, $BP$, $CP$, so fällt $X$ resp. nach $A$, $B$, $C$ (man könnte ausserdem auch zeigen, dass $Z$ und $X$ zusammenfallen, wenn $Z$ nach $G$ und $H$ gelangt); demnach muss überhaupt jeder Strahl des einen Büschels auf den entsprechenden des anderen fallen, und es liegen daher die Punkte $P$, $X$, $Z$ immer in gerader Linie. Somit geht die Gerade, welche den Durchschnittspunkt der Rückkehrtangenten mit dem vierten Durchschnittspunkte zweier beliebiger Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$ verbindet, auch durch den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten, welche man an die Enveloppe $C_3$ der Schaar in den beiden Punkten legen kann, in welchen sie von diesen Kegelschnitten berührt wird, und welches zugleich die Hauptpunkte dieser Kegelschnitte sind. Hieraus erhalten wir aber sofort folgenden bemerkenswerthen Satz:

> *Liegen die drei Punkte einer Involutionsgruppe der Curve $C_3$ mit dem Durchschnittspunkt der Rückkehrtangenten in gerader Linie, so treffen sich die den drei Kegelschnitten der Schaar $\mathfrak{S}$, welche durch je zwei dieser Punkte gehen, entsprechenden Tangenten der Curve $C_3$ in einem Punkte, und zwar liegt dieser Punkt in derselben geraden Linie.*

Bewegt sich daher ein Punkt $Z$, von welchem aus drei Tangenten an $C_3$ gelegt sind, in einer durch den Durchschnittspunkt $P$ der Rückkehrtangenten gehenden Geraden, so bewegen sich die drei vierten Durchschnittspunkte der drei Kegelschnitte der Schaar $\mathfrak{S}$, deren Hauptpunkte mit den Berührungspunkten jener Tangenten identisch sind, in derselben geraden Linie. Die den Punkten einer solchen Involutionsgruppe entsprechenden Polaren in Bezug auf das Fundamentaldreieck werden aber, wie aus dem Früheren hervorgeht, ein

Dreieck bilden, welches sich so bewegt, dass es fortwährend dem Kegelschnitt $\Theta$ einbeschrieben und einem dem Fundamentaldreieck einbeschriebenen Kegelschnitt, der Enveloppe der Polaren der Punkte jener Geraden, umschrieben ist. Letzterer Kegelschnitt muss aber, da jene Gerade durch $P$ geht, offenbar die Doppeltangente berühren. Wir haben daher hiermit folgendes Gesetz bewiesen:

*Beschreibt man um das von den Rückkehrpunkten einer Curve dritter Klasse und vierter Ordnung $C_3$ gebildete Dreieck ABC denjenigen Kegelschnitt $\Theta$, welcher durch die Berührungspunkte der Doppeltangente geht, und ausserdem in dasselbe Dreieck einen derjenigen Kegelschnitte, welche die Doppeltangente berühren, und bildet man dann alle Dreiecke, welche dem ersteren Kegelschnitt einbeschrieben, dem anderen umschrieben sind, so werden*

1) *die in Bezug auf das Dreieck ABC genommenen Pole der Seiten dieser unendlich vielen Dreiecke eine Involution dritter Ordnung bilden auf einer Geraden L, welche durch den Durchschnittspunkt der Rückkehrtangenten geht;*
2) *werden, wenn man in den Ecken eines beliebigen dieser Dreiecke Tangenten an den Kegelschnitt $\Theta$ legt, die in Bezug auf das Dreieck ABC genommenen Pole dieser Tangenten immer eine auf der Curve $C_3$ liegende Gruppe von drei solchen Punkten bilden, dass ihre zugehörigen Tangenten sich in einem Punkte schneiden, und letzterer Punkt wird ebenfalls auf der Geraden L liegen.*

Um nun noch zu ermitteln, in welcher Beziehung die auf $\Theta$ liegenden Punkte $M$, $P'$, $P''$ zu einander stehen, wollen wir denjenigen Kegelschnitt der Schaar $\mathfrak{S}$, welcher $C_3$ in $F$ berührt, durch $K$ bezeichnen; alsdann wird, wenn wir den sich auf der Tangente $t$ bewegenden Punkt $Z$ mit $P$ verbinden, die Verbindungslinie dem soeben Bewiesenen zu Folge den Kegelschnitt $K$ stets in zwei solchen Punkten $\alpha$ und $\beta$ schneiden, durch welche noch diejenigen zwei Keglschnitte $T'$ und $T''$ der Schaar gehen, denen zwei sich in $Z$ schneidende Tangenten der Curve $C_3$ entsprechen. Gelangt nun der Punkt $Z$ nach $G$, so werden die beiden Punkte $\alpha$ und $\beta$ in einen einzigen und zwar auf $PG$ liegenden Punkt $Q$ zusammenfallen, und die Linie $PG$ wird folglich den Kegelschnitt $K$ in einem Punkte $R$ berühren; ebenso wird auch die Gerade $PH$ diesen Kegelschnitt in $T$ berühren. Da somit $RT$ Polare von $P$ in Bezug auf den Kegelschnitt $K$ (gemischte Polare von $P$ und $M$) ist, so ist sie zugleich Polare des Punktes $M$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\Theta$. Der Punkt

$M$ liegt aber selbst auf $\Theta$, und seine Polare ist somit die Tangente von $\Theta$ in $M$; somit ist die Gerade $QT$ eine Tangente von $\Theta$. Da nun aber die drei Durchschnittspunkte der drei Kegelschnitte $K$, $T'$, $T''$, welche der Schaar $\mathfrak{S}$ angehören, in gerader Linie liegen, und schon zwei dieser Punkte, nämlich $Q$ und $T$ (als Durchschnittspunkte von $K$ mit $T'$ und $T''$) auf der Tangente von $\Theta$ im Punkte $M$ liegen, so muss auch der dritte dieser Punkte, der Durchschnittspunkt von $T'$ und $T''$ auf dieser Tangente liegen. Dieser Punkt muss aber auch, da $T'$ und $T''$ zu conjugirten Tangenten von $C_3$ gehören, einem oben bewiesenen Satze zufolge, auf $\Theta$ liegen; er muss also mit $M$ zusammenfallen.

Berücksichtigt man nun, dass nicht nur $K$ die conische, sondern auch $P'P''$ die gerade Polare des Punktes $M$ in Bezug auf das Fundamentaldreieck ist, so erhält man den Satz:

*Zieht man durch den Durchschnittspunkt der Rückkehrtangenten der Curve $C_3$ eine beliebige Gerade, welche den Kegelschnitt $\Theta$ in $P'$ und $P''$ schneidet, und ist $M$ der auf $\Theta$ liegende Pol der Geraden $P'P''$ in Bezug auf das Fundamentaldreieck, legt man ferner in den Punkten $M$, $P'$, $P''$ Tangenten an den Kegelschnitt $\Theta$, und sind resp. $F$, $G$, $H$ die Pole dieser Tangenten in Bezug auf das Fundamentaldreieck, so sind $F$, $G$, $H$ drei in gerader Linie liegende Punkte der Curve $C_3$, und zwar berührt diese Gerade $C_3$ in $F$.*

Die Aufgaben, welche wir uns im Anfange dieses Paragraphen gestellt haben, sind somit vollständig gelöst.

## 4.

Die speciellen Fälle, welche bei vorstehendem Aufsatz in Betracht kommen, zerfallen in zwei Hauptgruppen, welche dadurch bedingt sind, dass in dem Fundamentaldreieck alle Ecken und Seiten reell, oder nur eine Ecke und die gegenüberstehende Seite reell sein kann. Zu den Curven der ersten Gruppe gehört auch die *Steiner*sche Curve; sie bildet denjenigen Fall, in welchem das Fundamentaldreieck gleichseitig ist und die Doppeltangente in die unendlich entfernte Gerade fällt; die beiden Berührungspunkte sind dann unendlich entfernte imaginäre Kreispunkte.

Der Kegelschnitt $\Theta$ ist der von *Steiner* mit $\delta^2$ bezeichnete Kreis, und die Schaar $\mathfrak{S}$ besteht aus denjenigen dem gleichseitigen Dreieck $ABC$ umschriebenen Kegelschnitten (lauter Hyperbeln), bei welchen die in den Ecken gelegten Tangenten die Gegenseiten des Dreiecks in drei Punkten treffen,

welche mit dem Schwerpunkte desselben in gerader Linie liegen. Bei den Curven der zweiten Gruppe hat die Doppeltangente immer zwei reelle Berührungspunkte, und es giebt auch in dieser Gruppe eine specielle Curve, welche sich durch besonders interessante Eigenschaften auszeichnet, nämlich diejenige, für welche zwei Ecken des Fundamentaldreiecks, also zwei Rückkehrpunkte in die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte fallen. Ist nämlich ein beliebiger Punkt $A$ die reelle Ecke des Fundamentaldreiecks und ein anderer beliebiger Punkt $P$ der Durchschnittspunkt der drei Rückkehrtangenten (von denen zwei imaginär sind), so ist aus dem, was in §. 2 über Pol und Polaren in Bezug auf imaginäre Dreiecke gesagt worden ist, leicht einzusehen, dass zu einem beliebigen Punkte $Q$ der Ebene die Polare $q$ in Bezug auf das Fundamentaldreieck, dessen Ecken $B$ und $C$ in die imaginären Kreispunkte fallen, gefunden wird, wenn man die Gerade $QA$ über $A$ hinaus bis $N$ verlängert, so dass $AN = \frac{1}{2}QA$ ist, und sodann auf $AN$ in $N$ eine Normale $q$ errichtet. Hiernach ergiebt sich also die Doppeltangente $p$ der in Rede stehenden Curve von selbst. Ferner ist der Kegelschnitt $\Theta$ offenbar ein Kreis und zwar derjenige, für welchen $P$ und $p$ Pol und Polaren sind, also auch durch $A$, $P$ und $p$ völlig bestimmt; auch sieht man sogleich, dass der durch die Doppeltangente $p$ von diesem Kreise abgeschnittene Bogen $120^0$ beträgt. Endlich sieht man auch leicht ein, dass jede Parabel, welche $A$ zum Brennpunkt hat, als ein dem Fundamentaldreieck einbeschriebener Kegelschnitt betrachtet werden kann; denn insofern der Brennpunkt einer solchen Parabel in $A$ liegt, wird sie von den imaginären Seiten $AB$ und $AC$ des Dreiecks berührt; und insofern sie eine Parabel ist, hat sie die unendlich entfernte Seite $BC$ zur Tangente. Bei richtiger Durchführung vorstehender Andeutungen gelangt man unter Benutzung einiger speciellen Eigenthümlichkeiten der Figur zu folgenden bemerkenswerthen Gesetzen:

*Zieht man in einer Ebene vier beliebige Gerade und beschreibt um die vier von je dreien derselben gebildeten Dreiecke Kreise, so gehen die letzteren alle durch einen und denselben Punkt A; auch liegen die vier Mittelpunkte der Kreise selbst in einem Kreise K, welcher ebenfalls durch A geht. Bildet man eine Schaar $\mathfrak{S}$ von solchen Kreisen, welche sämmtlich ihre Mittelpunkte auf K haben und durch A gehen, so hat dieselbe alle Eigenschaften der früher mit $\mathfrak{S}$ bezeichneten Kegelschnittschaar: die drei zweiten reellen Durchschnittspunkte je dreier dieser Kreise liegen immer in gerader Linie; jeder Kreis wird von allen übrigen so ge-*

*schnitten, dass die Tangenten, welche man an dieselben in dem jedesmaligen Durchschnittspunkte legen kann in einem Punkte des ersteren zusammentreffen, in demjenigen nämlich, in welchem dieser Kreis die Enveloppe der Schaar berührt, etc. Die Enveloppe $C_3$ selbst ist eine Curve dritter Klasse und vierter Ordnung, von welcher ein Rückkehrpunkt in A liegt, während die beiden anderen in die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte fallen. Als Durchschnittspunkt der Rückkehrtangenten, von denen zwei imaginär sind, ist der Mittelpunkt P des Kreises K zu betrachten. Die Doppeltangente, welche zwei reelle Berührungspunkte hat, wird gefunden, wenn man die Gerade PA über A hinaus um die Strecke $\frac{1}{2}PA$ verlängert und auf der Verlängerung in ihrem Endpunkte eine Normale errichtet. Der durch die drei Rückkehrpunkte und die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente gehende Kegelschnitt $\Theta$ ist ein dem K gleicher Kreis, welcher K von aussen in A berührt. Wählt man zwei beliebige Kreise der Schaar $\mathfrak{S}$ etwa K' und K'' und legt durch den zweiten (d. h. nicht in A befindlichen) Durchschnittspunkt derselben eine Gerade q, welche die beiden Kreise zum zweiten Male in M und N trifft, so wird der Durchschnittspunkt der in M und N an dieselben gelegten Tangenten während einer Drehung von q um den festen Durchschnittspunkt der beiden Kreise immer die nämliche Curve $C_3$ beschreiben. Diese Curve kann auch als Fusspunktcurve des Kreises K für einen in A fallenden Pol betrachtet werden oder als Epicykloide von K mit einem Rückkehrpunkte, für welche also der auf K rollende Kreis gleich K ist; ferner auch als diejenige Curve, welche man erhält, wenn man um den in A liegenden Brennpunkt einer Parabel, deren Achse in die Richtung PA fällt, einen Kreis beschreibt und zu den Punkten der Parabel die in Bezug auf diesen Kreis conjugirten Pole (im Plückerschen Sinne) sucht, so dass also die Curve $C_3$ der Parabel kreisverwandt ist. Jeder durch P und A gehende Kreis schneidet die Curve $C_3$ in zwei solchen Punkten, deren zugehörige Tangenten conjugirt sind. In zwei solchen Punkten berühren auch je zwei Kreise der Schaar $\mathfrak{S}$ die Curve $C_3$, wenn ihre Mittelpunkte im Kreise K harmonisch liegen zu den beiden Punkten, in welchen derselbe von der Normalen geschnitten wird, welche man auf der Linie AP in ihrer Mitte errichten kann. Theilt man die Peripherie des Kreises K auf beliebige Weise in drei gleiche Theile und wählt diejenigen Kreise aus der Schaar $\mathfrak{S}$, deren Mittelpunkte in die Theilpunkte*

*fallen, so berühren diese die Curve $C_3$ in drei solchen Punkten, zu denen parallele Tangenten gehören, und zwar sind diese drei Tangenten zugleich der Geraden parallel, welche durch P und die drei zweiten Durchschnittspunkte der Kreise geht. Um überhaupt drei Punkte auf $C_3$ so zu bestimmen, dass ihre zugehörigen Tangenten sich in einem Punkte schneiden, braucht man nur drei solche Kreise der Schaar $\mathfrak{S}$ zu wählen, deren drei zweite Durchschnittspunkte in eine durch P gehende Gerade fallen; die drei Berührungspunkte dieser Kreise mit der Curve $C_3$ haben dann die verlangte Beschaffenheit und zwar liegt auch der Durchschnittspunkt der drei entsprechenden Tangenten von $C_3$ auf der erwähnten Geraden. Der Ort der Durchschnittspunkte conjugirter Tangenten (Hessesche Curve) besteht aus der Doppeltangente p und einer durch die Berührungspunkte der Doppeltangente gehenden Hyperbel, welche zugleich von den Verbindungslinien der genannten Berührungspunkte mit P berührt wird. Ihr Mittelpunkt wird gefunden, wenn man die Gerade AP über P hinaus um $\frac{6}{5}$ des Radius von K verlängert und ihre Halbmesser a und b sind resp. $= \frac{8}{5}r$ und $r\sqrt{\frac{3}{5}}$, u. s. w.*

Liegnitz, Februar 1866.

# Ueber einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

1.

Wenn ein System materieller Punkte unter der Einwirkung eines Systems von Kräften steht, bei dem eine Kräftefunction existirt, und einem System von Bedingungsgleichungen unterworfen ist, die von der Zeit nicht abhängen, so giebt es bekanntlich immer ein Integral, in dessen Ausdruck die individuelle Beschaffenheit der Bedingungen nicht eingeht, das Integral der lebendigen Kraft. Es ist aber, soviel ich weiss, bisher nicht bemerkt worden, dass aus den Gesetzen der Bewegung ein zweites von der individuellen Beschaffenheit der Bedingungen unabhängiges Resultat abgeleitet werden kann, sobald denselben eine gewisse Beschränkung allgemeiner Art auferlegt wird. Nennt man die Punkte des Systems der Reihe nach $P_1$, $P_2$, ... $P_n$, ferner diejenige Lage desselben, bei der beziehungsweise der Punkt $P_\alpha$ den Ort $B_\alpha$ einnimmt, $(B_1, B_2, \dots B_n)$, und eine gewisse ausgezeichnete Lage $(A_1, A_2, \dots A_n)$, bezeichnet man die Coordinaten der Oerter $B_\alpha$ und $A_\alpha$ in einem rechtwinkligen Coordinatensystem respective durch $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$ und $a_\alpha$, $b_\alpha$, $c_\alpha$, endlich die herrschenden Bedingungen durch die Gleichungen

$$(1.) \qquad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \dots \quad \Phi_l = 0,$$

so lässt sich die in Rede stehende Beschränkung so aussprechen, dass $\Phi_1$, $\Phi_2$, ... $\Phi_l$ algebraische homogene Functionen der $3n$ Coordinatendifferenzen

$$x_\alpha - a_\alpha, \quad y_\alpha - b_\alpha, \quad z_\alpha - c_\alpha$$

sein sollen. Es bedeute nun $(B_1, B_2, \dots B_n)$ die Lage, welche das Massensystem während seiner Bewegung zur Zeit $t$ einnimmt, und es werde für jeden Punkt $P_\alpha$ das Product aus der demselben zugehörigen Masse $m_\alpha$ in das Quadrat des Abstandes $A_\alpha B_\alpha$ gebildet, und von diesem Product über die $n$ Punkte die Summe genommen, die gleich $2G$ sein möge, alsdann gilt der Satz, dass der nach der Zeit $t$ genommene zweite Differentialquotient der Summe $2G$ einen Werth hat, der nicht von der individuellen Beschaffenheit der Bedingungen, sondern allein von der Lage des bewegten Massensystems abhängt. Ich werde diesen Satz beweisen, und mit Hülfe desselben die Bedingungen für die Stabilität der Bewegung bei gewissen Bewegungsproblemen aufstellen.

In Betreff der allgemeinen Beschaffenheit einer algebraischen homogenen Function $W$ von gegebenen Elementen kann man erwähnen, dass, weil der Grad derselben gleich einem Bruch $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}$ ist, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, die Potenz $W^{\mathfrak{q}}$ eine homogene Function vom $\mathfrak{p}^{\text{ten}}$ Grade wird, und deshalb immer einer algebraischen Gleichung

$$E W^{\mathfrak{q}s} + E_1 W^{\mathfrak{q}(s-1)} + \cdots + E_s = 0$$

genügen muss, deren Coefficienten $E$, $E_1$, ... $E_s$ rationelle ganze homogene Functionen der Elemente von den Graden $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}+\mathfrak{p}$, ... $\mathfrak{e}+\mathfrak{p}s$ sind. Unter den $\mathfrak{q}s$ Wurzeln der Gleichung in $W$ werden dann und nur dann zwei Wurzeln von endlichem Werthe gleich, wenn die Discriminante $\Delta$ der Gleichung verschwindet. Schreibt man deshalb den Elementen solche stetige Aenderungen vor, bei denen die Function $\Delta$ nicht durch den Werth Null hindurchgeht, so lassen sich die entsprechenden stetigen Aenderungen einer jeden Wurzel unzweideutig verfolgen. Es werden daher diejenigen Gleichungen, deren Discriminante $\Delta$ die Eigenschaft hat, für kein reelles System der Elemente das Vorzeichen zu wechseln und nur mit allen Elementen zugleich zu verchwinden, unter gewissen Voraussetzungen den Vorzug haben, dass jede reelle Wurzel derselben als eine für alle reellen Werthcombinationen der Elemente reelle, stetige und eindeutige Function der Elemente aufgefasst werden kann; und nur von algebraischen Functionen dieser Beschaffenheit ist im Folgenden stillschweigend die Rede.

Die geometrische Bedeutung des angegebenen Typus der Bedingungsgleichungen ist leicht zu erkennen. Jede Function $\Phi_\beta$, wo der Zeiger $\beta$ von 1 bis $l$ läuft, hat nach der Annahme die Eigenschaft, sobald statt der Variabeln $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$ beziehungsweise die Ausdrücke $a_\alpha+p(x_\alpha-a_\alpha)$, $b_\alpha+p(y_\alpha-b_\alpha)$, $c_\alpha+p(z_\alpha-c_\alpha)$ substituirt werden, wenn der Grad von $\Phi_\beta$ gleich $g_\beta$ ist, für jedes $p$ in den Ausdruck $p^{g_\beta}\Phi_\beta$ überzugehen. Sobald daher für eine Lage $(B_1, B_2, \ldots B_n)$ die $l$ Gleichungen $\Phi_\beta = 0$ erfüllt sind, so werden sie auch für jede Lage $(B'_1, B'_2, \ldots B'_n)$ befriedigt sein, welche zu der ersteren in der Beziehung steht, dass die drei Oerter $A_\alpha$, $B_\alpha$, $B'_\alpha$ eines jeden Punktes $P_\alpha$ auf je einer geraden Linie liegen, und dass der Ort $B'_\alpha$ die Strecke $A_\alpha B_\alpha$ nach einem für alle $n$ geraden Linien gleichen Verhältnisse theilt.

Um die ausgesprochene Eigenschaft der Function $G$ zu beweisen, werde die Kräftefunction $U$ genannt, und mögen die Differentialgleichungen für die

Bewegung des Massensystems nach der Weise von *Lagrange* mit Anwendung von $l$ zu bestimmenden Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ folgendermassen geschrieben werden:

$$(2.)\quad \begin{cases} m_\alpha \frac{d^2x_\alpha}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_\alpha} + \cdots + \lambda_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_\alpha}, \\ m_\alpha \frac{d^2y_\alpha}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_\alpha} + \cdots + \lambda_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial y_\alpha}, \\ m_\alpha \frac{d^2z_\alpha}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_\alpha} + \cdots + \lambda_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial z_\alpha}. \end{cases}$$

Ich multiplicire diese drei Gleichungen der Reihe nach mit den Factoren $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$, addire dieselben und nehme die Summe des Aggregats über die $n$ Punkte des Systems, dann entsteht die Gleichung

$$(3.)\quad \begin{cases} \sum_\alpha m_\alpha \left( (x_\alpha - a_\alpha) \frac{d^2x_\alpha}{dt^2} + (y_\alpha - b_\alpha) \frac{d^2y_\alpha}{dt^2} + (z_\alpha - c_\alpha) \frac{d^2z_\alpha}{dt^2} \right) \\ = \sum_\alpha \left( (x_\alpha - a_\alpha) \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + (y_\alpha - b_\alpha) \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} + (z_\alpha - c_\alpha) \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \right) \\ + \sum_\alpha \sum_\beta \lambda_\beta \left( (x_\alpha - a_\alpha) \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha} + (y_\alpha - b_\alpha) \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial y_\alpha} + (z_\alpha - c_\alpha) \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial z_\alpha} \right). \end{cases}$$

Die Grundeigenschaft der homogenen Functionen liefert aber die Gleichung

$$(4.)\quad \sum_\alpha \left( (x_\alpha - a_\alpha) \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha} + (y_\alpha - b_\alpha) \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial y_\alpha} + (z_\alpha - c_\alpha) \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial z_\alpha} \right) = g_\beta \Phi_\beta,$$

deren rechte Seite wegen der Gleichungen (1.) verschwindet. Demnach erhält die auf der rechten Seite von (3.) befindliche Doppelsumme den Werth Null, und wenn man die linke Seite derselben Gleichung durch Relationen umformt, die den drei Coordinaten entsprechen und nach dem Typus

$$\frac{d^2(x_\alpha - a_\alpha)^2}{dt^2} = 2\left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2 + 2(x_\alpha - a_\alpha)\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}$$

gebildet sind, so kommt

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \left( \frac{d^2(x_\alpha - a_\alpha)^2}{dt^2} + \frac{d^2(y_\alpha - b_\alpha)^2}{dt^2} + \frac{d^2(z_\alpha - c_\alpha)^2}{dt^2} \right) - \sum_\alpha m_\alpha \left( \left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\alpha}{dt}\right)^2 \right) \\ = \sum_\alpha \left( (x_\alpha - a_\alpha) \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + (y_\alpha - b_\alpha) \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} + (z_\alpha - c_\alpha) \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \right). \end{cases}$$

Schon oben ist die Summe, deren allgemeines Glied das Product aus der Masse $m_\alpha$ in das Quadrat des Abstandes $A_\alpha B_\alpha$ ist,

$$\sum_\alpha m_\alpha \left( (x_\alpha - a_\alpha)^2 + (y_\alpha - b_\alpha)^2 + (z_\alpha - c_\alpha)^2 \right) = 2G$$

gesetzt worden, nun wird die Summe der lebendigen Kräfte

$$\sum_\alpha m_\alpha\left(\left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_\alpha}{dt}\right)^2\right) = 2T$$

angenommen, so verwandelt sich die Gleichung (5.) in die folgende

$$(6.)\qquad \frac{d^2G}{dt^2}-2T=\Sigma_\alpha\left((x_\alpha-a_\alpha)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}+(y_\alpha-b_\alpha)\frac{\partial U}{\partial y_\alpha}+(z_\alpha-c_\alpha)\frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\right).$$

Hierauf erhält man das Integral der lebendigen Kraft in der folgenden Gestalt

$$(7.)\qquad T-U = T(0)-U(0),$$

wo $T(0)$ und $U(0)$ diejenigen Werthe der Functionen $T$ und $U$ bedeuten, welche entstehen, indem man in dieselben für die Ausdrücke $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$, $\frac{dx_\alpha}{dt}$, $\frac{dy_\alpha}{dt}$, $\frac{dz_\alpha}{dt}$ die für einen bestimmten Zeitmoment $t_0=t$ gegebenen Werthe der betreffenden Grössen substituirt. Die Elimination der Function $T$ aus den Gleichungen (6.) und (7.) liefert alsdann das Resultat

$$(8.)\qquad \frac{d^2G}{dt^2}=2U+\Sigma_\alpha\left((x_\alpha-a_\alpha)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}+(y_\alpha-b_\alpha)\frac{\partial U}{\partial y_\alpha}+(z_\alpha-c_\alpha)\frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\right)+2T(0)-2U(0),$$

durch welches der Behauptung gemäss der zweite auf die Zeit $t$ bezogene Differentialquotient der Grösse $G$ als eine reine Function der Lage des bewegten Massensystems dargestellt wird.

Die Gleichungen (6.) und (8.) nehmen eine noch einfachere Form an, wenn die Kräftefunction $U$ ebenso, wie die Functionen $\Phi_\beta$, eine algebraische homogene Function der Elemente $x_\alpha-a_\alpha$, $y_\alpha-b_\alpha$, $z_\alpha-c_\alpha$ wird. Bezeichnet man die Ordnung der Function $U$ alsdann mit $\mathfrak{k}$, und schreibt in der Gleichung (4.) $U$ statt $\Phi_\beta$ und $\mathfrak{k}$ statt $g_\beta$, so führt die hervorgehende Relation zu den neuen Gleichungen

$$(6^*.)\qquad \frac{dG^2}{dt^2}-2T = \mathfrak{k}U,$$

$$(8^*.)\qquad \frac{d^2G}{dt^2} = (2+\mathfrak{k})U+2T(0)-2U(0).$$

Die so eben angestellten Betrachtungen stimmen unter der Voraussetzung, dass die Bewegung des Massensystems frei von Bedingungen ist, in ihrem Wesen mit denjenigen überein, die *Jacobi* Bd. XVII, pag. 120 dieses Journals und in den Vorlesungen über Dynamik pag. 21 entwickelt hat. Dort fallen aber die Punkte, die gegenwärtig $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ genannt worden sind, in einen zusammen, und dieser ist zum Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten genommen. Hierzu kommt bei der von *Jacobi* gegebenen Anwendung auf ein System von Massen, die allein unter dem Einfluss der gegenseitigen Anziehung stehen, der besondere Umstand, dass die Wahl dieses Coordinaten-

anfangspunktes für das Problem gleichgültig ist, und deshalb erhält daselbst der nach der Zeit $t$ genommene zweite Differentialquotient der Function $G$ immer den gleichen Werth, in welchen festen Punkt man die Punkte $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ auch vereinigen möge.

2.

Wenn man annimmt, dass die sämmtlichen $\Phi_\beta$ rationale ganze Functionen ersten Grades von den Elementen $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$ sind, die Kräftefunction $U$ jedoch eine rationale ganze Function zweiten Grades von diesen Elementen ist, so hat man die allgemeinen Voraussetzungen, welche zutreffen, sobald das Massensystem um die Lage $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ kleine Schwingungen beschreibt *). Aus der Theorie dieses Problems kennt man die Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind, damit für ganz beliebige Anfangsgeschwindigkeiten und Anfangsörter der Massenpunkte weder die Entfernung eines Massenpunktes von der Lage $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ noch die Geschwindigkeit eines Massenpunktes zu irgend einer Zeit gewisse feste Werthe überschreite, und damit das Massensystem in keiner anderen Lage als in der Lage $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ ruhen könne. Es ist aber eine durchgreifende Eigenschaft des charakterisirten algebraischen Typus der Bedingungsgleichungen, dass überall, wo derselbe auftritt, und wo zugleich die Kräftefunction $U$ eine algebraische homogene Function der Elemente $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$ ist, welche gleich Null wird, sobald alle Elemente zugleich verschwinden, und welche immer in's Unendliche wächst, sobald ein Element jede Grenze überschreitet, die entsprechende, die Stabilität der Bewegung betreffende Frage ebenso einfach beantwortet werden kann, wie bei dem Fall der kleinen Schwingungen. Die zugehörige Antwort lässt sich nämlich, wie folgt, zusammenfassen. Wenn sowohl die sämmtlichen Functionen $\Phi_\beta$, wie auch die Kräftefunction $U$ algebraische homogene Functionen der Elemente $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$ sind, wenn die Function $U$ gleich Null wird, sobald alle Elemente in den Werth Null übergehen, und allemal in's Unendliche zunimmt, sobald ein Element über jedes Mass hinaus wächst, so dass der Grad der Function gleich einer positiven Zahl ist, alsdann besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass bei ganz beliebigen Anfangsörtern und Anfangsgeschwindigkeiten weder die Entfernung eines Massenpunktes von der Lage $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ noch die Geschwindigkeit eines Massenpunktes zu irgend

*) *Lagrange*, mécanique analytique, seconde partie, section VI.

einer Zeit gewisse feste Grenzen überschreite, und dass eine Ruhe des Massensystems ausserhalb der Lage $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ unmöglich sei, darin, dass die Kräftefunction $U$ für alle endlichen, reellen mit den Bedingungen $\Phi_\beta = 0$ vereinbaren Systeme von Elementen, das System $x_\alpha - a_\alpha = 0$, $y_\alpha - b_\alpha = 0$, $z_\alpha - c_\alpha = 0$ ausgenommen, einen endlichen negativen Werth erhält. Die Rechtfertigung für dieses Criterium der Stabilität der Bewegung soll sogleich erfolgen.

Zuerst wird gezeigt werden, dass wenn die Bewegung des Massensystems den vorgeschriebenen Charakter der Stabilität bewahrt, die in Rede stehende Function $U$ die angegebene Beschaffenheit haben muss. Zu diesem Behuf eliminire ich aus der nach der Voraussetzung geltenden Gleichung (6*.) und dem Integral der lebendigen Kraft (7.) die Function $U$ und erhalte die Gleichung

$$(9.) \qquad (2+\mathfrak{k})\,T = \frac{d^2G}{dt^2} + \mathfrak{k}(T(0) - U(0)).$$

Die beiden Seiten derselben, welche in jedem Augenblick der Bewegung vollständig bestimmte Functionen der Zeit $t$ darstellen, können mit dem Element $dt$ multiplicirt und von dem Werthe $t = \sigma$ bis zu dem Werthe $t = \tau$ integrirt werden. Dies giebt das Resultat

$$(10.) \qquad (2+\mathfrak{k})\int_\sigma^\tau T\,dt = \left(\frac{dG}{dt}\right)_\sigma^\tau + \mathfrak{k}(T(0) - U(0))(\tau - \sigma),$$

wo die Function $\frac{dG}{dt}$ die Bedeutung hat

$$(11.) \qquad \frac{dG}{dt} = \sum_\alpha m_\alpha\left((x_\alpha - a_\alpha)\frac{dx_\alpha}{dt} + (y_\alpha - b_\alpha)\frac{dy_\alpha}{dt} + (z_\alpha - c_\alpha)\frac{dz_\alpha}{dt}\right)$$

und der Ausdruck $\left(\frac{dG}{dt}\right)_\sigma^\tau$ die Differenz der beiden Werthe von $\frac{dG}{dt}$ bedeutet, die den Substitutionen $t = \sigma$ und $t = \tau$ entsprechen. Wenn nun der Voraussetzung gemäss keine der Grössen $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$, $\frac{dx_\alpha}{dt}$, $\frac{dy_\alpha}{dt}$, $\frac{dz_\alpha}{dt}$ zu irgend einer Zeit der Bewegung eine feste Grenze übersteigen darf, so gilt dasselbe auch von dem Ausdruck $\frac{dG}{dt}$, und es ist evident, dass der Bruch $\frac{\left(\frac{dG}{dt}\right)_\sigma^\tau}{\tau - \sigma}$, wenn die Grösse $\tau$ über jedes Mass hinaus wächst, die Grösse $\sigma$ aber fest bleibt, die Null zur Grenze haben muss. Es werde jetzt die Gleichung (10.) durch den Ausdruck $\mathfrak{k}(\tau - \sigma)$ dividirt, und man lasse den Werth

$\tau$ über jede Zahl hinaus zunehmen, während der Werth $\sigma$ festgehalten wird, so entsteht für den Grenzfall die Gleichung:

$$(12.) \qquad \frac{2+\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}} \lim. \frac{1}{\tau-\sigma}\int_{\sigma}^{\tau} T dt = T(0)-U(0).$$

Die Summe der lebendigen Kräfte $2T$ kann vermöge ihrer Natur niemals gleich einer negativen Grösse werden, der Werth derselben ist aber unter den bestehenden Voraussetzungen für jede Zeit zwischen festen Grenzen eingeschlossen, und darf nur in dem einen Falle, dass dauernd $x_\alpha - a_\alpha = 0$, $y_\alpha - b_\alpha = 0$, $z_\alpha - c_\alpha = 0$ ist, dauernd verschwinden. Deshalb hat der Ausdruck $\lim. \frac{1}{\tau-\sigma}\int_{\sigma}^{\tau} T dt$, wofern nicht dauernd das System $x_\alpha - a_\alpha = 0$, $y_\alpha - b_\alpha = 0$, $z_\alpha - c_\alpha = 0$ herrscht, immer einen endlichen positiven Werth, und der Bruch $\frac{2+\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}}$ ist in Folge der Hypothese ebenfalls eine positive Grösse. Wollte man nun voraussetzen, dass für ein reelles, den Gleichungen $\Phi_\beta = 0$ genügendes, von dem System $x_\alpha = a_\alpha$, $y_\alpha = b_\alpha$, $z_\alpha = c_\alpha$ verschiedenes System von endlichen Werthen $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$ die Function $U$ entweder einen positiven oder einen verschwindenden oder einen unendlich grossen Werth annehme, so braucht man nur die betreffenden Werthe $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$ zu den Coordinaten der entsprechenden Punkte $P_\alpha$ für den Zeitmoment $t = t_0$ zu wählen, was nach der Hypothese erlaubt ist, um einen Widerspruch herbeizuführen. Die linke Seite der Gleichung (12.) hat alsdann aus den angegebenen Gründen einen endlichen positiven Werth; wenn aber für das in Rede stehende Werthsystem $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$ der Werth $U(0)$ beziehungsweise negativ, oder verschwindend oder unendlich gross wird, so kann man nach der Hypothese in jedem Falle über die dem Zeitpunkt $t = t_0$ entsprechenden Geschwindigkeiten der Massenpunkte und demzufolge über den Werth $T(0)$ so verfügen, dass die rechte Seite der Gleichung (12.) respective negativ oder verschwindend oder unendlich gross wird. Durch den hervortretenden Widerspruch ist somit als nothwendig erwiesen, dass die Function $U$ für alle endlichen reellen, mit den Gleichungen $\Phi_\beta = 0$ vereinbaren Systeme von Elementen, das System $x_\alpha - a_\alpha = 0$, $y_\alpha - b_\alpha = 0$, $z_\alpha - c_\alpha = 0$ ausgenommen, einen endlichen negativen Werth erhalte.

Nachdem dieser Punkt erledigt ist, hat es keine Schwierigkeit zu beweisen, dass, wenn die Kräftefunction $U$ die vorgeschriebene Beschaffenheit besitzt, ein Gleichgewicht des Systems ausserhalb der Lage $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ unmöglich ist, und dass die Entfernungen der Massenpunkte von dieser Lage

sowie die Geschwindigkeiten derselben in feste Grenzen eingeschlossen sind. Sollte erstens ein Gleichgewicht in einer von $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ verschiedenen Lage des Systems bestehen können, so hätte man für jeden Werth der Zeit $T=0$, und deshalb wegen der Gleichung (12.) der Voraussetzung zuwider die Gleichung $U(0)=0$. Die Richtigkeit des zweiten Theiles der Behauptung ist eine Folge aus dem Integral der lebendigen Kraft

$$T-U = T(0)-U(0).$$

Nach der bestehenden Voraussetzung darf die Function $U$ für alle endlichen mit den Gleichungen $\Phi_\beta=0$ vereinbaren Werthsysteme $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$, das System $x_\alpha=a_\alpha$, $y_\alpha=b_\alpha$, $z_\alpha=c_\alpha$ ausgeschlossen, nur endliche negative Werthe annehmen, für dieses System aber wird $U=0$; daher ist der Ausdruck $T-U$ ein Aggregat von den beiden Functionen $T$ und $-U$, die für alle zulässigen endlichen Werthsysteme $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$, $\frac{dx_\alpha}{dt}$, $\frac{dy_\alpha}{dt}$, $\frac{dz_\alpha}{dt}$ endlich bleiben und niemals negativ werden, und das Gleiche gilt mithin von dem speciellen Werthe des Aggregats $T(0)-U(0)$. Nun besitzt die Function $T$ durch ihre Natur die Eigenschaft, wenn eine der Grössen $\frac{dx_\alpha}{dt}$, $\frac{dy_\alpha}{dt}$, $\frac{dz_\alpha}{dt}$ über jedes Mass hinaus wächst, mitzuwachsen, und die Function $U$ hat laut der allgemeinen oben getroffenen Voraussetzung die Eigenschaft, wenn eine der Grössen $x_\alpha-a_\alpha$, $y_\alpha-b_\alpha$, $z_\alpha-c_\alpha$ über jedes Mass hinaus zunimmt, ebenfalls ohne Ende zuzunehmen. Daher sind die Werthe $x_\alpha-a_\alpha$, $y_\alpha-b_\alpha$, $z_\alpha-c_\alpha$, $\frac{dx_\alpha}{dt}$, $\frac{dy_\alpha}{dt}$, $\frac{dz_\alpha}{dt}$ unter den obwaltenden Verhältnissen durch die Gleichung $T-U=T(0)-U(0)$ an gewisse endliche zu keiner Zeit zu überschreitende Grenzen gebunden, und das war behauptet worden. Das aufgestellte Criterium für die Stabilität der Bewegung bei den in Rede stehenden Bewegungsproblemen ist demnach vollständig begründet.

## 3.

Von dem gewonnenen Standpunkte aus können auch diejenigen Bewegungsprobleme betrachtet werden, bei denen sowohl die Functionen $\Phi_\beta$ wie auch die Function $U$ algebraische homogene Functionen der Elemente $x_\alpha-a_\alpha$, $y_\alpha-b_\alpha$, $z_\alpha-c_\alpha$ sind, und ausserdem die Function $U$ die Eigenschaften hat, für alle endlichen mit den Bedingungen $\Phi_\beta=0$ vereinbaren Systeme von Elementen positiv zu sein, nur zu verschwinden, sobald ein Element in's Unendliche wächst, dann und nur dann unendlich gross zu werden, wenn alle Elemente zugleich verschwinden, sich aber so zu verhalten, dass bei dem Ab-

nehmen aller Elemente das Product aus der Function $U$ und der Function $G$ immer gegen die Null convergirt. Die Zahl $\mathfrak{k}$, welche den Grad der Function $U$ bezeichnet, liegt dann zwischen den Grenzen 0 und $-2$, diese selbst ausgeschlossen. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich beweisen, dass bei einem endlichen Werthe der Function $G$ das Massensystem nicht im Gleichgewicht verharren kann, dass, wenn die Functionen $G$ und $T$ zu jeder Zeit der Bewegung kleiner als gewisse endliche Grenzen bleiben, die Constante $T(0)-U(0)$ einen endlichen negativen Werth haben muss *), und dass, wenn diese Constante einen endlichen negativen Werth hat, die Function $G$ eine endliche Grenze nicht überschreiten kann.

Die Richtigkeit des ersten und des zweiten Theiles der Behauptung folgt aus dem Umstande, dass, sobald die Functionen $G$ und $T$ nicht wachsen können, die Gleichung (12.) in Kraft tritt. Ist $T$ dauernd gleich Null, so muss, wie auch oben bemerkt, $U(0)$ ebenfalls gleich Null sein, und dies ist nach der Voraussetzung mit einem endlichen Werthe der Function $G$ unverträglich. In dem Falle einer wirklichen Bewegung wird aber die Constante $T(0)-U(0)$ gleich dem Product des endlichen negativen Werthes $\frac{2+\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}}$ in den endlichen positiven Werth $\lim.\frac{1}{\tau-\sigma}\int_{\sigma}^{\tau} T\,dt$. Der dritte Theil der Behauptung wird durch die Gleichung der lebendigen Kraft $T-U=T(0)-U(0)$ erledigt. Denn wenn bei einem negativen Werth der Constante $T(0)-U(0)$ die Function $G$ über jede Grenze hinaus wachsen sollte, so müsste nach der Voraussetzung die Function $U$ sich der Null nähern, also die niemals negative Function $T$ der negativen Constante $T(0)-U(0)$ gleich werden, was unmöglich ist.

Ein Unendlichwerden der Function $T$ kann wegen der Gleichung $T-U=T(0)-U(0)$ nur dann eintreten, wenn die Function $U$ ebenfalls in's Unendliche wächst, und nach der Voraussetzung geschieht dies wieder nur dann, wenn die sämmtlichen Elemente $x_\alpha-a_\alpha$, $y_\alpha-b_\alpha$, $z_\alpha-c_\alpha$ sich der Null nähern. Multiplicirt man daher die Gleichung der lebendigen Kraft mit der Function $G$ und beachtet, dass das Product $GU$ nach der Voraussetzung beim Verschwinden der sämmtlichen Elemente immer die Null zur Grenze hat, so erkennt man, dass unter den bestehenden Verhältnissen die Function $T$ nur in dem Falle unendlich gross werden kann, wenn zu derselben Zeit das Massensystem in die Lage $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ übergeht und das Product $GT$ gegen die

*) Vgl. die oben angeführten Stellen bei *Jacobi*.

Null convergirt. Es wird deshalb die Function $T$ niemals in's Unendliche wachsen können, sobald ein Umstand den Vorgang verhindert, dass das Product $GT$ beim Abnehmen der sämmtlichen Elemente $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$ gegen die Null convergire.

Man kann nun eine einfache Bedingung für das Eintreten eines solchen Umstandes angeben, wofern die Function $\Phi_\beta$ und $U$ noch einer ferneren Beschränkung unterworfen sind. Jede Function $V$, welche die Elemente $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$ nur in den $\frac{n(n+1)}{2}$ homogenen Verbindungen

$$(x_\alpha - a_\alpha)(x_{\alpha'} - a_{\alpha'}) + (y_\alpha - b_\alpha)(y_{\alpha'} - b_{\alpha'}) + (z_\alpha - c_\alpha)(z_{\alpha'} - c_{\alpha'})$$

enthält, wo $\alpha$ und $\alpha'$ alle Werthe von 1 bis $n$ durchlaufen, genügt offenbar den drei partiellen Differentialgleichungen

$$(13.)\quad \begin{cases} \sum_\alpha \left( \frac{\partial V}{\partial y_\alpha}(z_\alpha - c_\alpha) - \frac{\partial V}{\partial z_\alpha}(y_\alpha - b_\alpha) \right) = 0, \\ \sum_\alpha \left( \frac{\partial V}{\partial z_\alpha}(x_\alpha - a_\alpha) - \frac{\partial V}{\partial x_\alpha}(z_\alpha - c_\alpha) \right) = 0, \\ \sum_\alpha \left( \frac{\partial V}{\partial x_\alpha}(y_\alpha - b_\alpha) - \frac{\partial V}{\partial y_\alpha}(x_\alpha - a_\alpha) \right) = 0. \end{cases}$$

Wenn daher die Functionen $\Phi_\beta$ und $U$ die Elemente $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$ nur in den $\frac{n(n+1)}{2}$ homogenen Verbindungen

$$(x_\alpha - a_\alpha)(x_{\alpha'} - a_{\alpha'}) + (y_\alpha - b_\alpha)(y_{\alpha'} - b_{\alpha'}) + (z_\alpha - c_\alpha)(z_{\alpha'} - c_{\alpha'})$$

enthalten, so genügen dieselben den für $V$ aufgestellten drei partiellen Differentialgleichungen, und man kann aus den Differentialgleichungen der Bewegung (2.) die folgenden Gleichungen herleiten:

$$(14.)\quad \begin{cases} \sum_\alpha m_\alpha \left( \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}(z_\alpha - c_\alpha) - \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2}(y_\alpha - b_\alpha) \right) = 0, \\ \sum_\alpha m_\alpha \left( \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2}(x_\alpha - a_\alpha) - \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}(z_\alpha - c_\alpha) \right) = 0, \\ \sum_\alpha m_\alpha \left( \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}(y_\alpha - b_\alpha) - \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}(x_\alpha - a_\alpha) \right) = 0, \end{cases}$$

welche sofort die drei Integrale liefern

$$(15.)\quad \begin{cases} \sum_\alpha m_\alpha \left( \frac{dy_\alpha}{dt}(z_\alpha - c_\alpha) - \frac{dz_\alpha}{dt}(y_\alpha - b_\alpha) \right) = \mathfrak{A}, \\ \sum_\alpha m_\alpha \left( \frac{dz_\alpha}{dt}(x_\alpha - a_\alpha) - \frac{dx_\alpha}{dt}(z_\alpha - c_\alpha) \right) = \mathfrak{B}, \\ \sum_\alpha m_\alpha \left( \frac{dx_\alpha}{dt}(y_\alpha - b_\alpha) - \frac{dy_\alpha}{dt}(x_\alpha - a_\alpha) \right) = \mathfrak{C}. \end{cases}$$

Dieselben gehen in die Integrale über, welche unter dem Namen der Flächensätze bekannt sind, sobald die $n$ Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ in einen Punkt vereinigt werden. Ich werde jetzt den Beweis der Thatsache führen, dass, wenn die Quadratsumme der drei neuen Integrationsconstanten $\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2$ nicht gleich Null ist, das Product $GT$ beim Abnehmen der sämmtlichen Elemente $x_\alpha-a_\alpha$, $y_\alpha-b_\alpha$, $z_\alpha-c_\alpha$ nicht verschwinden kann, und dass folglich alsdann unter den gegebenen Verhältnissen die Function $T$ zu keiner Zeit in's Unendliche zunimmt.

Der Kürze halber mögen die folgenden Bezeichnungen gebraucht werden

$$(16.)\quad \begin{cases} \frac{dy_\alpha}{dt}(z_\alpha-c_\alpha)-\frac{dz_\alpha}{dt}(y_\alpha-b_\alpha) = p_\alpha, \\ \frac{dz_\alpha}{dt}(x_\alpha-a_\alpha)-\frac{dx_\alpha}{dt}(z_\alpha-c_\alpha) = q_\alpha, \\ \frac{dx_\alpha}{dt}(y_\alpha-b_\alpha)-\frac{dy_\alpha}{dt}(x_\alpha-a_\alpha) = r_\alpha, \\ (x_\alpha-a_\alpha)^2+(y_\alpha-b_\alpha)^2+(z_\alpha-c_\alpha)^2 = s_\alpha^2, \\ \left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_\alpha}{dt}\right)^2 = v_\alpha^2, \\ (\sum_\alpha m_\alpha p_\alpha)^2+(\sum_\alpha m_\alpha q_\alpha)^2+(\sum_\alpha m_\alpha r_\alpha)^2 = D^2, \end{cases}$$

dann kommt

$$\sum_\alpha m_\alpha s_\alpha^2 = 2G, \qquad \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 = 2T.$$

Wenn nun bei der einfachen Summation, wie bisher, der Buchstabe $\alpha$ die Werthe von 1 bis $n$ durchläuft, dagegen bei der doppelten Summation die Buchstaben $\alpha$ und $\alpha'$ nur die Paare ungleicher Zahlen aus der Reihe von 1 bis $n$ darstellen, so gilt die Gleichung

$$(17.)\quad \begin{cases} 4GT-D^2 = \sum_\alpha m_\alpha^2(s_\alpha^2 v_\alpha^2-p_\alpha^2-q_\alpha^2-r_\alpha^2) \\ \qquad +\sum_\alpha\sum_{\alpha'} m_\alpha m_{\alpha'}(s_\alpha^2 v_{\alpha'}^2+s_{\alpha'}^2 v_\alpha^2-2p_\alpha p_{\alpha'}-2q_\alpha q_{\alpha'}-2r_\alpha r_{\alpha'}). \end{cases}$$

Da allgemein die Ungleichheit

$$(p_\alpha p_{\alpha'}+q_\alpha q_{\alpha'}+r_\alpha r_{\alpha'})^2 \leqq (p_\alpha^2+q_\alpha^2+r_\alpha^2)(p_{\alpha'}^2+q_{\alpha'}^2+r_{\alpha'}^2)$$

besteht, und für die Grössen $p_\alpha$, $q_\alpha$, $r_\alpha$ in Folge ihres Bildungsgesetzes die bekannte Relation

$$(18.)\quad p_\alpha^2+q_\alpha^2+r_\alpha^2 = s_\alpha^2 v_\alpha^2-s_\alpha^2\left(\frac{ds_\alpha}{dt}\right)^2$$

stattfindet, so hat man die Folgerungen

$$s_\alpha^2 v_\alpha^2 - p_\alpha^2 - q_\alpha^2 - r_\alpha^2 = s_\alpha^2 \left(\frac{ds_\alpha}{dt}\right)^2 \geqq 0,$$

$$(p_\alpha p_{\alpha'} + q_\alpha q_{\alpha'} + r_\alpha r_{\alpha'})^2 < s_\alpha^2 v_\alpha^2 s_{\alpha'}^2 v_{\alpha'}^2,$$

$$s_\alpha^2 v_{\alpha'}^2 + s_{\alpha'}^2 v_\alpha^2 - 2p_\alpha p_{\alpha'} - 2q_\alpha q_{\alpha'} - 2r_\alpha r_{\alpha'} \geqq 0.$$

Also ist die Verbindung $4GT - D^2$ gleich einem Aggregat von lauter nicht negativen Grössen. In Folge der drei Integrale (15.) wird $D^2$ gleich der Constante $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$, und es leuchtet ein, dass, wenn dieselbe einen von der Null verschiedenen Werth hat, das Product $GT$ auch beim Abnehmen der sämmtlichen Elemente $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$ nicht verschwinden kann; dies aber war zu beweisen.

Wenn der Zeit $t = t_0$ ein endliches, den Bedingungen $\Phi_\beta = 0$ genügendes, von dem System $x_\alpha = a_\alpha$, $y_\alpha = b_\alpha$, $z_\alpha = c_\alpha$ verschiedenes, sonst aber ganz beliebiges Werthsystem $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$ entspricht, so ist nach der Voraussetzung der zugehörige Werth $U(0)$ ein endlicher und positiver; es kann deshalb durch die Wahl der Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx_\alpha}{dt}$, $\frac{dy_\alpha}{dt}$, $\frac{dz_\alpha}{dt}$ für die Zeit $t = t_0$ ebensowohl bewirkt werden, dass die Constante $T(0) - U(0)$ einen negativen und die Constante $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$ einen von der Null verschiedenen Werth erhalte, wie auch, dass die Constante $T(0) - U(0)$ einen positiven Werth bekomme. Hieraus zieht man den Schluss, dass, wenn unter den obwaltenden Verhältnissen die Lage des Massensystems beliebig, doch so gegeben ist, dass die Function $G$ einen endlichen von der Null verschiedenen Werth hat, es lediglich von den zugehörigen Werthen der Geschwindigkeitscomponenten abhängt, ob die Bewegung den Charakter der Stabilität an sich trage oder nicht.

Bonn, den 16. October 1866.

# Ueber die Anziehung eines homogenen Polyeders.

(Von Herrn *F. G. Mehler* zu Danzig.)

(Im Auszuge mitgetheilt aus den Schriften der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig vom Jahre 1865.)

1. In der Abhandlung „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum“ schickt *Gauss* der Behandlung des Ellipsoids den Beweis einiger allgemeinen Sätze voraus, durch welche gewisse dreifache über einen körperlichen Raum ausgedehnte Integrale auf zweifache reducirt werden, die sich über die Oberfläche dieses Raumes erstrecken. Die Ableitung dieser Sätze beruht auf einer Zerlegung des Körpers entweder in kegelförmige Elemente, die ihre Spitze in einem festen, dem angezogenen, Punkte haben, oder in cylindrische, deren Seitenlinien einer festen Richtung im Raume parallel sind. Indem man die erste Art der Zerlegung auf das Potential $V$, die zweite auf die nach irgend einer Richtung genommene Attractionscomponente $A$ eines homogenen Körpers anwendet, wird man auf die folgenden beiden Doppelintegrale geführt:

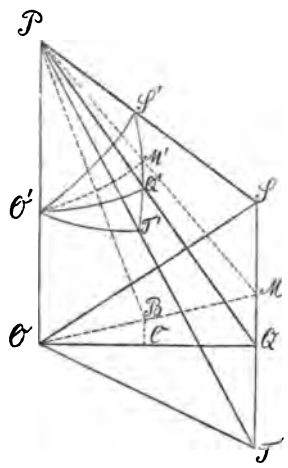
$$V=\tfrac{1}{2}\int\frac{p\,d\omega}{r},\qquad A=\int\frac{\cos\alpha\,d\omega}{r},$$

in denen $d\omega$ das Oberflächenelement, $r$ die Entfernung desselben von dem angezogenen Punkte $P$, $\alpha$ den Winkel der nach innen errichteten Normalen mit der betrachteten Richtung und $p$ das Perpendikel bezeichnet, welches von $P$ auf die durch $d\omega$ gelegte Tangentialebene gefällt wird. Es ist noch hinzuzufügen, dass $p$ positiv oder negativ genommen werden muss, je nachdem das Element $d\omega$ dem Punkte $P$ die innere oder äussere Seite zukehrt. Ist nun der anziehende Körper ein Polyeder, so sind $p$ und $\alpha$ für alle Elemente derselben Grenzfläche constant, und es können demnach, wenn man das Integralzeichen immer nur auf eine einzelne Polyederfläche bezieht und durch das Zeichen $\Sigma$ eine Summation über sämmtliche Flächen andeutet, die obigen Gleichungen durch die folgenden drei ersetzt werden:

$$(1.)\quad V=\tfrac{1}{2}\Sigma p.\Omega,\qquad (2.)\quad A=\Sigma\cos\alpha.\Omega,$$

$$(3.)\quad \Omega=\int\frac{d\omega}{r}.$$

Somit handelt es sich bei der Bestimmung von $V$ und $A$ gleichmässig um die Berechnung des Doppelintegrals $\Omega$, welches angesehen werden kann als das Flächenpotential eines Grenzpolygons, das man sich mit einer Massenschicht von der constanten Dichte 1 belegt denkt. Man construire nun in der (gehörig erweiterten) Ebene eines solchen Polygons $F$ über jeder der dasselbe begrenzenden Kanten das Dreieck, welches seine dritte Ecke in dem Fusspunkte $O$ des von $P$ auf jene Ebene gefällten Lothes hat: dann ist das Potential $\Omega$ gleich der Summe der Potentiale aller der Dreiecke, welche sich von innen, vermindert um die Summe der Potentiale aller derjenigen, welche sich von aussen an eine Seite des Polygons $F$ anlehnen. Betrachten wir also eines dieser Dreiecke, $OST$, legen noch durch das Loth $PO$ oder $p$ eine auf der Polygonseite $ST$ senkrechte Ebene $POQ$, fällen von irgend einem Punkte $B$ des Dreiecks auf $OQ$ das Loth $BC=y$, setzen $OC=x$, $\angle OPB=\vartheta'$, $\angle COB=\eta$ und bezeichnen durch $(p)$ den absoluten Werth von $p$, so ist:




$$x = OB\cos\eta = (p)\,\mathrm{tg}\,\vartheta'\cos\eta,$$
$$y = OB\sin\eta = (p)\,\mathrm{tg}\,\vartheta'\sin\eta,$$

es wird:

$$d\omega = (dx\,dy) = \frac{p^2\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\eta}{\cos^3\vartheta'}, \qquad r = BP = \frac{(p)}{\cos\vartheta'},$$

und man erhält für das Potential $D$ des Dreiecks $OST$ den Ausdruck:

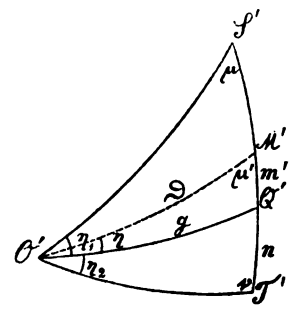
$$D = (p)\iint\frac{\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\eta}{\cos^3\vartheta'}.$$

Es sei $M$ der Punkt, in welchem die Verlängerung von $OB$ die Seite $ST$ schneidet, und $\angle OPM=\vartheta$, so sind 0 und $\vartheta$ die Integrationsgrenzen für $\vartheta'$; nach $\eta$ aber hat man, wenn $Q$, wie es in der Figur angenommen ist, zwischen $S$ und $T$ fällt, einerseits von $\eta=0$ bis $\eta=\eta_1=\angle QOS$ und andererseits von $\eta=0$ bis $\eta=\eta_2=\angle QOT$ zu integriren und die erhaltenen Resultate zu addiren. Also ist:

$$D = (p)\int_0^{\eta_1}\left(\frac{1}{\cos\vartheta}-1\right)d\eta + (p)\int_0^{\eta_2}\left(\frac{1}{\cos\vartheta}-1\right)d\eta.$$

Um die noch übrig bleibende Integration passend auszuführen, schneiden wir die körperliche Ecke $P-OST$ durch eine um $P$ beschriebene Kugel vom

Halbmesser 1 und erhalten ein dem ebenen Dreiecke $OST$ entsprechendes sphärisches $O'S'T'$, und ein dem $OQM$ entsprechendes $O'Q'M'$. In diesem letzteren, das bei $Q'$ rechtwinklig ist, ist $O'M' = \vartheta$, $\angle Q'O'M' = \eta$, und wir setzen ferner die bei der Integration constante Kathete $O'Q' = g$, die veränderliche $Q'M' = m'$ und den veränderlichen Winkel $O'M'Q' = \mu'$. Differentiirt man nun die Formel




$$\cos\eta = \sin\mu'\cos m',$$

nachdem man von beiden Seiten die Logarithmen genommen hat, so wird:

$$\operatorname{tg}\eta\, d\eta = -\cot\mu'\, d\mu' + \sin m' \frac{dm'}{\cos m'},$$

oder, da $\operatorname{tg}\eta = \frac{\cot\mu'}{\cos\vartheta}$ und $\sin m' = \cot\mu' \operatorname{tg} g$ ist:

$$\frac{d\eta}{\cos\vartheta} = -d\mu' + \operatorname{tg} g \frac{dm'}{\cos m'}.$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$\int\left(\frac{1}{\cos\vartheta} - 1\right) d\eta = -\eta - \mu' + \operatorname{tg} g \,.\log\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}m') + \text{Const.}$$

Beim Uebergange zu den bestimmten Integralen mit den Grenzen 0 und $\eta_1$, 0 und $\eta_2$ ist zu beachten, dass für $\eta = 0$: $\mu' = \frac{1}{2}\pi$, $m' = 0$; für $\eta = \eta_1$: $\mu' = \angle O'S'Q' = \mu$, $m' = Q'S' = m$, und für $\eta = \eta_2$: $\mu' = \angle O'T'Q = \nu$, $m' = Q'T' = n$; also wird, wenn man noch $\eta_1 + \eta_2$ oder $\angle S'O'T'$ durch $\lambda$ bezeichnet:

$$D = (p).(\pi - \lambda - \mu - \nu) + (p) \operatorname{tg} g \log[\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}m)\cot(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}n)].$$

Liegt der Punkt $Q$ nicht zwischen $S$ und $T$, so gilt, wie leicht einzusehen, dieselbe Formel, sobald man demjenigen der Segmente $m$ und $n$ einen negativen Werth ertheilt, welches ganz in die Verlängerung von $S'T'$ fällt. Setzt man nun

$$m = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi, \qquad n = \tfrac{1}{2}\pi - \psi,$$

wo $\varphi$ und $\psi$ nichts anderes als die Winkel $PST$ und $PTS$ in der ersten Figur bedeuten, so erhalten, wenn $\varphi$ und $\psi$ stets positiv und zwar zwischen 0 und $\pi$ gewählt werden, die Segmente $m$ und $n$ von selbst die richtigen Vorzeichen, und führt man ferner den Flächeninhalt $\Delta$ des Dreiecks $O'S'T'$ und die Länge $q$ der Linie $OQ$ ein vermittelst der Gleichungen

$$\Delta = \lambda + \mu + \nu - \pi, \qquad q = (p) \operatorname{tg} g,$$

so wird man die Formel für $D$ einfacher so schreiben können:

$$D = -(p)\Delta + q\log(\cot\tfrac{1}{2}\varphi\cot\tfrac{1}{2}\psi).$$

Man hat jetzt, um $\Omega$ zu erhalten, die Ausdrücke des $D$ für alle die Dreiecke, aus denen $F$ zusammengesetzt wurde, zu bilden und zu einander zu addiren, wobei man $\Delta$ und $q$ in den sich auf die äusseren Dreiecke beziehenden Ausdrücken negative Werthe ertheilen muss. Die Summe der ersten Glieder ist $-(p)f$, wenn $f$ das sphärische Polygon bezeichnet, welches auf der um $P$ beschriebenen Kugel durch die Seitenflächen der Pyramide begrenzt wird, die $F$ zur Basis und in $P$ ihre Spitze hat. Die Fläche dieses Polygons $f$, welches kurz die scheinbare Grösse von $F$ in Bezug auf den Punkt $P$ genannt werden kann, fällt nach der vorhergehenden Ableitung wesentlich positiv aus, und dasselbe gilt von dem Producte $(p)f$. Man darf also $pf$ statt $(p)f$ schreiben, sobald man festsetzt, dass $f$ stets dasselbe Zeichen wie $p$ haben solle. Somit wird $\Omega$ gefunden durch die Formel:

$$(4.)\qquad \Omega = -pf + \Sigma_k q\log(\cot\tfrac{1}{2}\varphi\cot\tfrac{1}{2}\psi),$$

und darauf $V$ und $A$ durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad V = \tfrac{1}{2}\Sigma_f p.\Omega, \qquad (2.)\qquad A = \Sigma_f \cos\alpha.\Omega.$$

Der besseren Uebersicht wegen wiederhole ich die Bedeutung der in diesen Formeln vorkommenden Zeichen. Es ist $p$ das von dem angezogenen Punkte $P$ auf eine Polyederfläche $F$ gefällte Loth und $f$ die scheinbare Grösse von $F$ in Bezug auf $P$; $p$ und $f$ sind positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem $F$ dem $P$ die innere oder äussere Seite zukehrt. $q$ bezeichnet das von dem Fusspunkte $O$ jenes Lothes auf irgend eine Kante von $F$ gefällte Perpendikel und hat das positive oder negative Zeichen, je nachdem $O$ an der inneren oder äusseren Seite der Kante liegt; $\varphi$ und $\psi$ sind die an den Endpunkten dieser Kante liegenden Winkel in dem Dreieck, das seine dritte Ecke in $P$ hat; $\alpha$ bedeutet den Winkel, welchen die Richtung der Componente $A$ mit der auf $F$ nach dem Innern des Körpers errichteten Normalen bildet; die Summe $\Sigma_k$ erstreckt sich über alle Kanten des Polygons $F$, und das Zeichen $\Sigma_f$ deutet an, dass die entsprechenden Ausdrücke für alle Grenzflächen des Polyeders zu bilden sind.

2. Um für $f$ einen analytischen Ausdruck durch die Grössen $p$, $q$, $\varphi$, $\psi$ zu erhalten, beachte man, dass $f = \Sigma\Delta$, und dass $\Delta = \pm(\lambda+\mu+\nu-\pi)$, je nachdem $p$ und $q$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Liegt nun die gemeinschaftliche Ecke $O'$ der Dreiecke $\Delta$ ausserhalb der Fläche von $f$, so ist $\Sigma(\pm\lambda) = 0$, und liegt $O'$ innerhalb, so ist diese Summe $= +2\pi$ bei

positivem und $=-2\pi$ bei negativem $p$. Bemerkt man noch, dass

$$\sin m = \operatorname{tg} g \cot \mu = \pm \frac{q}{p} \cot \mu, \quad \text{also} \quad \pm(\mu - \tfrac{1}{2}\pi) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q} \sin m\right),$$

und dass $\nu$ aus $\mu$ durch Vertauschung von $m$ mit $n$ hervorgeht, so erhält man:

$$(5.) \qquad f = 2\pi\varepsilon - \Sigma_k\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q}\sin m\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q}\sin n\right)\right],$$

wobei $\varepsilon = 0$ zu setzen, wenn $O$ ausserhalb $F$, dagegen $= \pm 1$, wenn $O$ innerhalb fällt, und zwar $=+1$, wenn $p$ positiv, und $=-1$, wenn $p$ negativ. Setzt man das Dreieck $O'S'T'(\Delta)$ aus den rechtwinkligen Dreiecken $O'Q'S'(\Delta_1)$ und $O'Q'T'(\Delta_2)$ zusammen und wendet die Formeln

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Delta_1 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} g \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} m, \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Delta_2 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} g \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} n$$

an, so findet man für $f$ noch einen anderen, für alle Lagen von $P$ gleichmässig gültigen Ausdruck, nämlich:

$$(5'.) \qquad f = 2\Sigma_k[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} g \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} m) + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} g \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} n)].$$

Die arctg sind in dieser, wie auch in der vorhergehenden Formel, zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen, der früher absolut genommene, jetzt aber ebenfalls zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ zu wählende Bogen $g$ hängt mit $p$ und $q$ durch die Gleichung $p \operatorname{tg} g = q$ zusammen, und endlich ist $m = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, $n = \frac{1}{2}\pi - \psi$.

3. Wir kehren zu dem für $A$ gefundenen Ausdruck zurück, um demselben eine andere, für manche Anwendungen bequemere Gestalt zu geben. Denkt man sich den Werth von $\Omega$ aus (4.) in (2.) substituirt, so liefert jede Kante $K$, weil sie zwei verschiedenen Flächen $F$ und $F'$ angehört, zwei logarithmische Glieder; die Summe derselben ist, wenn man diejenigen Grössen, welche für beide Flächen verschiedene Werthe besitzen, durch Accente unterscheidet:

$$(q \cos\alpha + q' \cos\alpha') \log(\cot \tfrac{1}{2}\varphi \cot \tfrac{1}{2}\psi).$$

Man setze, wie vorhin, $p \operatorname{tg} g = q$, und $p' \operatorname{tg} g' = q'$, und betrachte $p$, $g$ etc. als Functionen der rechtwinkligen Coordinaten $a$, $a_1$, $a_2$ des angezogenen Punktes. Da $g+g'$ den constanten Winkel misst, welchen die von $P$ auf $F$ und $F'$ gefällten Lothe einschliessen, so ist $\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial g'}{\partial a} = 0$, oder da $g = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$ und $g' = \operatorname{arctg}\frac{q'}{p'}$:

$$\frac{q\frac{\partial p}{\partial a} - p\frac{\partial q}{\partial a}}{p^2+q^2} + \frac{q'\frac{\partial p'}{\partial a} - p'\frac{\partial q'}{\partial a}}{p'^2+q'^2} = 0.$$

Bezeichnet nun $\beta$ den Winkel, welchen die in der Ebene des Polygons $F$ auf $K$ nach innen errichtete Normale mit der Componente $A$ bildet, so ist

$\frac{\partial q}{\partial a} = \cos\beta$, und ferner hat man: $\frac{\partial p}{\partial a} = \cos\alpha$, $p^2+q^2=p'^2+q'^2$; demnach wird:

$$q\cos\alpha + q'\cos\alpha' = p\cos\beta + p'\cos\beta',$$

und man erhält:

$$(6.) \quad A = \Sigma_f p[-f\cos\alpha + \Sigma_k \cos\beta \log(\cot\tfrac{1}{2}\varphi \cot\tfrac{1}{2}\psi)].$$

Durch Differentiation von (1.) und Vergleichung des Resultats mit (2.) erhält man ferner:

$$(7.) \quad A = \Sigma_f p \frac{\partial\Omega}{\partial a},$$

und wenn man diesen Ausdruck dem vorhergehenden gleichsetzt und die so entstehende Formel auf eine Pyramide anwendet, welche das Polygon $F$ zur Basis hat, und in deren Spitze sich der angezogene Punkt befindet, so ergiebt sich:

$$(8.) \quad \frac{\partial\Omega}{\partial a} = -f\cos\alpha + \Sigma_k \cos\beta \log(\cot\tfrac{1}{2}\varphi \cot\tfrac{1}{2}\psi).$$

Hierdurch ist die von einem ebenen Polygon nach einer beliebigen Richtung ausgeübte Anziehung bestimmt. Projicirt man die in die drei rechtwinkligen Coordinatenaxen fallenden Componenten auf die Normale der Ebene, so findet man:

$$(9.) \quad \cos\alpha \frac{\partial\Omega}{\partial a} + \cos\alpha_1 \frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + \cos\alpha_2 \frac{\partial\Omega}{\partial a_2} = -f,$$

d. h. die Kraft, mit welcher eine ebene, mit einer Massenschicht von gleichförmiger Dichte belegte Fläche einen Punkt in der Richtung ihrer Normalen anzieht, ist gleich gross für alle Punkte, in Bezug auf welche diese Fläche gleiche scheinbare Grösse hat.

Man kann vermittelst der letzten Gleichung auch leicht verificiren, dass $V$ der charakteristischen Differentialgleichung des Potentials Genüge leistet. Setzt man nämlich:

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_2^2} = \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial A_1}{\partial a_1} + \frac{\partial A_2}{\partial a_2},$$

so folgt aus (2.) und (9.) sofort: $\Delta^2 V = -\Sigma f$. Es ist also $-\Delta^2 V$ gleich der scheinbaren Grösse der Gesammtoberfläche des Polyeders, d. h. gleich Null für ausserhalb des Polyeders gelegene Punkte, und gleich der ganzen Kugeloberfläche ($4\pi$) für innere Punkte.

4. Die für die Polyeder erhaltenen Resultate führen sogleich zu dem Schluss, ***dass das Potential und die Attractionscomponenten eines homogenen von abwickelbaren Flächen vollständig begrenzten Körpers stets durch einfache***

*Integrale darstellbar sind.* Denkt man sich nämlich die Oberfläche des Körpers durch die geraden Erzeugungslinien in unendlich schmale Streifen zerschnitten, so wird das $\Omega$ eines jeden solchen Streifens in geschlossener Form durch (4.) gegeben, und die jetzt aus unendlich vielen Gliedern bestehenden Summenausdrücke in (1.) und (2.) gehen in einfache Integrale über. Uebrigens wird man zu den einfachsten Formen der Lösung besser durch eine mehr directe Methode, unter Einführung zweckmässig gewählter Coordinaten, gelangen, und man wird durch eine derartige Behandlung sich auch leicht überzeugen, dass der oben ausgesprochene Satz auch auf solche homogenen Körper Anwendung findet, welche von nicht abwickelbaren geradlinigen Flächen begrenzt sind. Was endlich das Potential einer auf einer geradlinigen Fläche gleichmässig vertheilten Massenschicht betrifft, so besitzt es die angegebene Eigenschaft nur dann, wenn diese Fläche eine abwickelbare ist.

Danzig, im April 1866.

# Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.

(Von Herrn *R. Hennig* zu Gnesen.)

..... Ich bin darauf aufmerksam gemacht worden, dass die in meinem *„Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten“* im 65^ten^ Bande Ihres Journals gegebene Construction des Krümmungsradius einer Roulette, welche ich für neu hielt, schon von *Savary* in seinen Vorträgen an der Pariser polytechnischen Schule angegeben worden ist, und dass sich diese Construction, auf eine von der meinigen verschiedene Weise abgeleitet, insbesondere in kinematischen Werken findet, namentlich in *Laboulaye, Cinématique,* 1849, pag. 129, in *Haton de la Goupillière, traité des engrenages,* 1861, pag. 48 und in *Lamarle, calcul différentiel et intégral* 1861, pag. 219.

Diese Mittheilung erlaube ich mir Ihnen mit der Bitte zu machen, dass Sie derselben als Zusatz zu meinem oben erwähnten Beitrag eine Stelle in Ihrem Journal anweisen wollen.

Gnesen, 1866.

# Preisfrage

der physikalisch-mathematischen Klasse
der
Königlich Preussischen
**Akademie der Wissenschaften**
für das Jahr 1868.

Bekannt gemacht in der öffentlichen Sitzung am Leibnitzischen Jahrestage, den 5. Juli 1866.

(Aus dem von *Steiner* gestifteten Legate für Preisfragen in dem Gebiete der synthetischen Geometrie.)

---

Für diejenigen geometrischen Probleme, deren algebraische Lösung von Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade abhängt, fehlt es noch an der Feststellung der zur constructiven Lösung derselben erforderlichen und ausreichenden fundamentalen Hülfsmittel, sowie an den Methoden zur systematischen Benutzung dieser Hülfsmittel.

Indem die Akademie die Frage, die sie stellt, auf die Probleme beschränkt, welche auf kubische Gleichungen führen, wünscht sie, dass wenigstens an einer Anzahl von speciellen Beispielen gezeigt werde, wie diese Lücke in dem Gebiete der constructiven Geometrie ausgefüllt werden könne. Namentlich verlangt sie die vollständige Lösung des folgenden Problems:

*Wenn dreizehn Punkte in der Ebene gegeben sind, so sollen durch geometrische Construction diejenigen drei Punkte bestimmt werden, welche mit den gegebenen zusammen ein System von sechszehn Durchschnittspunkten zweier Curven vierten Grades bilden.*

Bei der Lösung sind die Fälle zu berücksichtigen, in welchen einige der dreizehn Punkte imaginär und demgemäss nicht als individuelle Punkte, sondern als Durchschnittspunkte vorgelegter Curven gegeben sind. Gewünscht wird ferner, dass sämmtliche geometrische Constructionen durch die entsprechenden algebraischen Operationen erläutert werden.

Die Arbeiten können in deutscher, französischer oder lateinischer Sprache abgefasst werden.

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der dieser Frage gewidmeten Preisschriften ist der 1. März des Jahres 1868. Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen und dieses ist auf dem Aeussern des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen. Die Ertheilung des Preises von 600 Thalern geschieht in der öffentlichen Sitzung am Leibnitztage im Juli des Jahres 1868.

STORAGE AREA

STORAGE AREA